Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 48 (1970)

Heft: 2

Artikel: Dastellung der Verstärkereigenschaften von Transistoren als lineare aktive Vierpole durch die Streuparameter [2. Teil und Schluss]

Autor: Hauri, Ernst H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-876043

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Darstellung der Verstärkereigenschaften von Transistoren als lineare aktive Vierpole durch die Streuparameter (2. Teil und Schluss*)

Ernst R. HAURI, Bern

621.375.4:621.372.5
621.382.3:621.372.5

3.3 Stabilität

Bei aktiven Vierpolen kann es vorkommen, dass der Realteil der Eingangs- oder Ausgangsimpedanz (oder -admittanz) bei bestimmten Abschlüssen der andern Seite einen negativen Wert annimmt. Es besteht dann die Möglichkeit, dass sich die Schaltung selber zu Schwingungen erregt. Anderseits gibt es Vierpole, bei denen ein negativer oder verschwindender Realteil der Eingangs- oder Ausgangsimpedanz nicht auftreten kann, vorausgesetzt, dass die Abschlussimpedanzen passiv sind. Solche Vierpole werden als unbedingt stabil bezeichnet. Im folgenden sollen die *Bedingungen für unbedingte Stabilität* abgeleitet werden, ausgehend vom Eingangs-Reflexionsfaktor S_1. (Geht man von S_2 aus, so ergibt sich wegen der Symmetrie der Ausdrücke dasselbe Resultat.)

Die Bedingung, dass der Realteil der Eingangsimpedanz positiv bleibt, entspricht einen Betrag von S_1, der kleiner als eins ist:

$$|S_1| < 1 \tag{85}$$

Ein Betrag $|S_1| = 1$ bedeutet eine rein reaktive Eingangsimpedanz, die mit einer passenden rein reaktiven Generatorimpedanz zur Unstabilität führen kann, denn dies würde einem verlustlosen Eingangskreis des Vierpols entsprechen, in welchem sich ungedämpfte Schwingungen erhalten können. – Wie bereits im Anschluss an (79) zu Figur 10 gesagt wurde, grenzt der Kreis für $|r_L| = 1$ alle Eingangs-Reflexionsfaktoren S_1 ab, die sich aus einer Belastungsimpedanz mit positivem oder verschwindendem Realteil ergeben (Z_L passiv). Die Bedingung (85) bedeutet also, dass der Kreis für $|r_L| = 1$ innerhalb des Einheitskreises $|S_1| = 1$ liegen muss und diesen nicht berühren darf. Dieser Kreis sei der *Stabilitätskreis* genannt. In *Figur 11* ist ein Stabilitätskreis gezeichnet, der den Nullpunkt umschliesst; damit er innerhalb des Einheitskreises liegt, muss die Summe von Radius ϱ_1 und Betrag der Mittelpunktskoordinate $|c_1|$ kleiner als 1 sein:

$$\varrho_1 + |c_1| < 1 \tag{86}$$

Mit (78) und (79) führt dies auf

$$|s_{11} - \Delta s_{22}^*| < 1 - |s_{22}|^2 - |s_{12}\, s_{21}| \tag{87}$$

Bildet man auf beiden Seiten das Betragsquadrat, so erhält man nach einiger Umformung folgende Bedingung:

$$1 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 + |\Delta|^2 > 2\,|s_{12}\, s_{21}| \tag{88}$$

Nach Einführung des Faktors

$$K = \frac{1 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2\,|s_{12}\, s_{21}|} \tag{89}$$

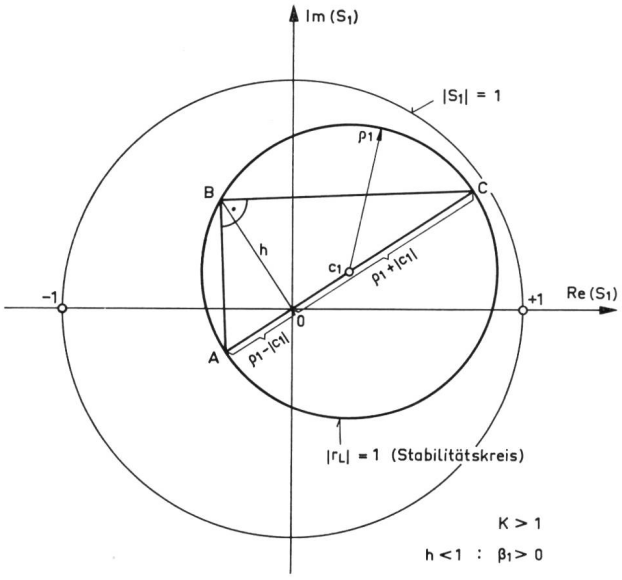


Fig. 11
Die Abbildung des Kreises $|r_L| = 1$ in der S_1-Ebene ergibt den Stabilitätskreis. Für unbedingte Stabilität muss dieser innerhalb des Einheitskreises $|S_1| = 1$ liegen und diesen nicht berühren

kann (88) auch wie folgt geschrieben werden:

$$K > 1 \tag{90}$$

Wie man mit Hilfe der Umrechnungsformeln für den Übergang von den s-Parametern auf die y-Parameter zeigen kann (siehe Anhang A), ist K identisch mit dem sogenannten «invarianten inhärenten Stabilitätsfaktor»

$$K = \frac{2\, g_{11}\, g_{22} - \mathrm{Re}\,(y_{12}\, y_{21})}{|y_{12}\, y_{21}|} \tag{91}$$

wobei g_{11} und g_{22} die Realteile von y_{11} und y_{22} sind. Dieser kann analog auch durch andere «klassische» Vierpolparameter ausgedrückt werden [12], [13]; ferner ist K gleich dem Reziprokwert 1/C des *Linvill*schen Stabilitätsfaktors C [14].

Die Bedingung $K > 1$ allein genügt nicht für unbedingte Stabilität; ausgedrückt durch die y-Parameter muss bekanntlich auch $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ sein. Eine entsprechende Bedingung kann aus Figur 11 abgeleitet werden. Zieht man durch den Nullpunkt der S_1-Ebene und den Mittelpunkt c_1 des Stabilitätskreises eine Gerade, so ergibt diese die Schnittpunkte A und C mit dem Stabilitätskreis. Eine Senkrechte auf dieser Gerade im Nullpunkt führt ferner zum Schnittpunkt B, mit dem Stabilitätskreis. Das dem Stabilitätskreis einbeschriebene rechtwinklige Dreieck ABC hat die Höhe h und die Hypotenusenabschnitte $(\varrho_1 + |c_1|)$ und $(\varrho_1 - |c_1|)$. Weil der Stabilitätskreis für unbedingte Stabilität innerhalb des Einheitskreises liegen muss, ist die Höhe

* Teil 1 ist in den Techn. Mitt. PTT Nr. 1/1970, S. 2...12 erschienen.

$h < 1$. Nun ist aber bekanntlich (Höhe)^2 = Produkt der Hypotenusenabschnitte, so dass

$$h^2 = (\varrho_1 + |c_1|) \cdot (\varrho_1 - |c_1|) < 1 \tag{92}$$

Zum Verständnis des folgenden muss auf die Kreisgleichung zurückgegriffen werden. Wie im Anschluss an (76) gesagt wurde, hat die rechte Seite von (74) den Wert $\varrho_{r1}^2 - |c_{r1}|^2$; insbesondere ist also für $|r_L| = 1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{|\Delta|^2 - |s_{11}|^2}{1 - |s_{22}|^2} &= \varrho_1^2 - |c_1|^2 \\ &= (\varrho_1 - |c_1|) \cdot (\varrho_1 + |c_1|) \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Mit (92) folgt

$$\frac{|\Delta|^2 - |s_{11}|^2}{1 - |s_{22}|^2} < 1$$

oder

$$1 + |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 - |\Delta|^2 > 0 \tag{94}$$

Wir führen die Abkürzung

$$\beta_1 = 1 + |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 - |\Delta|^2 \tag{95}$$

ein, so dass also $\beta_1 > 0$ sein muss.

Durch eine analoge Betrachtung für die Ausgangsseite findet man, dass auch

$$\left.\begin{aligned} 1 + |s_{22}|^2 - |s_{11}|^2 - |\Delta|^2 > 0 \\ \beta_2 > 0 \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

sein muss, mit

$$\beta_2 = 1 + |s_{22}|^2 - |s_{11}|^2 - |\Delta|^2 \tag{97}$$

Für unbedingte Stabilität ergeben sich somit drei Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} K &> 1 \\ \beta_1 &> 0 \\ \beta_2 &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Addiert man (88) zu (94) oder (96), so findet man folgende gleichwertige Formeln für (94) oder (96):

$$1 - |s_{22}|^2 > |s_{12}\, s_{21}| \tag{94a}$$

$$1 - |s_{11}|^2 > |s_{12}\, s_{21}| \tag{96a}$$

(94a) bedeutet anschaulich, dass der Radius ϱ_1 des Stabilitätskreises nach (78) kleiner als 1 sein muss.

Es lässt sich zeigen, dass die drei Bedingungen (98) auch für einen innerhalb des Einheitskreises $|S_1| = 1$ liegenden Stabilitätskreis gelten, der aber den Nullpunkt nicht umschliesst.

Die Bedingungen $\beta_1 > 0$ und $\beta_2 > 0$ entsprechen $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ ausgedrückt durch die y-Parameter, oder den analogen ausgedrückt durch andere «klassische» Parameter.

Es sei hier besonders darauf hingewiesen, dass die Bezeichnung von K als «Stabilitätsfaktor» nicht ganz korrekt ist, denn wie im folgenden noch gezeigt wird, bedeutet $K > 1$ lediglich, dass der Vierpol auf beiden Seiten konjugiert – komplex angepasst werden kann. Konjugiert – komplexe Anpassung ist aber auch möglich, wenn $\beta_1 < 0$ und $\beta_2 < 0$ (oder $g_{11} < 0$ und $g_{22} < 0$) sind, vorausgesetzt, dass $K > 1$. Der Faktor K für sich allein würde daher besser «Anpassungsfaktor» genannt. Werden hingegen *a priori* $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ gesetzt, so kommt K als Stabilitätsfaktor heraus [12], [13], [14].

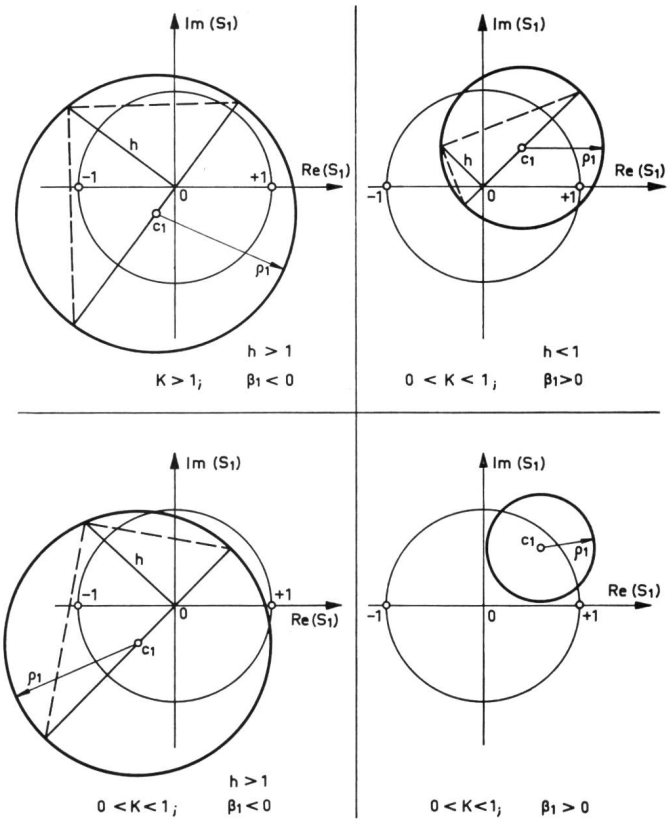
Bedingte Stabilität liegt vor, wenn die Fläche des Stabilitätskreises teilweise oder ganz ausserhalb des Einheitskreises $|S_1| = 1$ liegt. Solche Kreise sind in *Figur 12* dargestellt. Für einen Kreis, der ganz ausserhalb des Einheitskreises liegt, und diesen umschliesst, lassen sich die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} K &> 1 \\ \beta_1 &< 0 \\ \beta_2 &< 0 \end{aligned}\right\} \tag{98a}$$

ableiten. Alle andern Kreise haben $K < 1$.

Unter der schon erwähnten Annahme $|s_{11}| < 1$ und $|s_{22}| < 1$ bleibt jedoch immer $K > -1$.

Wenn bedingte Stabilität vorliegt, ist es oft erwünscht, jene Last-Reflexionsfaktoren r_L zu kennen, die einen negati-



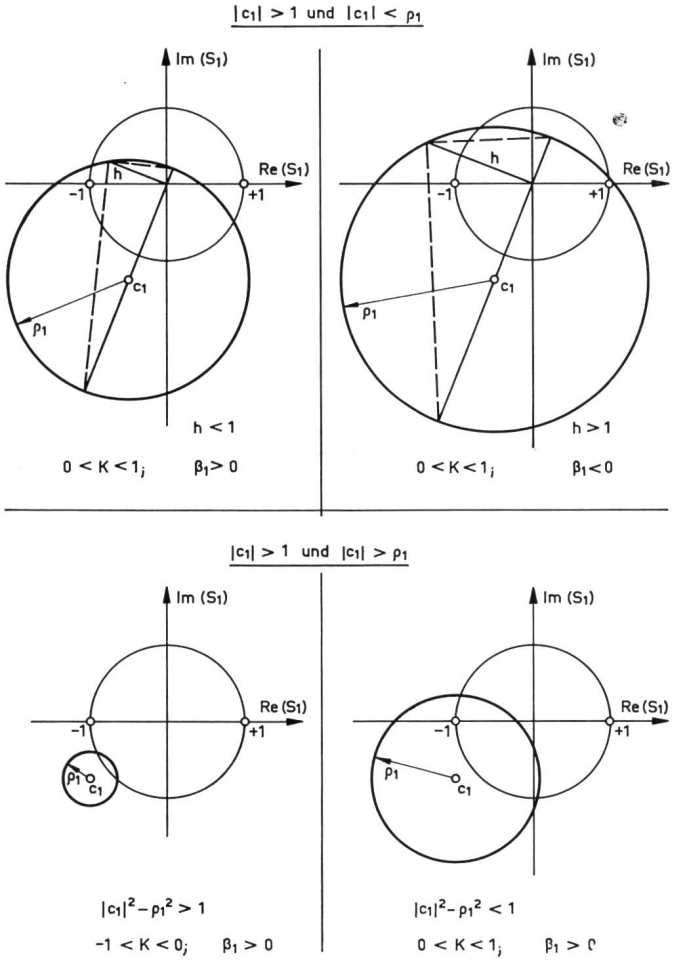


Fig. 12
Bedingte Stabilität. Lage der (dick ausgezogenenen) Stabilitätskreise in der S_1-Ebene für verschiedene Fälle

ven Realteil der Eingangsimpedanz zur Folge haben. Setzt man in (70) $|S_1| = 1$, so ergibt sich nach Bildung der Betragsquadrate aus

$$|s_{11} - r_L \Delta| = |1 - s_{22}\, r_L|$$

die Gleichung eines Kreises in der r_L-Ebene, dessen Mittelpunkt c_{Ls} und Radius ϱ_{Ls} folgende Werte haben:

$$c_{Ls} = \frac{\gamma_2^*}{|s_{22}|^2 - |\Delta|^2} \quad ; \quad \varrho_{Ls} = \left| \frac{s_{12}\, s_{21}}{|s_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right| \tag{99}$$

mit

$$\gamma_2 = s_{22} - \Delta\, s_{11}^* \tag{100}$$

Umschliesst dieser Kreis den Nullpunkt, so entspricht das Innere des Kreises dem «stabilen Gebiet» (Werten von r_L, die $|S_1| < 1$ ergeben), denn für $r_L = 0$ ist $S_1 = s_{11}$, und es ist $|s_{11}| < 1$ vorausgesetzt. Der Kreis selbst entspricht einem verschwindenden Realteil der Eingangsimpedanz, also schon einer potentiellen Unstabilität, und noch mehr die Fläche ausserhalb des Kreises mit $|S_1| > 1$. Umgekehrt ist das Innere des Kreises unstabil, wenn dieser den Nullpunkt nicht einschliesst, und so fort. Jene r_L-Werte, die innerhalb des Kreises $|r_L| = 1$, aber ausserhalb des stabilen Gebiets liegen, entsprechen den passiven Lastimpedanzen, die $|S_1| > 1$ ergeben. Die Ausdrücke für die entsprechenden Kreise in der r_G-Ebene erhält man aus (99) durch Vertauschen der Indizes 1 und 2, mit γ_1 nach (79):

$$c_{Gs} = \frac{\gamma_1^*}{|s_{11}|^2 - |\Delta|^2} \quad ; \quad \varrho_{Gs} = \left| \frac{s_{12}\, s_{21}}{|s_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right| \tag{99a}$$

Ist ein Vierpol potentiell unstabil ($K \leq 1$), so kann man ihn betriebsmässig stabil machen, indem die Generator- und Lastimpedanzen (oder -admittanzen) so gewählt werden, dass deren Realteile einen eventuellen negativen Realteil der Eingangs- oder Ausgangsimpedanz (-admittanz) aufheben. In Reflexionsfaktoren ausgedrückt, ist dies dasselbe, wie wenn man r_G oder r_L innerhalb des durch (99) beziehungsweise (99a) definierten stabilen Gebiets wählt. Für Beispiele siehe die Figuren 14 und 15.

Die zuletzt erwähnten Kreise in der r_L- oder r_G-Ebene, die ebenfalls als Stabilitätskreise bezeichnet werden können, wurden von *Bodway* [3] zur Ableitung der Stabilitätsbedingungen benützt; der hier eingeschlagene Weg ist aber direkter. Noch einen andern Weg hat *Kurokawa* [2] über die Beziehungen für den Wechsel der Bezugsimpedanzen gewählt; auf diese sei nicht eingetreten, da sie bei der hier gewählten Darstellung nicht benötigt werden.

3.4 Leistungsverstärkung

Unter «Leistung» wird im folgenden immer die Wirkleistung verstanden, die eine positive reelle Grösse ist, wenn die Generator- und Lastimpedanzen (-admittanzen) einen positiven Realteil haben, was hier vorausgesetzt ist. Die verschiedenen Arten von Leistungsverstärkungen, als Verhältnisse von Wirkleistungen, sind also positive reelle Grössen.

Gemäss (21) betragen die Leistungen P_1 und P_2, die eingangs- und ausgangsseitig in den Vierpol hineinfliessen:

$$P_1 = \mathrm{Re}\,(u_1\, i_1^*) = |a_1|^2 - |b_1|^2$$

$$P_2 = \mathrm{Re}\,(u_2\, i_2^*) = |a_2|^2 - |b_2|^2$$

Die Leistung P_L, die in der Last (r_L) verbraucht wird, ist jedoch $P_L = -P_2$. Setzt man $b_1 = S_1\, a_1$ und $a_2 = r_L\, b_2$ ein, so folgt:

$$P_1 = |a_1|^2\,(1 - |S_1|^2) \tag{101}$$

$$P_L = |b_2|^2\,(1 - |r_L|^2) \tag{102}$$

Durch Umformen von (39) erhalten wir noch die durch die Wellenquelle (b_0 und r_G) ausgedrückte verfügbare Leistung P_v des Generators:

$$P_v = \frac{|b_0|^2}{1-|r_G|^2} \tag{103}$$

Als Leistungsverstärkung (power gain; auch «Klemmen-Leistungsverstärkung») bezeichnet man das Verhältnis P_L/P_1 der Wirkleistung in der Last zur am Eingang eintretenden Wirkleistung. Mit (101) und (102) folgt zunächst

$$g = \frac{P_L}{P_1} = \left|\frac{b_2}{a_1}\right|^2 \cdot \frac{1-|r_L|^2}{1-|S_1|^2}$$

und durch Einsetzen von (70) und (80) resultiert

$$g = |s_{21}|^2 \frac{1-|r_L|^2}{|1-s_{22}\,r_L|^2 - |s_{11} - r_L \Delta|^2} \tag{104}$$

Die Leistungsverstärkung ist von der Last (r_L) abhängig. Für $r_L = 0$ (Belastung $Z_L = R_0$) wird

$$g_0 = \frac{|s_{21}|^2}{1-|s_{11}|^2} \tag{105}$$

Dieser Ausdruck, der nur durch die Parameter s_{21} und s_{11} gegeben ist, entspricht der Leistungsverstärkung des mit dem Bezugswiderstand R_0 belasteten Vierpols.

Aus (104) können die Orte konstanter Leistungsverstärkung g in der r_L-Ebene abgeleitet werden; durch Umformen findet man die Kreisgleichung

$$|r_L|^2 - (r_L\, c_g^* + r_L^*\, c_g) = \varrho_g^2 - |c_g|^2 \tag{106}$$

Mittelpunkt c_g und Radius ϱ_g der Kreise konstanter Verstärkung ergeben sich dabei zu

$$c_g = \frac{g\,\gamma_2^*}{|s_{21}|^2 + g\,(|s_{22}|^2 - |\Delta|^2)} \tag{107}$$

$$\varrho_g = |s_{21}|\,\frac{\sqrt{g^2\,|s_{12}|^2 - 2\,g\,|s_{12}\,s_{21}|\,K + |s_{21}|^2}}{\left||s_{21}|^2 + g\,(|s_{22}|^2 - |\Delta|^2)\right|} \tag{108}$$

wobei γ_2 durch (100) und K durch (89) bereits ausgedrückt worden sind. Mittelpunkt c_g und Radius ϱ_g sind eine Funktion der Leistungsverstärkung g.

Im Zähler von (108) bemerkt man eine in g quadratische Gleichung. Dies lässt vermuten, dass $\varrho_g = 0$ werden könnte für bestimmte Werte von g, so dass der betreffende Kreis auf einen Punkt zusammenschrumpft; dann würde ein Extremwert von g (Maximum oder Minimum) erreicht. Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt:

$$g_{1,2} = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \cdot (K \pm \sqrt{K^2-1}) \tag{109}$$

Wegen

$$(K + \sqrt{K^2-1})\,(K - \sqrt{K^2-1}) = 1 \tag{110}$$

kann man auch schreiben:

$$g_{1,2} = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \cdot \frac{1}{K \mp \sqrt{K^2-1}} \tag{109a}$$

Da g als Verhältnis zweier Wirkleistungen eine positive reelle Zahl sein sollte, kann man aus (109) vorläufig die Bedingung

$$K \geq 1 \tag{111}$$

dafür ableiten, dass ein Extremwert von g erreicht wird. Einsetzen der ersten Lösung von (109)

$$g_1 = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \cdot (K - \sqrt{K^2-1}) = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \frac{1}{K + \sqrt{K^2-1}} \tag{112}$$

in (107) führt auf die Lage des Punktes c_{g1}, der dem Extremwert der Leistungsverstärkung g_1 nach (112) entspricht. Wir nennen c_{g1} auch r_{LM} und finden mit β_2 nach (97) und γ_2 nach (100):

$$c_{g1} = r_{LM} = \frac{2\,\gamma_2^*}{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\,|\gamma_2|^2}} \tag{113}$$

Wegen

$$(\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\,|\gamma_2|^2}) \cdot (\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\,|\gamma_2|^2}) = 4\,|\gamma_2|^2 \tag{114}$$

kann man auch schreiben:

$$c_{g1} = r_{LM} = \frac{\gamma_2^*}{|\gamma_2|}\left(\frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\,|\gamma_2|^2}}{2\,|\gamma_2|}\right) = \frac{\gamma_2^*}{|\gamma_2|}\,(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 1}) \tag{115}$$

mit

$$x_2 = \beta_2 / 2\,|\gamma_2| \tag{116}$$

Damit $r_{LM} = c_{g1}$ einer Impedanz (Admittanz) mit positivem Realteil entspricht, muss

$$|c_{g1}| = |r_{LM}| < 1 \tag{117}$$

sein. Der Wert $|c_{g1}| = 1$ ist nicht erlaubt, da dies einem Leerlauf, Kurzschluss oder einer reinen Reaktanz entsprechen würde; in diesem Fall entsteht aber keine Wirkleistung in der Last.

Welche Werte von $x_2 = \beta_2/2|\gamma_2|$ sind nun erlaubt, damit (117) erfüllt ist? Der Betrag von $\gamma_2^*/|\gamma_2|$ in (115) ist eins; somit ist der Ausdruck $(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 1})$ massgebend. Zunächst ist ersichtlich, dass ein Betrag von $|x_2| < 1$ keine zulässige Lösung ergibt, denn dann wird

$$|x_2 - j\sqrt{1 - x_2^2}| = 1$$

Dasselbe gilt für $|x_2| = 1$. Es folgt also zunächst: $|x_2| > 1$. Es lässt sich folgende Identität nachweisen:

$$\beta_2^2 - 4\,|\gamma_2|^2 = [1 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 + |\Delta|^2]^2 - 4\,|s_{12}\,s_{21}|^2 \tag{118}$$

Mit K nach (89) folgt daraus:

$$4\,|\gamma_2|^2\,(x_2^2 - 1) = 4\,|s_{12}\,s_{21}|^2\,(K^2 - 1) \tag{119}$$

Die Bedingung $|x_2| > 1$ geht also über in $|K| > 1$, und zusammen mit der früheren Bedingung (111) folgt

$$K > 1 \tag{120}$$

was mit (90) übereinstimmt.

Ist nun $|x_2| > 1$, so wird der Betrag von $x_2 - \sqrt{x_2^2 - 1}$ nur dann kleiner als 1, wenn x_2 positiv ist; also muss mit (116)

$$\beta_2 > 0 \tag{121}$$

sein. Die Bedingungen (120) und (121) zusammen entsprechen der im Abschnitt 3.3 abgeleiteten Bedingung (98) für unbedingte Stabilität des Vierpols.

Auf gleichem Weg wie oben lässt sich zeigen: Einsetzen der zweiten Lösung von (109)

$$g_2 = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| (K + \sqrt{K^2 - 1}) \tag{122}$$

in (107) führt zu $c_{g2} = r_{Lm}$, der anderen Koordinate des zu einem Punkt degenerierten Kreises, wobei

$$c_{g2} = r_{LM} = \frac{2\gamma_2^*}{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4|\gamma_2|^2}} = \frac{\gamma_2^*}{|\gamma_2|}(x_2 + \sqrt{x_2^2 - 1}) \tag{123}$$

Damit $|c_{g2}| < 1$ ist, müssen die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} K > 1 \\ \beta_2 < 0 \end{array}\right\} \tag{124}$$

erfüllt sein. (124) entspricht nach (98a) einem Stabilitätskreis, der ganz ausserhalb des Einheitskreises liegt (bedingte Stabilität).

Zusammenfassend können wir festhalten: Damit ein Extremwert der Leistungsverstärkung g eintritt, ist lediglich die Bedingung $K > 1$ nach (120) zu erfüllen. Der Extremwert g_1 nach (112) tritt bei unbedingt stabilen Vierpolen auf, der Extremwert g_2 nach (122) bei bedingt stabilen Vierpolen.

Aus [12], [13] ist bekannt, dass die maximal verfügbare Leistungsverstärkung eines unbedingt stabilen Vierpols, ausgedrückt zum Beispiel durch die y-Parameter,

$$g_{v,max} = \left|\frac{y_{21}}{y_{12}}\right| \frac{1}{K + \sqrt{K^2 - 1}} \tag{125}$$

beträgt. Nach dem Anhang A über die Beziehungen zwischen den y- und s-Parametern ist

$$\left|\frac{y_{21}}{y_{12}}\right| = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \tag{126}$$

Dies ist eine sogenannte *invariante Grösse* des Vierpols, die bei Änderung des Parametersystems ihren Wert beibehält. (Es gilt auch $|y_{21}/y_{12}| = |z_{21}/z_{12}|$ und so fort mit andern Parametern.) Somit ist (112) mit (125) identisch und g_1 gleich der maximal verfügbaren Leistungsverstärkung eines (unbedingt stabilen) Vierpols, die bei konjugiert-komplexer Anpassung am Eingang und Ausgang resultiert, wenn die Bedingungen $K > 1$; $g_{11} > 0$; $g_{22} > 0$ oder (98) erfüllt sind.

Auch die maximal verfügbare Leistungsverstärkung $g_1 = g_{v,max}$ ist eine invariante Grösse, denn es ist klar, dass ihr Wert nicht vom verwendeten Parametersystem abhängt. Somit ist auch

$$\Sigma_i = K + \sqrt{K^2 - 1} \tag{127}$$

invariant, gleich wie K selber. Wenn $K > 1$ ist, ist auch $\Sigma_i > 1$; für $K < 1$ ist Σ_i eine komplexe Grösse. Σ_i wird wie K als inhärenter Stabilitätsfaktor bezeichnet [12], [13]. Aus dem obigen folgt, dass für einen unbedingt stabilen Vierpol

$$g_1 = g_{v,max} < \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \tag{128}$$

bleibt.

Für einen bedingt stabilen Vierpol mit $K > 1$ und negativen Werten von β_1 und β_2 wird dagegen der Extremwert der Leistungsverstärkung g_2 nach (122)

$$g_2 > \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \tag{129}$$

Wenn $g_1 = g_{v,max}$ ein Maximum ist, so ist man geneigt anzunehmen, dass g_2 ein Minimum ist, was tatsächlich zutrifft; s. Fig. 14 unten.

Es lassen sich folgende Beziehungen über die Änderung von g_1 und g_2 mit K ableiten:

$$\frac{d\,g_1}{g_1} = \frac{-d\,K}{\sqrt{K^2 - 1}} \tag{130}$$

$$\frac{d\,g_2}{g_2} = \frac{+d\,K}{\sqrt{K^2 - 1}} \tag{131}$$

Die relative Änderung von g_1 ist also negativ (g_1 nimmt ab), wenn K zunimmt; die relative Änderung von g_2 ist dagegen positiv.

Die Kreise konstanter Verstärkung für gewisse Extremwerte von g sind noch interessant. Für $g = 0$ (verschwindende Verstärkung) wird $c_g = 0$ und $\varrho_g = 1$. Dies ist der Einheitskreis, welcher rein reaktiver Last oder Leerlauf und Kurzschluss entspricht, was keine Wirkleistung in der Last entstehen lässt. – Für $g = \infty$ gehen (107) und (108) über in c_{Ls} und ϱ_{Ls} nach (99), welche den Kreis des verschwindenden Realteils der Eingangsimpedanz (Stabilitätskreis) bestimmen. In diesem Fall entsteht daher keine Eingangswirkleistung.

Für einen Transistor 2 N 3570 mit den im Abschnitt 3.1 angegebenen Streuparametern sind in *Figur 13* die Kreise konstanter Verstärkung gezeichnet. Mit den berechneten Werten von $K = 1{,}033$; $\beta_1 = 0{,}253$; $\beta_2 = 1{,}537$ ist dieser Transistor nach (98) unbedingt stabil; ferner findet man $\gamma_1 = 0{,}120 \sphericalangle -135{,}4°$ und $\gamma_2 = 0{,}768 \sphericalangle -33{,}8°$. Die maximal verfügbare Leistungsverstärkung nach (112) beziehungsweise (125) beträgt $g_1 = 19{,}1$ (12,8 dB) und wird erreicht für die Last $r_{LM} = c_{g1} = 0{,}951 \sphericalangle 33{,}8°$ (entsprechend $Z_L = 14{,}69 + j\,163{,}1\ \Omega$). Geht man von diesem Anpassungspunkt weg, so wird die Verstärkung kleiner (siehe Fig. 13). Rechnet

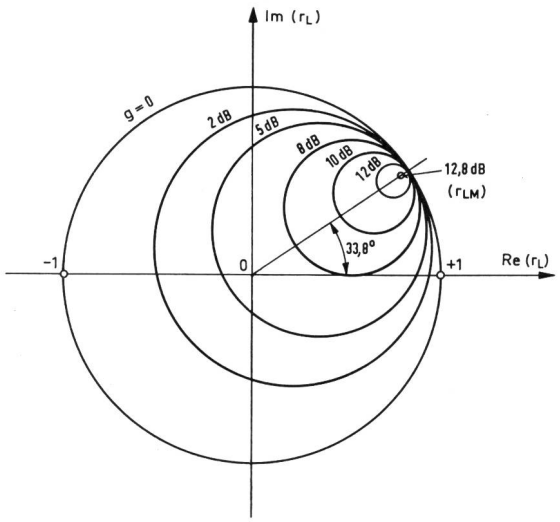


Fig. 13
Kreise konstanter Leistungsverstärkung g in der r_L-Ebene für den unbedingt stabilen Transistor 2 N 3570 bei 750 MHz (K = 1,033; $\beta_1 = 0{,}253$; $\beta_2 = 1{,}537$)

man mit einem grösseren Wert von g als $g_{v,max}$, so ergibt sich ein imaginärer Wert des Radius ϱ_g.

Zum Vergleich seien in *Figur 14* die Kreise konstanter Verstärkung für einen hypothetischen Vierpol mit $K > 1$, jedoch negativen Werten von β_1 und β_2 gezeichnet. Mit den folgenden, angenommenen Werten der s-Parameter

$$s_{11} = 0{,}975 \sphericalangle 60^\circ \qquad s_{12} = 0{,}05 \sphericalangle 75^\circ$$
$$s_{21} = 2{,}00 \sphericalangle 105^\circ \qquad s_{22} = 0{,}975 \sphericalangle -60^\circ$$

ergibt sich: $\Delta = 1{,}0506 \sphericalangle 0^\circ$

$$K = 1{,}014$$
$$\beta_1 = \beta_2 = -0{,}104$$
$$\gamma_1 = 0{,}049 \sphericalangle -120^\circ; \qquad \gamma_2 = 0{,}049 \sphericalangle +120^\circ$$

Die angepasste Leistungsverstärkung wird $g_2 = 47{,}28$ (16,75 dB) für die Last $r_{Lm} = 0{,}719 \sphericalangle 60^\circ$. Geht man von dieser Last weg, so wird die Leistungsverstärkung grösser, um auf dem Stabilitätskreis nach (99) ins Unendliche zu wachsen. Für r_L-Werte zwischen Stabilitäts- und Einheitskreis ist g negativ (unstabiles Gebiet).

Schliesslich sind in *Figur 15* die Kreise konstanter Verstärkung für einen bedingt stabilen Transistor mit $K < 1$ gezeichnet. Der gleiche Transistor 2 N 3570 wie in Figur 13 hat bei 500 MHz folgende Werte der s-Parameter beim gleichen Arbeitspunkt:

$$s_{11} = 0{,}385 \sphericalangle -55^\circ \qquad s_{12} = 0{,}045 \sphericalangle 90^\circ$$
$$s_{21} = 2{,}70 \sphericalangle 78^\circ \qquad s_{22} = 0{,}890 \sphericalangle 26{,}5^\circ$$

Es folgt:

$$\Delta = 0{,}402 \sphericalangle -65^\circ$$

$$K = 0{,}91; \ \beta_1 = 0{,}195; \qquad \beta_2 = 1{,}483$$
$$\gamma_1 = 0{,}110 \sphericalangle -122{,}4^\circ; \qquad \gamma_2 = 0{,}743 \sphericalangle -29{,}9^\circ$$

Der Stabilitätskreis nach (99) schneidet nur ein kleines Stück von Einheitskreis heraus. Die Kreise für Verstärkungen $g > 20$ dB gehen allmählich in den Stabilitätskreis ($g = \infty$) über.

Will man mit einem solchen Transistor einen Verstärker bauen, so geht man wie folgt vor [16]: Man wählt zuerst auf dem Kreis für die gewünschte Verstärkung g einen Wert des Lastreflexionsfaktors r_L, der im stabilen Gebiet liegt. Dann berechnet man den Eingangsreflexionsfaktor S_1 nach (70), der sich mit diesem r_L-Wert ergibt. Anpassung am Eingang erfolgt mit einem Generator-Reflexionsfaktor $r_G = S_1^*$. Man muss kontrollieren, ob dieser Wert im instabilen Gebiet der r_G-Ebene liegt, das durch den Kreis mit Mittelpunkt c_{Gs} und Radius ϱ_{Gs} nach (99a) definiert ist. Ist dies nicht der Fall, so ist der Verstärker stabil. Da man den Verstärker meistens mit gegebenen Klemmen-Abschlussimpedanzen (zum Beispiel 50 Ω) betreiben will, müssen am Eingang und Ausgang Anpassungsnetzwerke eingeschaltet werden, um von obigen r_G- und r_L-Werten beziehungsweise den entsprechenden Impedanzen auf 50 Ω an den Klemmen zu transformieren.

3.5 Anpassung

Zur Ergänzung soll nun noch das Problem der Anpassung wellenmässig behandelt werden. Für den Zweipol wurde die Bedingung für konjugiert-komplexe Anpassung in (31) gegeben. Für den Vierpol ergeben sich zwei Anpas-

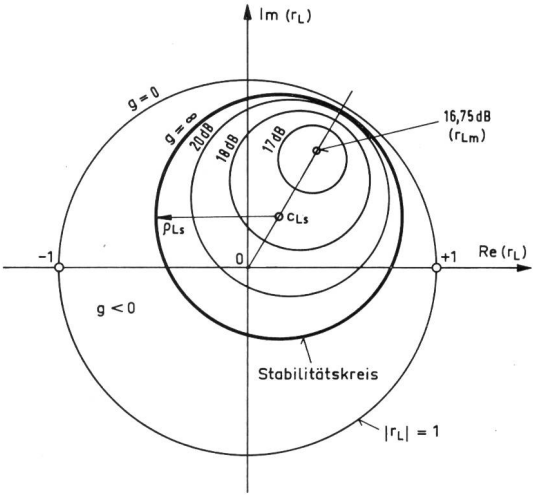


Fig. 14
Kreise konstanter Leistungsverstärkung g in der r_L-Ebene für einen hypothetischen Vierpol mit K = 1,014; $\beta_1 = \beta_2 = -0{,}104$ (bedingte Stabilität)

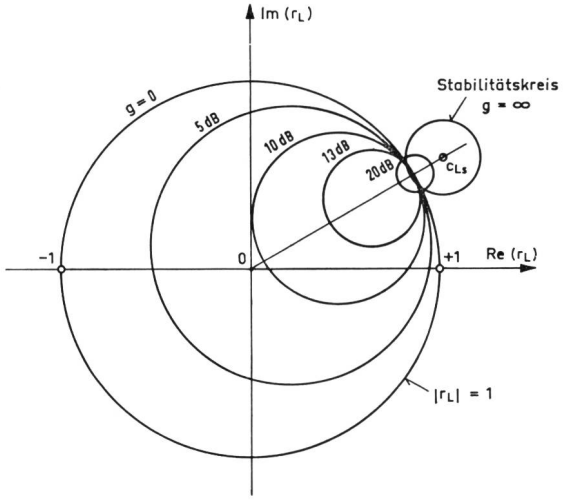


Fig. 15
Kreise konstanter Leistungsverstärkung g in der r_L-Ebene für einen potentiell unstabilen Transistor mit K = 0,91; β_1 = 0,195; β_2 = 1,483

sungsbedingungen am Eingang und am Ausgang, nämlich am Eingang

$$r_G^* = S_1 = \frac{s_{11} - r_L \Delta}{1 - s_{22} r_L} \tag{132}$$

und am Ausgang

$$r_L^* = S_2 = \frac{s_{22} - r_G \Delta}{1 - s_{11} r_G} \tag{133}$$

Der konjugiert-komplexe Wert des Reflexionsfaktors r_G der Generatorimpedanz muss gleich dem Eingangsreflexionsfaktor S_1 sein, und analog für die Ausgangsseite.

Für gleichzeitige Leistungsanpassung am Eingang und am Ausgang müssen (132) und (133) zugleich erfüllt sein. Bildet man beispielsweise aus (132): $r_G = (s_{11}^* - r_L^* \Delta^*)/(1 - s_{22}^* r_L^*)$ und setzt in (133) ein, so erhält man eine quadratische Gleichung in r_L^*, die demnach zwei Lösungen haben kann. Diese seien r_{LM} und r_{Lm} genannt. Mit den schon bekannten Abkürzungen β_2 nach (97), γ_2 nach (100) und x_2 nach (116) findet man:

$$r_{L/m,M} = \frac{\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4|\gamma_2|^2}}{2\gamma_2} = \frac{\gamma_2^*}{|\gamma_2|}(x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 1}) \tag{134}$$

Es gibt demnach zwei Möglichkeiten für konjugiert-komplexe Anpassung am Ausgang. Die eine Lösung r_{Lm} mit dem Pluszeichen vor der Wurzel entspricht c_{g2} nach (123) und die andere Lösung r_{LM} mit dem Minuszeichen vor der Wurzel entspricht c_{g1} nach (113) beziehungsweise (115). Damit die Reflexionsfaktoren r_{LM} und r_{Lm} zu Impedanzen mit positiven Realteilen gehören, müssen ihre Beträge kleiner als 1 sein. Diese Rechnung wurde im Abschnitt 3.4 im Anschluss an (117) durchgeführt. Das Gemeinsame an den Resultaten (120) und (121) oder (124) war, dass K > 1 sein muss.

Die Bedingung K > 1 ist offenbar notwendig und hinreichend, dass konjugiert-komplexe Anpassung möglich ist.

Auf ähnliche Weise wie vorhin findet man die Reflexionsfaktoren der Generatorimpedanz, die bei konjugiert-komplexer Anpassung auftreten:

$$r_{G/m,M} = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4|\gamma_1|^2}}{2\gamma_1} = \frac{\gamma_1^*}{|\gamma_1|}(x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 1}) \tag{135}$$

Dabei ist β_1 durch (95) und γ_1 durch (79) gegeben, sowie

$$x_1 = \beta_1 / 2|\gamma_1| \tag{136}$$

Damit der Betrag der Lösung kleiner als 1 ist, muss wieder K > 1 gelten, sowie $\beta_1 > 0$ für die Lösung mit dem Minuszeichen vor der Wurzel und $\beta_1 < 0$ für die Lösung mit dem Pluszeichen vor der Wurzel.

Betrachtet man das Anpassungsproblem mit den y-Parametern, so erhält man auf ähnliche Weise wie oben eine quadratische Gleichung für die Generator- oder Lastadmittanz bei konjugiert-komplexer Anpassung, die je zwei Lösungen haben:

$$Y_{G/M,m} = \pm \frac{|y_{12} y_{21}|}{2 g_{22}} \sqrt{K^2 - 1} + j\left(\frac{\mathrm{Im}\,(y_{12} y_{21})}{2 g_{22}} - b_{11}\right) \tag{137}$$

$$Y_{L/M,m} = \pm \frac{|y_{12} y_{21}|}{2 g_{11}} \sqrt{K^2 - 1} + j\left(\frac{\mathrm{Im}\,(y_{12} y_{21})}{2 g_{11}} - b_{22}\right) \tag{138}$$

Das ± Zeichen erscheint vor dem Realteil. Die Lösung mit dem Minuszeichen wird in der Regel unterschlagen, da man $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ voraussetzt; s. [12], [13] u. a. Ein positiver Realteil ergibt sich jedoch auch mit negativen g_{11} oder g_{22} für die Lösung mit dem Minuszeichen, voraus-

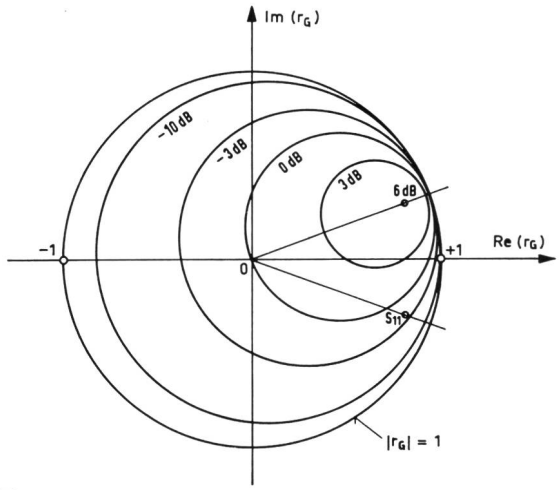


Fig. 16
Kurven konstanter Verstärkung Γ_G in der r_G-Ebene für einen unilateralen Transistor mit s_{11} = 0,867 ∢ — 20 °

gesetzt $K > 1$. Diese Lösung entspricht einem bedingt stabilen Vierpol, denn $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ sind Bedingungen für unbedingte Stabilität. Ist $K = 1$, so wird Leistungsanpassung unmöglich, da die Realteile verschwinden.

Ist ein Verstärker mit einem unbedingt stabilen Transistor zu bauen, dessen äussere Klemmen für eine bestimmte Abschlussimpedanz (beispielsweise 50 Ω) vorgesehen sind, so ist zwischen dem Transistor und den Klemmen ein Anpassungsnetzwerk einzuschalten, das die Impedanz von r_{GM} beziehungsweise r_{LM} auf 50 Ω transformiert.

3.6 Betriebsverstärkung und verfügbare Leistungsverstärkung

Die Betriebsverstärkung g_b (transducer gain, auch «Übertragungs-Leistungsverstärkung») ist das Verhältnis von Wirkleistung in der Last zur verfügbaren Generatorleistung; mit (102) und (103) folgt

$$g_b = \frac{P_L}{P_v} = \left|\frac{b_2}{b_0}\right|^2 (1 - |r_L|^2)(1 - |r_G|^2) \tag{139}$$

und sodann (82) eingesetzt ergibt

$$g_b = |s_{21}|^2 \frac{(1 - |r_G|^2)(1 - |r_L|^2)}{|(1 - r_G s_{11})(1 - r_L s_{22}) - r_G r_L s_{12} s_{21}|^2} \tag{140}$$

Die Betriebsverstärkung ist von r_G und r_L abhängig. Ausgedrückt durch die y-Parameter lautet die Formel für die Betriebsverstärkung

$$g_b = |y_{21}|^2 \frac{4 G_G G_L}{|(y_{11} + Y_G)(y_{22} + Y_L) - y_{12} y_{21}|^2} \tag{141}$$

mit Generatoradmittanz $Y_G = G_G + j B_G$ und Lastadmittanz $Y_L = G_L + j B_L$.

Die *verfügbare Leistungsverstärkung* g_v (available power gain) ist das Verhältnis der Ausgangsleistung bei Anpassung zwischen Last und Ausgangsimpedanz zur verfügbaren Generatorleistung. Anpassung am Ausgang bedeutet nach (133) durch Reflexionsfaktoren ausgedrückt $r_L = S_2^*$; setzt man dies in (140) ein, so folgt

$$g_v = |s_{21}|^2 \frac{1 - |r_G|^2}{|1 - s_{11} r_G|^2 - |s_{22} - r_G \Delta|^2} \tag{142}$$

Dies ist der Form nach dieselbe Gleichung wie (104) für die Leistungsverstärkung g, ausser dass r_G mit r_L und s_{11} mit s_{22} vertauscht sind. Man kann daher analoge Folgerungen und Entwicklungen an (142) anknüpfen wie oben an (104). Insbesondere ist

$$g_{v0} = \frac{|s_{21}|^2}{1 - |s_{22}|^2} \tag{143}$$

die verfügbare Leistungsverstärkung des Vierpols, wenn die Generatorimpedanz gleich dem Bezugswiderstand R_0 ist ($r_G = 0$), bei Anpassung am Ausgang. Die Kreise konstanter verfügbarer Verstärkung in der r_G-Ebene haben folgenden Mittelpunkt c_{gv} und Radius ϱ_{gv}:

$$c_{gv} = \frac{g_v \gamma_1^*}{|s_{21}|^2 + g_v(|s_{11}|^2 - |\Delta|^2)} \tag{144}$$

$$\varrho_{gv} = |s_{21}| \frac{\sqrt{g_v^2 |s_{12}|^2 - 2 g_v |s_{12} s_{21}| K + |s_{21}|^2}}{\left||s_{21}|^2 + g_v(|s_{11}|^2 - |\Delta|^2)\right|} \tag{145}$$

Für $g_v = 0$ gehen diese Kreise über in den Einheitskreis, und für $g_v = \infty$ erhält man Mittelpunkt c_{Gs} und Radius ϱ_{Gs} des Stabilitätskreises in der r_G-Ebene, der aus (73) entsteht, wenn man $|S_2| = 1$ setzt:

$$c_{Gs} = \frac{\gamma_1^*}{|s_{11}|^2 - |\Delta|^2} \quad ; \quad \varrho_{Gs} = \left|\frac{s_{12} s_{21}}{|s_{11}|^2 - |\Delta|^2}\right| \tag{146}$$

Bei Anpassung entstehen aus $\varrho_{gv} = 0$ die gleichen Lösungen wie (109) für die angepasste Verstärkung, und die entsprechenden Reflexionsfaktoren sind durch (135) gegeben. Alle weiteren Folgerungen sind analog wie oben angegeben.

3.7 Kreise von konstanter Stabilität

Mit (125) und (127) kann man die maximal verfügbare Leistungsverstärkung wie folgt darstellen:

$$g_{v,\max} = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \cdot \frac{1}{\Sigma_i} \tag{147}$$

wobei Σ_i nach (127) der inhärente Stabilitätsfaktor ist, der bei Anpassung eines unbedingt stabilen Vierpols erreicht wird.

Es liegt nun nahe, nicht nur den angepassten Reflexionsfaktoren r_{GM} und r_{LM}, sondern jedem Punkt in der r_G- oder r_L-Ebene einen Stabilitätsfaktor zuzuweisen. Dies kann man erreichen, indem man zum Beispiel von der Leistungsverstärkung g ausgehend, jedem Wert von g in Analogie zu (147) einen Stabilitätsfaktor Σ_g gemäss

$$g = \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \cdot \frac{1}{\Sigma_g} \tag{148}$$

zuweist; es ist also umgekehrt

$$\Sigma_g = \frac{1}{g} \cdot \left|\frac{s_{21}}{s_{12}}\right| \tag{149}$$

Setzt man nun in (148) g nach (104) ein, so erhält man nach Umformung Kreise in der r_L-Ebene, die einem konstanten Wert von Σ_g entsprechen. Es stellt sich heraus, dass sie mit den Kreisen von konstanter Leistungsverstärkung zusammenfallen. Jeder Kreis von konstantem g entspricht einem Wert von Σ_g gemäss (149).

Geht man von der Anpassung r_{LM} weg, so wird g kleiner, also wird der Stabilitätsfaktor Σ_g grösser. Dem Einheitskreis mit $g = 0$ entspricht ein Stabilitätsfaktor $\Sigma_g = \infty$.

Diese Überlegungen können auch auf bedingt stabile Vierpole angewendet werden. Bei einem bedingt stabilen Vierpol mit $K > 1$, bei dem also Leistungsanpassung möglich ist, nimmt die Leistungsverstärkung zu, wenn man

vom Anpassungspunkt r_{Lm} weggeht; also nimmt der Stabilitätsfaktor ab. Auf dem Stabilitätskreis, der $g = \infty$ entspricht, wird der Stabilitätsfaktor zu Null. Bei einem solchen Vierpol kann man also den Anpassungsfall auch als den Fall von optimaler Stabilität bezeichnen. Bei einem unbedingt stabilen Vierpol ist dagegen sozusagen die Stabilität bei Anpassung «am schlechtesten», obwohl sie nie in Frage gestellt ist.

Mittelpunkt $c_{\Sigma L}$ und Radius $\varrho_{\Sigma L}$ der Kreise konstanter Stabilität in der r_L-Ebene ergeben sich wie folgt:

$$c_{\Sigma L} = \frac{\gamma_2^*}{|s_{22}|^2 - |\Delta|^2 + |s_{12}\, s_{21}|\, \Sigma_g} \tag{150}$$

$$\varrho_{\Sigma L} = \left| \frac{s_{12}\, s_{21}}{|s_{22}|^2 - |\Delta|^2 + |s_{12}\, s_{21}|\, \Sigma_g} \right| \cdot \sqrt{\Sigma_g^2 - 2\, \Sigma_g\, K + 1} \tag{151}$$

Entsprechend dem soeben gesagten gehen diese über in (99) für $\Sigma_g = 0$ und in den Einheitskreis für $\Sigma_g = \infty$. Damit der Radius $\varrho_{\Sigma L} = 0$ wird, muss die quadratische Gleichung unter der Wurzel gelöst werden; man findet

$$\Sigma_{g/1,2} = K \pm \sqrt{K^2 - 1} \tag{152}$$

Mit dem Pluszeichen vor der Wurzel entspricht dieser Ausdruck Σ_i nach (127) für den unbedingt stabilen Vierpol und mit dem Minuszeichen dem entsprechenden Stabilitätsfaktor für den bedingt stabilen Vierpol mit $K > 1$; Einsetzen von (152) in (150) führt auf die Anpassungswerte von r_L nach (134).

Mittels der Gleichungen (150) und (151) kann man die Kreise konstanter Stabilität Σ_g berechnen. Es ist dabei darauf zu achten, dass der Ausdruck unter der Wurzel von (151) positiv bleibt, was folgende Bedingung für K ergibt:

$$K < (\Sigma_g^2 + 1)/2\, \Sigma_g \tag{153}$$

Aus (147) und (148) findet man

$$|s_{21}/s_{12}| = \Sigma_i\, g_{v,\max} = \Sigma_g\, g \tag{154}$$

woraus die Bezeichnung von $|s_{21}/s_{12}|$ als «gain-stability product» folgt, welche in [16] (nur für unbedingt stabile Vierpole) ausgesprochen wurde.

Die Grösse $|s_{21}/s_{12}|$ wird auch «maximale stabile Leistungsverstärkung» (maximum stable gain) genannt [17], [13]. Ist nämlich $K < 1$, so kann man durch passenden Abschluss erreichen, dass $g = |s_{21}/s_{12}|$ wird, was $\Sigma_g = 1$ entspricht. Dieser Wert von Σ_g kann in Analogie zu $\Sigma_i = 1$ gesetzt werden, was die Grenze zwischen Stabilität und potentieller Unstabilität bezeichnet. $\Sigma_i = 1$ bedeutet aber genau genommen bereits potentielle Unstabilität und Unmöglichkeit der konjugiert-komplexen Anpassung, wie oben erklärt. Die Bezeichnung «maximum stable gain» erscheint daher etwas fragwürdig; es ist wohl besser, die Grösse $|s_{21}/s_{12}|$ als Mass für die Nichtreziprozität des Vierpols zu verstehen [12].

Um die entsprechenden Kreise konstanter Stabilität in der r_G-Ebene zu erhalten, geht man von der verfügbaren Verstärkung g_v statt von der Leistungsverstärkung g aus, mit analogen Resultaten wie oben.

3.8 Der unilaterale Fall

Ein Vierpol ist unilateral, wenn der Rückwirkungsparameter verschwindet. Im Fall der Streuparameter bedeutet dies:

$$s_{12} = 0 \tag{155}$$

Kann ein Vierpol (Transistor) annähernd als unilateral betrachtet werden, wenn der Rückwirkungsparameter s_{12} genügend klein ist, so werden viele Formeln vereinfacht. Das Stabilitätsproblem, das durch die Rückwirkung entsteht, verschwindet; der Faktor K nach (89) nimmt den Wert unendlich an.

Es ergeben sich folgende vereinfachte Beziehungen, die durch den zusätzlichen Index u gekennzeichnet sind:

Eingangs-Reflexionsfaktor:

$$S_{1,u} = s_{11} \tag{156}$$

Ausgangs-Reflexionsfaktor:

$$S_{2,u} = s_{22} \tag{157}$$

Anpassung am Eingang:

$$r_{G,u} = s_{11}^* \tag{158}$$

Anpassung am Ausgang:

$$r_{L,u} = s_{22}^* \tag{159}$$

Leistungsverstärkung:

$$g_u = |s_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |r_L|^2)}{(1 - |s_{11}|^2)\, |1 - s_{22}\, r_L|^2} \tag{160}$$

Verfügbare Verstärkung:

$$g_{v,u} = |s_{21}|^2 \frac{(1 - |r_G|^2)}{(1 - |s_{22}|^2)\, |1 - r_G\, s_{11}|^2} \tag{161}$$

Betriebsverstärkung:

$$g_{b,u} = |s_{21}|^2 \frac{(1 - |r_G|^2)}{|1 - r_G\, s_{11}|^2} \cdot \frac{(1 - |r_L|^2)}{|1 - r_L\, s_{22}|^2} \tag{162}$$

Maximal verfügbare Verstärkung, wenn $|s_{11}| < 1$ und $|s_{22}| < 1$:

$$g_{v,\max,u} = \frac{|s_{21}|^2}{(1 - |s_{11}|^2)\, (1 - |s_{22}|^2)} \tag{163}$$

Es kann vorkommen, dass in der Basisschaltung $|s_{11}| > 1$ ist bei gewissen Transistortypen (negativer Eingangswiderstand); dann kann der Transistor bei einer passiven Generatorimpedanz $r_G = 1/s_{11}$ zum Schwingen gebracht werden ($g_{v,u} = \infty$ oder $g_{b,u} = \infty$).

Eine Verstärkungsfunktion, die in (160) bis (162) vorkommt, ist

$$\Gamma_G = \frac{1-|r_G|^2}{|1-r_G\, s_{11}|^2} \quad \text{oder} \quad \Gamma_L = \frac{1-|r_L|^2}{|1-r_L\, s_{22}|^2} \tag{164}$$

Sie gibt die Abhängigkeit der Verstärkung von r_G oder r_L an. Es sei hier Γ_G betrachtet; für Γ_L sind die Resultate analog. Das Maximum von Γ_G wird für $r_G = s_{11}^*$ erreicht und beträgt:

$$\Gamma_{GM} = \frac{1}{1-|s_{11}|^2} \geqslant \Gamma_G \tag{165}$$

wobei $|s_{11}| < 1$ vorausgesetzt ist. Aus (164) lässt sich ein Kreis ableiten, dessen Mittelpunkt c_Γ und Radius ϱ_Γ folgende Werte haben:

$$c_\Gamma = \frac{\Gamma_G\, s_{11}^*}{1+\Gamma_G\,|s_{11}|^2} \;; \qquad \varrho_\Gamma = \frac{\sqrt{1-\Gamma_G\,(1-|s_{11}|^2)}}{1+\Gamma_G\,|s_{11}|^2} \tag{166}$$

Für $\Gamma_G = 0$ geht der Kreis über in den Einheitskreis. Für $\Gamma_G = 1$ (0 dB) ist $|c_\Gamma| = \varrho_\Gamma$, das heisst der Kreis für die Verstärkung $\Gamma_G = 1$ geht durch den Nullpunkt; innerhalb dieses Kreises ist die Verstärkung $\Gamma_G > 1$. Für $\Gamma_G = \Gamma_{GM}$ schrumpft der Kreis auf den Punkt $c_{\Gamma M} = s_{11}^*$ zusammen (Anpassung).

Für $|s_{11}| > 1$ gelten diese Beziehungen ebenfalls, jedoch ist Anpassung mit einem passiven r_G nicht möglich. Γ_G kann alle Werte zwischen 0 und $+\infty$ annehmen. Für $\Gamma_G = \infty$ (Selbsterregung zu Schwingungen, wie vorhin erwähnt) wird $c_\Gamma = 1/s_{11}$ und $\varrho_\Gamma = 0$; der Kreis schrumpft auf einen Punkt zusammen.

In *Figur 16* ist die Verstärkungsfunktion Γ_G in der r_G-Ebene für einen unilateral angenommenen Transistor mit $s_{11} = 0{,}867 \sphericalangle -20°$ gezeichnet. Der maximale Wert von Γ_G wird bei $r_G = s_{11}^* = 0{,}867 \sphericalangle +20°$ erreicht und beträgt $\Gamma_{GM} = 4$ (6 dB).

Ähnliche Kreise kann man für $|s_{11}| > 1$ zeichnen. Man wird dann einen Punkt r_G auf einem der Kreise wählen, der der gewünschten Verstärkung entspricht. Dabei ist auch die Änderung der Verstärkung zu berücksichtigen, in dem man die Lage der Kreise beobachtet, wenn man vom Punkt $r_G = 1/s_{11}$ weggeht. Man wird auch die Streuung von s_{11} und dessen Änderung mit der Temperatur und dem Arbeitspunkt messen. Will man ganz sicher sein, so kann der Eingangs-Reflexionsfaktor S_1 nach (70) und dessen Abhängigkeit von r_L mit dem gemessenen Rückwirkungsparameter s_{12} berechnet werden, um die Stabilität und die Vereinfachung aus der angenommenen Unilateralität beurteilen zu können.

Als Mass für die Abweichung vom nicht-unilateralen Fall wurde eine unilaterale Kennzahl u eingeführt, die sich ergibt, wenn man die Formel (162) für die Betriebsverstärkung im unilateralen Fall mit der allgemeinen Formel (140) vergleicht [3]. Es ergibt sich zunächst

$$g_b = g_{b,u}\,\frac{1}{|1-x|^2} \tag{167}$$

mit

$$x = \frac{r_G\, r_L\, s_{12}\, s_{21}}{(1-r_G\, s_{11})\,(1-r_L\, s_{22})} \tag{168}$$

Das Verhältnis $g_b/g_{b,u}$ = wahre zu unilaterale Betriebsverstärkung liegt dann zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{(1+|x|)^2} < \frac{g_b}{g_{b,u}} < \frac{1}{(1-|x|)^2} \tag{169}$$

Ausgehend von (168) erhält man die unilaterale Kennzahl u, wenn man Anpassung voraussetzt sowie $|s_{11}| < 1$ und $|s_{22}| < 1$:

$$u = \frac{|s_{11}| \cdot |s_{22}| \cdot |s_{12}\, s_{21}|}{(1-|s_{11}|^2)\,(1-|s_{22}|^2)} \tag{170}$$

Das Verhältnis $g_b/g_{b,u}$ liegt dann zwischen $1/(1-u)^2$ und $1/(1+u)^2$ für alle Generator- und Lastimpedanzen $|r_G| \leq |s_{11}|$ bzw. $|r_L| \leq |s_{22}|$. Diese Kennzahl ändert sich in der Emitterschaltung meistens nur wenig mit der Frequenz. In der Basisschaltung, wo man $|s_{11}| > 1$ am häufigsten misst, ist $|s_{12}\, s_{21}|$ in der Regel sehr klein. Obwohl der Fehler x für $r_G = 1/s_{11}$ unendlich gross wird, ist er dann nur wenig von $1/s_{11}$ entfernt ziemlich klein.

Der unilaterale Schaltungsentwurf ist natürlich auch mit den «klassischen» Vierpolparametern möglich; wohlbekannt ist insbesondere die Formel für die maximal verfügbare Verstärkung:

$$g_{v,\max,u} = \frac{|y_{21}|^2}{4\, g_{11}\, g_{22}} \tag{171}$$

Anhang A

Umrechnungsformeln zwischen s- und y-Parametern

Die Bezugsimpedanz sei $R_0 > 0$. Die y-Parameter werden in der normierten Form ($y'_{ij} = R_0\, y_{ij}$) verwendet;.

$$y'_{11} = R_0\, y_{11} = \frac{1-s_{11}+s_{22}-\Delta s}{1+s_{11}+s_{22}+\Delta s}$$

$$y'_{12} = R_0\, y_{12} = \frac{-2\, s_{12}}{1+s_{11}+s_{22}+\Delta s}$$

$$y'_{21} = R_0\, y_{21} = \frac{-2\, s_{21}}{1+s_{11}+s_{22}+\Delta s}$$

$$y'_{22} = R_0\, y_{22} = \frac{1+s_{11}-s_{22}-\Delta s}{1+s_{11}+s_{22}+\Delta s}$$

$$\Delta y' = y'_{11}\, y'_{22} - y'_{12}\, y'_{21} = \frac{1-s_{11}-s_{22}+\Delta s}{1+s_{11}+s_{22}+\Delta s}$$

Die s-Parameter ergeben sich aus den normierten y-Parametern wie folgt:

$$s_{11} = \frac{1-y'_{11}+y'_{22}-\Delta y'}{1+y'_{11}+y'_{22}+\Delta y'}$$

$$s_{12} = \frac{-2\, y'_{12}}{1+y'_{11}+y'_{22}+\Delta y'}$$

$$s_{21} = \frac{-2\,y'_{21}}{1 + y'_{11} + y'_{22} + \Delta y'}$$

$$s_{22} = \frac{1 + y'_{11} - y'_{22} - \Delta y'}{1 + y'_{11} + y'_{22} + \Delta y'}$$

$$\Delta s = s_{11}\,s_{22} - s_{12}\,s_{21} = \frac{1 - y'_{11} - y'_{22} + \Delta y'}{1 + y'_{11} + y'_{22} + \Delta y'}$$

Die Beziehungen zwischen anderen «klassischen» Vierpolparametern und den s-Parametern können mit Hilfe der bekannten Umrechnungsformeln aus den y-Parametern erhalten werden.

Anhang B

Kaskadenschaltung von Vierpolen

Werden zwei Vierpole hintereinander (in Kaskade) geschaltet (siehe *Figur 17*), so kann man sie als einen einzigen Vierpol betrachten, der durch folgende Gleichung dargestellt sei:

$$b_1 = s_{11}\,a_1 + s_{12}\,a_2$$

$$b_2 = s_{21}\,a_1 + s_{22}\,a_2$$

Für die beiden einzelnen Vierpole gelten analoge Gleichungen; entsprechend den Matrizen S′ und S″ sind aber alle Grössen einfach gestrichelt (z. B. b_1') beziehungsweise doppelt gestrichelt (z. B. b_1'') anzuschreiben. Ferner ist $a_1 = a_1'$; $a_2 = a_2''$; $b_1 = b_1'$; $b_2 = b_2''$.

Den Parameter s_{11} des Gesamtvierpols erhält man, indem man den Eingangsreflexionsfaktor des ersten Vierpols betrachtet; dieser ist mit $r_L' = s_{11}''$ belastet. Aus (70) folgt:

$$s_{11} = S_1' = s_{11}' + \frac{s_{12}'\,s_{21}'\,s_{11}''}{1 - s_{22}'\,s_{11}''}$$

Analog erhält man s_{22} aus S_2'':

$$s_{22} = S_2'' = s_{22}'' + \frac{s_{12}''\,s_{21}''\,s_{22}'}{1 - s_{22}'\,s_{11}''}$$

Der Parameter $s_{21} = b_2/a_1 = b_2''/a_1'$ kann als das Produkt von zwei Verhältnissen angeschrieben werden:

$$s_{21} = \frac{b_2''}{a_1'} = \frac{b_2''}{a_1''} \cdot \frac{a_1''}{a_1'}$$

Wegen $a_1'' = b_2'$ und unter sinngemässer Anwendung von (80) folgt:

$$s_{21} = \frac{b_2''}{a_1''} \cdot \frac{b_2'}{a_1'} = s_{21}'' \cdot \frac{s_{21}'}{1 - s_{22}'\,s_{11}''}$$

Analog erhält man für $s_{12} = b_1/a_2 = b_1'/a_2''$:

$$s_{12} = \frac{b_1'}{a_2'} \cdot \frac{a_2'}{a_2''} = \frac{b_1'}{a_2'} \cdot \frac{b_1''}{a_2''} = s_{12}' \cdot \frac{s_{12}''}{1 - s_{22}'\,s_{11}''}$$

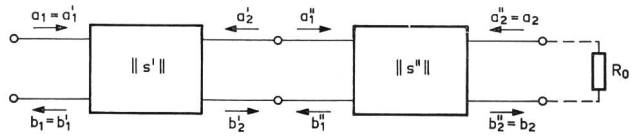


Fig. 17
Kaskadenschaltung von zwei Vierpolen

Andere Zusammenschaltungen wie Serie-Serie-Schaltung usw., insbesondere auch Gegenkopplungsschaltungen, können mit den Vierpol-s-Parametern nicht direkt berechnet werden; man muss zuerst die s-Parameter in die passenden «klassischen» Vierpolparameter umrechnen (etwa in die y-Parameter bei Parallel-Parallel-Gegenkopplung) und dann nach bekannten Regeln die zutreffenden Matrizen addieren (etwa die y-Matrizen). Dieses Resultat ist wieder in die s-Parameter umzurechnen, wenn man mit diesen weiter rechnen will. Gewisse Ausnahmen sind möglich, wenn man eine Sechspol-Charakterisierung (three port scattering parameters) des Transistors anwendet [18].

Literaturverzeichnis

[1] IRE Standards on Solid-State Devices: Methods of Testing Transistors, 1956. Proc. IRE 44 (1956) 11, p. 1542...1561.

[2] *K. Kurokawa.* Power waves and the scattering matrix. IEEE Trans. MTT-13 (1965) 2, p. 194...202.

[3] *G. E. Bodway.* Two port power flow analysis of linear active circuits using the generalized scattering parameters. Publikation der Hewlett Packard Co., April 1966.
Two port power flow analysis using generalized scattering parameters. Microwave Journal 10 (1967) 6, p. 61...69. Auch in Hewlett Packard Application Note 95, Sept. 1968.

[4] *R. Feldtkeller.* Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. 8. Auflage; S. Hirzel Verlag Stuttgart 1962.

[5] *S. Roberts.* Conjugate-image impedances. Proc. IRE 34 (1946) 4, p. 198...204.

[6] *P. Penfield.* Noise in negative resistance amplifiers. IRE Trans. CT-7 (1960) 2, p. 166...170.

[7] *D. C. Youla.* On scattering matrices normalized to complex port numbers. Proc. IRE 49 (1961) 7, p. 1221.

[8] *H. J. Carlin.* Network theory without circuit elements. Proc. IEEE 55 (1967) 4, p. 482...497.

[9] *H.-J. Butterweck.* Die Ersatzwellenquelle. A. E. Ue. 14 (1960) 9, S. 367...372.

[10] *D. M. Kerns.* Definition of v, i, Z, Y, a, b, Γ and S. Proc. IEEE 55 (1967) 6, p. 892...900.

[11] *G. W. Epprecht.* Allgemeine aktive, passive und nicht reziproke Vierpole. Techn. Mitt. PTT 35 (1957) 5, S. 169...193.

[12] *S. Venkateswaran.* An invariant stability factor and its physical significance. Proc. IEE, Pt. C, 109 C (1962) 15, p. 98...102.

[13] *J. M. Rollett.* Stability and power-gain invariants of linear two-ports. IRE Trans. CT-9 (1962) 1, p. 29...32. (Korrekturen CT-10 (1963) 1, p. 107).

[14] *J. G. Linvill, J. F. Gibbons.* Transistors and active circuits. McGraw Hill, Maidenhead, New York 1961. – *J. G. Linvill,* L. G. Schimpf. The design of tetrode transistor amplifiers. BSTJ 35 (1956), p. 813...840.

[15] *W. H. Froehner.* Quick amplifier design with scattering parameters. Electronics 40 (1967) 21, p. 100...109.

[16] *J. Zawels.* Gain – stability relationship. IEEE Trans. CT-10 (1963) 1, p. 109...110.

[17] *M. A. Karp.* Power gain and stability. IRE-Trans. CT-4 (1957) 4, p. 339...340.

[18] *Y. Satoda, G. E. Bodway.* Three-port scattering parameters for microwave transistor measurements. IEEE J. Solid State Circuits SC-3 (1968) 3, p. 250...255.

[19] *A. P. Anderson.* High-frequency transistor evaluation by three-port scattering parameters. IEEE Trans. MTT-15 (1967) 4, p. 263...265.