

**Zeitschrift:** Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

**Herausgeber:** Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

**Band:** 46 (1968)

**Heft:** 8

**Artikel:** Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen grosser Wellenlänge in Ionosphäre und Exosphäre

**Autor:** Bremmer, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-875669>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen grosser Wellenlänge in Ionosphäre und Exosphäre<sup>1</sup>

H. BREMMER, Eindhoven (Niederlande)

538.566  
621.371.33.029.4/51

Zusammenfassung. Der Zwischenraum zwischen Erde und Ionosphäre wird für lange und sehr lange Wellen als Wellenleiter betrachtet und die zugehörige Theorie besprochen. Dabei ist besonders die Rolle der für sehr lange Wellen nur wenig gedämpfte «Schumann mode» auffällig. Die Theorie kann das in diesem Frequenzgebiet beobachtete, durch Gewittererscheinungen erregte Rauschspektrum erklären. Für die längsten Wellen wird die Ionosphäre, der magnetischen Doppelbrechung zufolge, schliesslich durchsichtig. In diesem Falle können sich Störungen, die von der Erdoberfläche stammen (Blitzerscheinungen) oder durch Wechselwirkung von einfallenden Bündeln geladener Teilchen mit der Exosphäre erregt werden (VLF emissions), entlang des erdmagnetischen Kraftlinienfeldes als «whistlermodes» fortpflanzen. Die damit verknüpfte Plasmatheorie wird kurz erwähnt.

## Propagation d'ondes électromagnétiques de grande longueur dans l'ionosphère et l'exosphère

Résumé. On considère ici l'espace entre la terre et l'ionosphère comme guide pour des ondes longues et très longues et on discute la théorie qui en découle. Le rôle du «mode Schumann» très peu affaibli pour les ondes très longues apparaît particulièrement évident. La théorie permet d'expliquer le spectre de bruit produit par des orages observé dans cette plage de fréquences. Pour les ondes les plus longues, l'ionosphère devient finalement transparente en raison de la double réfraction magnétique. En ce cas, des perturbations provenant de la surface du sol (éclairs) ou produites par l'effet alternatif de faisceaux de particules chargées avec l'exosphère (émissions VLF) peuvent se propager le long du champ de lignes de force magnétique terrestre sous la forme de «whistlermodes». La théorie des plasmas, qui entre en considération ici, est brièvement mentionnée.

## Propagazione di onde elettromagnetiche molto lunghe nella ionosfera e nell'esosfera

Riassunto. Lo spazio tra la terra e la ionosfera è considerato quale guida di onde lunghe e molto lunghe e si discute la teoria che ne deriva. Qui appare particolarmente evidente la preponderanza che ottiene il «Schumann mode» per la debole attenuazione delle onde molto lunghe. La teoria è in grado di spiegare lo spettro del fruscio eccitato da manifestazioni temporalesche in questa gamma di frequenze. In seguito alla rifrazione magnetica doppia la ionosfera diventa per finire trasparente per le onde più lunghe. In questo caso perturbazioni, provenienti dalla superficie terrestre (fenomeni temporaleschi) o per influenza reciproca di fasci di particelle cariche che vengono eccitate con l'esosfera (emissione VLF), possono propagarsi lungo il campo delle linee di forza del magnetismo terrestre quali «whistlermodes». Concludendo si accenna brevemente alla teoria dei plasma che vi è connessa.

## 1. Einleitung

Der englischen Nomenklatur gemäss werden die langen Wellen meistens in die folgende Frequenzbereiche eingeteilt:

L(ow) F(requencies): 30...300 kHz      1 km <  $\lambda$  < 10 km  
V(ery) L(ow) F(requencies): 3...30 kHz    10 km <  $\lambda$  < 100 km  
E(xtreme) L(ow) F(requencies): < 3 kHz     $\lambda$  > 100 km

Physikalisch werden alle diese Wellen dadurch gekennzeichnet, dass ihre Frequenzen unterhalb der Stossfrequenz  $\nu$  (der Elektronen mit den neutralen Teilchen in der Ionosphäre) liegen. Charakteristisch sind ihre relativ hohe Stabilität (besonders werden VLF-Wellen wegen ihrer Phasenstabilität zur Übertragung von Standardfrequenzen benutzt) und ihr hohes Rauschen (namentlich für Frequenzen in der Nähe von 10 kHz). Die letzte Eigenschaft zwingt zur Benutzung eines engen Frequenzbandes. Weiter ist die Dämpfung am grössten für die LF-Wellen, während die Ausbreitungsbedingungen im allgemeinen für VL und ELF als sehr gut betrachtet werden können. Deshalb werden lange Wellen besonders für die folgenden praktischen Zwecke verwendet:

a) Kommunikation mit Telegraphie über grosse Entfernungen.

b) Navigationssysteme mit Trägerwellen (zum Beispiel Decca und Loran). Ausserdem können die LF-Wellen noch für den Rundfunk verwendet werden.

Die erwähnten Eigenschaften können schon durch die elementare Theorie der Ionosphäre (kaltes Plasma mit stillstehenden Ionen) erklärt werden. Diese Theorie wird bei Vernachlässigung des Erdmagnetfeldes durch die Formeln (mks-Einheiten)

$$n^2 = \frac{\epsilon + i\sigma/\omega}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega(\omega + i\nu)}$$
$$\epsilon_{rel} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 + \nu^2}$$
$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\omega_{p1}^2 \nu}{\omega^2 + \nu^2} \sim \frac{\omega_{p1}^2}{\nu}$$

gekennzeichnet.

Man schliesst daraus auf eine Brechung, die beim Eindringen in die Ionosphäre viel stärker ist als für die kurzen Wellen, sowie auf eine verhältnismässig hohe Leitfähigkeit. Erstgenannter Umstand bedingt eine geringe Wirkung ionosphärischer Störungen, daher geringer Schwund oder hohe Stabilität, während letztgenannter Umstand die günstige Ausbreitung zur Folge hat.

Der Einfluss des Erdmagnetfeldes beschränkt sich auf eine unwesentliche Korrektur, wenn es sich um die Fortpflanzung längs der Ionosphäre handelt; dabei verhält sich der Zwischenraum zwischen Erde und Ionosphäre wie ein Wellenleiter. Dagegen wird die Rolle des Magnetfeldes

<sup>1</sup> Nach einem Vortrag, gehalten anlässlich des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Instituten für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern

entscheidend, wenn letzterer beinahe eine Durchsichtigkeit des Mediums (imaginärer Teil des Brechungskoeffizienten sehr gering) zur Folge hat; dies ist der Fall in der Exosphäre bei der Fortpflanzung der «Whistlers» sowie bei hydrodynamischen Erscheinungen (Alfven-Wellen), verbunden mit Frequenzen in der Grössenordnung von 1 Hz.

## 2. Ausbreitungstheorie bei Vernachlässigung des Erdmagnetfeldes und der Erdkrümmung

In einer vereinfachten Darstellung wird die Ionosphäre, wegen der geringen Eindringtiefe, als homogen und scharf begrenzt angenommen. Man wird dabei entweder nach dem geometrisch-optischen Verfahren oder nach dem der Eigenschwingungen («Modes») vorgehen. Der Zusammenhang beider Methoden kann bei Vernachlässigung der Erdkrümmung wie folgt deutlich gemacht werden.

Ein kurzer vertikaler Dipol (Hertzscher Dipol der Länge  $L$ ; Strom  $I$ , Frequenz  $\omega$ ) befinde sich auf der Erdoberfläche ( $z = 0$ ) im Ursprung des Koordinatensystems (mit den Zylinderkoordinaten  $\varrho$  und  $z$ ). Gemäss den Formeln

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \nabla \times \nabla \times (\Pi \mathbf{u}_z) \quad \mathbf{H} = \nabla \times (\Pi \mathbf{u}_z)$$

kann das Feld im Zwischenraum zwischen Erde und Ionosphäre aus dem vertikalen Hertzschen Vektor  $\Pi \mathbf{u}_z$  ( $\mathbf{u}_z =$  Einheitsvektor in der vertikalen Richtung) berechnet werden. Die Amplitude  $\Pi$  dieses Vektors ist bei Abwesenheit der Ionosphäre oberhalb der Erdoberfläche ( $z > 0$ ) gegeben durch

$$\Pi_{pr} = \frac{iL}{8\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty + i0}^{\infty} d\mu \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2}} H_0^{(1)}(\mu \varrho) e^{-\sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2} z} (1 + R(\mu))$$

worin  $R(\mu)$  der Reflektionskoeffizient an der Erdoberfläche für eine einzelne Zylinderwelle  $H_0^{(1)}(\mu \varrho) \exp(-\sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2} z)$  darstellt (die Zahl  $\sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2} = -i \sqrt{\omega^2/c^2 - \mu^2}$  in oder auf dem Rande des ersten Quadranten der komplexen Ebene). Diese primäre Welle wird weiter abwechselnd an der Ionosphäre und an der Erdoberfläche reflektiert. Die Amplitude der dabei neu gebildeten Welle wird jedesmal gefunden durch Multiplikation der einfallenden Welle mit dem entsprechenden Reflektionskoeffizienten,  $R(\mu)$  für die Erde und  $T(\mu)$  für die Ionosphäre. Diese Koeffizienten kann man entweder als Fresnelsche Koeffizienten oder aus einer vereinfachten Randbedingung berechnen. (In der Praxis ist  $R \sim 1$ , während  $T$  auch bis in der Nähe von  $-1$  vorkommen kann.) Die Beträge der Einzelwellen bilden eine geometrische Reihe, die bei Summierung das folgende Integral ergibt:

$$\Pi = \frac{iLe^{-i\omega t}}{8\pi} \cdot \int_{-\infty + i0}^{\infty} d\mu \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2}} H_0^{(1)}(\mu \varrho) \frac{1 + R(\mu)}{1 - R(\mu) T(\mu) e^{-2h \sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2}}} \cdot \left\{ e^{-z \sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2}} + T(\mu) e^{(z-2h) \sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2}} \right\}$$

worin  $h$  die Höhe der Ionosphäre über der Erde ist.

Dieser allgemeine Ausdruck umfasst einerseits die geometrisch-optische Darstellung (abzuleiten, indem man den umgekehrten Nenner rückwärts wiederum in eine geometrische Reihe auflöst und nachher auf jedes Glied eine Sattelpunktnäherung anwendet), aber andererseits die Entwicklung nach Modes. Letztere bekommt man durch Schliessung des Integrationsweges entlang der oberen Hälfte des unendlichen Kreises in der  $\mu$ -Ebene und nachheriger Reduktion auf die Residuen in den Polen des Integranden, das heisst in den Nullstellen  $\mu_1$  der Gleichung:

$$1 - R(\mu) T(\mu) e^{-2h \sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2}} = 0 \quad (2)$$

Die Variable  $\mu = (\omega/c) \sin \tau$  (wobei  $\sqrt{\mu^2 - \omega^2/c^2} = -i \omega \cos \tau/c$ ) bestimmt, der asymptotischen Näherung der Zylinderwellen gemäss, den Einfallswinkel  $\tau$  dieser Welle bezüglich der Vertikale. Aus diesem Grunde kann man (2), oder auch

$$R(\mu) T(\mu) e^{2i(\omega/c) h \cos \tau} = 1 \quad (3)$$

als die Bedingung für eine Richtungsquantisierung auffassen, wobei jedes  $\mu_1$  einer speziellen komplexen Richtung entspricht. Die Deutung von (3) als Resonanzbedingung ist vielleicht noch anschaulicher; letztere ergibt sich dadurch, dass eine ebene in der  $\tau$ -Richtung sich fortpflanzende Welle nach Reflektion an der Erde und an der Ionosphäre eine neue Welle bilden soll, deren Wellenflächen mit denen der ursprünglichen Welle identisch sein sollen. Diese Auffassung ist besonders klar im Falle unendlich leitender Erde und Ionosphäre ( $R = T = 1$ ), weil die Gleichung sich dann reduziert auf

$$2(\omega/c) h \cos \tau = 2\pi l \quad (l \text{ ganz}) \quad (4)$$

$$\text{oder } 2h \cos \tau = l \lambda \quad (4a)$$

Diese Gleichung bedeutet einfach, dass die Weglängendifferenzen einer die Erdoberfläche verlassenden Welle und der entsprechenden reflektierten Wellen (die scheinbar von einer Reihe Bildquellen in den Höhen  $\pm 2h, \pm 4h, \pm 6h \dots$  herrühren) eine ganze Zahl von Wellenlängen betragen soll, Wir weisen noch darauf hin, dass bei vorgegebener Richtung der Welle (die bei Berücksichtigung der Erdkrümmung wegen der Eindeutigkeit der Lösung nur diskrete Werte haben kann) eine mit (2) oder (3) gleichwertige Gleichung Eigenfrequenzen  $\omega$  bestimmt (siehe 5.).

### 3. Weitere Betrachtungen der Modes bei Vernachlässigung des Erdmagnetfeldes

Ohne Erdkrümmung werden die einzelnen Modes durch die Funktionen

$$H_0^{(1)}(\mu_1 \varrho) e^{\mp Z \sqrt{\mu_1^2 - \omega^2/c^2} - i\omega t} = H_0^{(1)}(\mu_1 \varrho) e^{\pm iz \sqrt{\omega^2/c^2 - \mu_1^2} - i\omega t} \quad (5)$$

beschrieben, die eine sich aufwärts oder abwärts bewegende Welle darstellen. Jede dieser Modes ist gekennzeichnet als eine Welle, die bei der Fortpflanzung durch den Wellenleiter zwischen Erde und Ionosphäre ihre Amplitudenverteilung in den Flächen senkrecht zur Fortpflanzung ( $\varrho = \text{konstant}$ ) beibehält; ihre Dämpfung in der Fortpflanzungsrichtung wird nach der asymptotischen Näherung der *Hankel*-Funktion durch die Exponentialfunktion  $\exp(-\text{Im } \mu_1 \cdot \varrho)$  festgelegt.

Bei Berücksichtigung der Erdkrümmung bekommt man statt des Integrals (1) eine unendliche Reihe *Legendre*-Polynome. Der Übergang zu den entsprechenden Modes kommt dabei durch Anwendung einer *Watson*-Transformation zustande. Die Modes werden dann schliesslich durch die Funktionen

$$P_{\nu_1}[\cos(\pi - \Theta)] \cdot \zeta_{\nu_1}^{(1)}(\omega r/c) e^{-i\omega t} \quad (5a)$$

gegeben, dass heisst durch das Produkt einer Kugelfunktion komplexer Ordnung  $\nu_1$  (mit  $\Theta = \text{Winkelabstand}$  gemessen vom Erdmittelpunkt,  $r = \text{Abstand}$  zu diesem Punkt) und einer sphärischen *Hankel*-Funktion

$$\zeta_{\nu_1}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{\nu_1 + \frac{1}{2}}^{(1)}(z)$$

weil  $\nu_1 \sim a \mu_1$ .

Die Berechnung des Feldes mit Hilfe von Modes kann man auch unmittelbar durchführen, indem man die bekannte rechte Seite der Wellengleichung, die den Einfluss der vorgegebenen Quelle (beispielsweise eine *Deltafunktion* für einen *Hertz*schen Dipolsender) beschreibt, nach den vollständig orthogonalen mit den Randbedingungen zusammenhängenden Modes entwickelt; die Parameter  $\nu_1$  sollen dann aus der Verallgemeinerung der Gleichung (2) für sphärische Symmetrie bestimmt werden.

Die Darstellung in Modes (wir denken uns diese numeriert gemäss  $\text{Im } \nu_0 < \text{Im } \nu_1 < \text{Im } \nu_2 < \text{Im } \nu_3 \dots$ ) ist besonders bequem für grössere Abstände, weil dabei bald die erste Mode vorherrschen wird. Dies wird besonders klar bei Betrachtung des Grenzfalles von unendlich leitender, nicht gekrümmter Erde und Ionosphäre, wo die Parameter  $\mu_1$  aus (4a) bestimmt werden sollen; die Lösung lautet dann:

$$\mu_1 = \frac{\omega}{c} \sin \tau_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4h^2} |^2} \quad (6)$$

Auf diese Weise ergibt sich, dass die ganzen Zahlen für die  $l < \frac{2h}{\lambda}$  zu ungedämpften Modes (trapped modes)

führen, während die übrigen Modes sogar in diesem Grenzfall gedämpft sind. Wenn aber  $\lambda > 2h$ , bleibt nur eine einzige ungedämpfte Mode ( $l = 0$ ) übrig, die also völlig vorherrschen wird. Bei endlicher Leitfähigkeit der Erde und Ionosphäre, und unter Berücksichtigung ihrer Krümmungen, werden zwar alle Modes gedämpft, doch jene, die bei verschwindender Leitfähigkeit in die obige  $l = 0$ -Mode übergeht, wird bei zunehmendem Abstand noch immer dominieren. Dies ist klar, wenn man (6) in erster Näherung für endliche Leitfähigkeiten korrigiert. Der entsprechende Ausdruck, nämlich

$$\mu_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 |^2}{4h^2}} + \sqrt{\frac{\pi c \varepsilon_0}{2}} \frac{j_1 e^{i\pi/4}}{h \sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 |^2}{4h^2}}} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_e}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right) \quad (6a)$$

( $j_1 = 1$  für  $l = 0$  und  $j_1 = 2$  für  $l > 0$ ;  $\varepsilon_0, \sigma_e, \sigma_i$  die Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes und die Leitfähigkeiten der Erde und der Ionosphäre), ist gültig unter der Bedingung

$$Z = h \sqrt{c} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_e}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right) \ll 1$$

die das ELF-Frequenzgebiet umfasst. Die Dämpfung der betreffenden Modes bei zunehmendem Abstand  $d$  ist dann immer, dem Exponentialfaktor  $\exp(-\text{Im } \mu_1 d)$  gemäss, am geringsten für die  $l = 0$ -Mode. Die Unabhängigkeit von (6a) von der Erdkrümmung ist eine Folge des steilen Einfallswinkels  $\tau_1$  für die in Betrachtung kommenden Modes.

Berechnungen von *Wait* und *Liebermann* zeigen, dass für die längeren Wellen, für die der Parameter  $Z$  mindestens von der Grössenordnung 1 ist, die Verhältnisse komplizierter werden, indem die Grösse  $(h/a) \text{Im } \mu_1$  und deshalb auch die Dämpfung bei zunehmendem  $Z$  nacheinander ein Maximum und ein Minimum passiert. Die Dämpfung, die dann nicht mehr monoton mit  $l$  zunimmt, wird dabei besonders auffallend für  $l = 1$ . Diese Erscheinung hängt mit der Annäherung des Einfallswinkels dieser Mode zu dem pseudo *Brewster*-Winkel der Erdoberfläche zusammen; dies hat ein Weglecken von Energie zu der Erde zur Folge.

Zusammenfassend findet man, dass im allgemeinen die Betrachtung weniger Modes ausreicht. Empirisch wird bestätigt, dass die Aufspaltung in geometrisch-optische Beiträge eine viel geringere Rolle spielt. Man beobachtet keine besondere Abnahme des Feldes in dem Abstand, der dem Horizont für den einmal geometrisch-optisch an der Ionosphäre reflektierten Strahl (one-hop transmission) entspricht (etwa 2000 km). Nur für sehr kurze Abstände haben die Amplituden der verschiedenen Modes dieselbe Grössen-

ordnung, man kann dann das Feld bequemer in wenige geometrisch-optische Strahlen aufspalten; der ionosphärische Reflektionskoeffizient nimmt stark ab für die Strahlen höherer Ordnung, weil diese einen steileren Einfallswinkel haben. Für die Kurzwellen wird dagegen noch für sehr grosse Abstände die geometrisch-optische Darstellung schneller konvergieren als die Entwicklung nach Modes.

#### 4. Die Schumann Mode. Die Austinsche Ausbreitungsförmel

Die vorerwähnte Mode  $l = 0$  ist wegen ihrer geringen Dämpfung vorherrschend für Frequenzen unter etwa 10 kHz. Der Dämpfungsfaktor  $\exp(-\text{Im } \mu_0 d)$  wird hier nach (6a):

$$e^{-\frac{d}{2h} \sqrt{\frac{\pi c \epsilon_0}{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_e}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right)}} \quad (7)$$

Man hat hier angenähert mit einer TEM-Mode zu tun, indem das zugehörige elektrische Feld fast vertikal und deshalb, wie das magnetische Feld, beinahe senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gerichtet ist. Dies macht es verständlich, dass diese Mode besonders durch Blitzentladungen erregt werden kann. Weil ausserdem  $\mu_0 \approx 2\pi/\lambda = \omega/c$ , ist das Feld nach (5) in den Ebenen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ungefähr homogen. Diese einfache Beschaffenheit lässt die Existenz dieser vor allem von Schumann untersuchte Mode wie folgt elementar verstehen:

Im Winkelabstand  $\theta = d/a$  ( $a = \text{Erdradius}$ ) von der Quelle hat der Zwischenraum zwischen Erde und Ionosphäre einen Querschnitt  $O_\perp = 2\pi a \sin \theta h$ . Der totale Energiestrom durch ihn beträgt dort also  $W = (PO_\perp)$ , wenn  $P$  die Länge des mittleren Poyntingvektors ist. Während der Fortpflanzung geht ein Teil dieser Energie verloren durch Einströmen in die Erde und in die Ionosphäre. Die dabei in einem Winkelabschnitt  $d\theta$  wirksame Oberfläche  $dO$ , die für die Erde und die Ionosphäre ungefähr gleich ist (wegen  $h \ll a$ ), wird gefunden, wenn man das zugehörige Volumenelement

$$dV = O_\perp \cdot a d\theta = h \cdot dO$$

des Zwischenraumes betrachtet; man hat daher:

$$\frac{dO}{O_\perp} = \frac{a}{h} d\theta$$

Wenn zunächst  $P_e$  und  $P_i$  die senkrecht zu  $dO$  in die Erde und in die Ionosphäre hinweisende Poyntingsvektoren darstellen, bekommt man die nachfolgende Energiebilanz:

$$dW = -(P_e + P_i) dO$$

woraus man weiter findet:

$$\frac{dW}{W} = -\frac{(P_e + P_i)}{P} \frac{dO}{O_\perp}$$

oder

$$\frac{dW}{W} = -\frac{(P_e + P_i)}{P} \frac{a}{h} d\theta \quad (8)$$

Nach der allgemeinen *Maxwell*schen Theorie ist der Poyntingvektor bei gegebenem Magnetfeld proportional zu  $\text{Re}(n^{-1})$  ( $n = \text{Brechungskoeffizient}$ ). Weil das horizontale Magnetfeld beim Eindringen in die Erde und Ionosphäre stetig ist, findet man also

$$\frac{P_e + P_i}{P} = \text{Re} \left( \frac{1}{n_e} + \frac{1}{n_i} \right) \quad (9)$$

wenn  $n_e$  und  $n_i$  die betreffenden Brechungskoeffizienten bezüglich des leeren Raumes sind. Angenähert gilt (in mks-Einheiten):

$$\text{Re} \frac{1}{n_e} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma_e}} = \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 c}{\lambda \sigma_e}} \quad \text{Re} \frac{1}{n_i} = \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 c}{\lambda \sigma_i}}$$

so dass Integration von (8) durch (9) wegen  $\theta = d/a$  ergibt:

$$W = W_0 e^{-\frac{d}{h} \sqrt{\frac{\pi c \epsilon_0}{\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_e}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \right)}}$$

Dieses Resultat stimmt mit (7) überein, weil der Energiestrom dem Quadrat der Feldamplitude proportional ist, so dass für letztere die exponentielle Dämpfung zweimal kleiner ist.

Die durch (7) bedingte Abhängigkeit der exponentiellen Dämpfung von der Wellenlänge wurde schon 1911 in eine empirische Formel von *Austin-Cohen* gefasst (kombiniert mit einer Proportionalität zu  $(\theta/\sin \theta)^{1/2}$ ). Dagegen ergibt die Beugungstheorie in Abwesenheit der Ionosphäre eine exponentielle Dämpfung proportional zu  $\lambda^{-1/2}$  statt  $\lambda^{-1}$ . Für Frequenzen in der Nähe von 20 kHz hat die empirisch gefundene Dämpfung eine Grössenordnung von 13 dB je 1000 km (in der Nacht niedriger als am Tage).

#### 5. Die Eigenschwingungen des Zwischenraumes zwischen Erde und Ionosphäre

Weil sich die Schumann-Mode für sehr lange Wellen fast ungedämpft bis um die ganze Erde herum fortpflanzen kann, erfordert eine genaue Theorie die Berücksichtigung der Erdkrümmung. Die Abstandsabhängigkeit wird dann nach (5a) durch die Kugelfunktion  $P_{\nu_0} \{ \cos(\pi - \theta) \}$  gegeben, die nach der Theorie dieser Funktion auch dem Ausdruck

$$-\frac{\sin(\pi \nu_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1) - \nu_0(\nu_0+1)} P_n(\cos \theta)$$

gleichgesetzt werden kann; weiter ist  $\nu_0$  wegen der Erdkrümmung in erster Näherung nicht durch  $\nu_0 \sim a\mu_0 = 2\pi a/\lambda$  gegeben, sondern soll durch die Gleichung

$$\nu_0 (\nu_0 + 1) = 4\pi^2 a^2 / \lambda^2 \quad (10)$$

bestimmt werden. Die Amplitude  $E_0$  der entsprechenden elektrischen Feldstärke kann dann auf der Erdoberfläche, im Falle eines vertikalen Dipolenders (auch auf der Erde) mit der Trägerfrequenz  $\omega$ , durch die Reihe

$$E_0 = \frac{I L e^{-i\omega t}}{i \omega h^2 C} \nu_0 (\nu_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1) - \nu_0(\nu_0+1)} P_n(\cos \Theta) \quad (11)$$

dargestellt werden, worin sich die Konstante  $C = 4\pi\epsilon_0 a^2 / h$  als die Kapazität eines dünnen Kugelkondensators erkennen lässt; dieser Kondensator wird hier von dem Zwischenraum zwischen Erde und Ionosphäre gebildet.

Diese Reihe wurde von Schumann direkt, ohne Modetheorie, als Lösung der Maxwell'schen Gleichungen erkannt. Sie ist besonders wichtig, weil sie massgebend für die Ausbreitung von den Störungen um die Erde ist, die fast ständig von Blitzeinschlägen, zumal in tropischen Gegenden, erregt werden. Wenn man aber einen einzelnen Blitzschlag durch einen Stromstoss  $I_0 \delta(t)$  statt des stetigen Stromes  $I e^{-i\omega t}$  idealisiert, soll man dessen Feld durch eine Laplace-Transformation von (11) bezüglich der Zeit bestimmen, dabei sich überlegend, dass nach (10):

$$\nu_0 (\nu_0 + 1) = a^2 \omega^2 / c^2$$

zu setzen ist. In dieser Weise bekommt man für den Blitzeffekt im Grenzfall unendlich leitender Erde und Atmosphäre:

$$E_0 = \frac{I_0 L}{h^2 C} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \Theta) \cos(\omega_{n0} t) \quad (12)$$

worin  $\omega_{n0} = 2\pi f_{n0} = (c/a) \sqrt{n(n+1)}$  offenbar eine Eigenfrequenz  $f_{n0}$  bestimmt, deren Eigenfunktion eine Abstandsabhängigkeit gemäss  $P_n(\cos \Theta)$  hat. Das erste Glied  $n=0$  (mit  $\omega_0 = 0$ ) beschreibt eine statische Aufladung des Kondensators; die niedrigsten Eigenfrequenzen verknüpft mit den beiden nächsten Gliedern haben die numerischen Werte  $f_{10} = 10,6$  Hz;  $f_{20} = 18,3$  Hz.

Bei Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit der Ionosphäre werden diese Eigenfrequenzen gedämpft und in erster Näherung gegeben durch

$$\omega_n = \omega_{n0} \left( 1 - \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{2^{3/2} h \sqrt{\sigma_1 \omega_{n0}}} \right) - \frac{ic}{2^{3/2} h} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega_{n0}}{\sigma_1}}$$

während dementsprechend in (12)  $\cos(\omega_{n0} t)$  durch  $\cos(\text{Re} \omega_n t) e^{-\text{Im} \omega_n t}$  zu ersetzen ist. Die Dämpfung führt zu einem kontinuierlichen Spektrum.

Vorstehende Theorie lässt die Rauscherscheinungen im Frequenzgebiet zwischen etwa 1 und 50 Hz auf Gewittererscheinungen zurückführen. Die Eigenfrequenzen können mit magnetischen Antennen als Maxima im Rauschspektrum erkannt werden. Die täglichen Änderungen stehen mit der

Gewitteraktivität in Asien, Afrika und Amerika im Zusammenhang. Der Einfluss der Ionosphäre zeigt sich unmittelbar während Eklipsen durch ein verstärktes Signal. Beobachtungen stammen von *Balser* und *Wagner* (1962), während *Madden* und *Thompson* die Theorie für örtliche Abweichungen in der Atmosphäre angepasst haben. Die Theorie wurde auch für den komplizierteren Fall eines horizontalen Dipols sowie mit Berücksichtigung des Erdmagnetfeldes durchgeführt.

## 6. Schwunderscheinungen im ELF-Frequenzgebiet

Wie erwähnt, ist eine gewisse Stabilität charakteristisch für alle langen Wellen. Man hat regelmässig beobachtet, dass für eine gegebene Übertragung eine allmähliche Phasenänderung eine halbe Stunde vor Sonnenaufgang am Ostende einsetzt und bis zum Sonnenuntergang im Westende der Verbindung dauert; am Abend wird diese Änderung wieder aufgehoben. Diese Änderung kann als eine Verkleinerung  $\Delta h$  der effektiven Höhe der Ionosphäre tagsüber gedeutet werden, wobei  $\Delta h$  von der Grössenordnung 20 km sein kann. Grosse Phasenschwankungen kommen auch vor nach Sonneneruptionen und während «fade-outs».

Starke Amplitudenschwankungen werden besonders in kurzen Abständen beobachtet und können durch Interferenz der Grundwelle mit der einmal an der Ionosphäre reflektierten Welle erklärt werden. Man hat ausserdem eine Änderung der Polarisierung mit zunehmendem Abstände festgestellt, mit einer Neigung zur linearen Polarisierung in grösseren und einer zirkularen in kleineren Abständen.

## 7. Erscheinungen in ELF-Gebiet, bei denen das Erdmagnetfeld wesentlich ist

Die Rolle des Erdmagnetfeldes ist besonders wichtig in dem Spektralgebiet, das sich für noch längere Wellen dem ELF-Gebiet anschliesst; man hat dann mit hydromagnetischen Wellen in der Exosphäre zu tun. Dieselben schwingen wie eine gespannte Saite als Folge von Pulsationen des Erdmagnetfeldes, die teilweise mit Kraftlinien erklärt werden können.

Für die eigentlichen Radiowellen ist die Hauptrolle des Magnetfeldes, dass es für Frequenzen unter der Plasmafrequenz ( $\omega < \omega_{p1}$ ), die sich sonst nicht durch Ionosphäre und Exosphäre fortpflanzen können, die Möglichkeit eines realen Brechungskoeffizienten schafft. Im einfachsten Falle einer longitudinalen Fortpflanzung (das heisst in der Richtung der Kraftlinien) führt die Theorie zur Existenz von zwei transversalen und zwei longitudinalen Wellen. Die beiden Brechungskoeffizienten  $n_1$  und  $n_2$  der transversalen Wellen werden bei Vernachlässigung der Stösse mit den neutralen Teilchen durch die Formel

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{\omega_{p1e}^2 + \omega_{p1i}^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \quad (13)$$

festgelegt; hierin sind die Plasmafrequenzen  $\omega_{p1e}$  und  $\omega_{p1i}$  der Elektronen und Ionen numerisch in Hz gegeben durch

$$\omega_{p1e} = \frac{e \sqrt{N}}{\sqrt{\epsilon_0} m_e} = 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{N}$$

$$\omega_{p1i} = \frac{e \sqrt{N}}{\sqrt{\epsilon_0} m_i} = 1,31 \cdot 10^3 \sqrt{N}$$

( $N$  = Anzahl der Elektronen und Ionen je  $\text{cm}^3$ ), und die entsprechenden Cyclotronfrequenzen  $\omega_{ce} = e\mu_0 H/m_e$  und  $\omega_{ci} = e\mu_0 H/m_i$  durch

$$\omega_{ce} = 17,6 \text{ H Mc/s} \quad \omega_{ci} = 0,0096 \text{ H Mc/s}$$

( $H$  = Erdmagnetfeld in Gauss  $\sim 0,2$ ). Man schliesst daraus, dass  $n_2$  tatsächlich reell werden kann für die niedrigen Frequenzen  $\omega < \omega_{ce}$  und  $n_1$  für die noch niedrigeren Frequenzen  $\omega < \omega_{ci}$ . Die hier vernachlässigten Stösse sind deshalb wichtig, weil sie bei nicht rein longitudinaler Fortpflanzung eine starke Kopplung zwischen beiden Wellenarten hervorrufen, wenn das Niveau  $\omega = \omega_{pi}$  sich in der Nähe des Niveaus  $\nu = \omega_{ce} \sin^2 \theta / \cos \theta$  befindet ( $\nu$  = Stosszahl/Sekunde,  $\theta$  = Winkel zwischen Magnetfeld und Fortpflanzungsrichtung).

Während im Zähler von (13) immer das erste Glied überwiegt, kann der Nenner im Frequenzgebiet  $\omega_{ci} \ll \omega < \omega_{ce}$  angenähert werden, indem man  $\omega_{ci} = 0$  setzt, und im noch tieferen Frequenzgebiet  $\omega \lesssim \omega_{ci}$ , mittels  $\omega_{ce} = \infty$ . Diese beiden Annäherungen können auch durch  $m_i = \infty$  und  $m_e = 0$  charakterisiert werden, und man spricht von der Radioannäherung beziehungsweise der M(agneto)-H(ydro)-D(ynamischen)-Näherung. In diesem Falle findet man schliesslich

$$n_{1,2}^2 = \frac{n_A^2}{1 \pm \frac{\omega}{\omega_{ci}}}$$

worin  $n_A^2 = Nm_i/(\epsilon_0 B^2)$  mit der Phasengeschwindigkeit  $c \sqrt{\epsilon_0} B / \sqrt{Nm_i}$  verknüpft ist, die als Alfvengeschwindigkeit bekannt ist. Dagegen führt die Radioannäherung zur endgültigen Formel

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{\omega_{p1e}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})}$$

die sich in dem durch

$$\omega \ll \omega_{p1e}^2 / \omega_{ce} \quad (14)$$

charakterisierten Gebiet der Whistlerfrequenzen weiter reduziert auf

$$n_{1,2}^2 = \mp \frac{\omega_{p1e}^2}{\omega \cdot \omega_{ce} \left(1 \pm \frac{\omega}{\omega_{ce}}\right)} \quad (15)$$

## 8. Die Whistlerscheinungen

Im erwähnten Frequenzgebiet (14) kann eine Radiowelle sich nach der Formel (15) mit dem unteren Vorzeichen (ausserordentliche Welle im Sinne der Doppelbrechung) in longitudinaler Richtung ungedämpft mit der Phasengeschwindigkeit

$$V_{ph} = \frac{c}{n_2} = \frac{c \sqrt{\omega(\omega_{ce} - \omega)}}{\omega_{p1e}}$$

längs der Kraftlinien des Erdmagnetfeldes durch die Exosphäre fortpflanzen. Für lokal konzentrierte Störungen ist die entsprechende Geschwindigkeit durch die Gruppengeschwindigkeit

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{d(\omega/V_{ph})} = 2c \frac{\sqrt{\omega(\omega_{ce} - \omega)}^{3/2}}{\omega_{p1e} \omega_{ce}} \quad (16)$$

gegeben.

Die Frequenzabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit erklärt, warum die verschiedenen Frequenzen, die von einer Störung herkommen, einen Beobachtungspunkt nacheinander erreichen, so dass sich die dominierende Tonhöhe  $\omega(t)$  während der kurzen Dauer des beobachteten Signals mit der Zeit  $t$  ändert. Dies gilt besonders für die als Whistlers bekannten pfeifenden Signale mit allmählich abnehmender Tonhöhe, durch die sich die Fortpflanzungserscheinungen entlang erdmagnetischer Kraftlinien erkennen lassen. Ihrer Ursache nach kann man die Whistlerphänomene wie folgt einteilen:

a) Whistlers im engeren Sinn: Sie werden Gewittererscheinungen zugeschrieben, die in dem zum Beobachtungspunkt konjugierten Punkt (relativ zum magnetischen Äquator) auf der anderen Halbkugel vorkommen. Das VLF-Spektrum der vom Gewitter erregten Störungen erreicht dabei den Beobachtungspunkt entweder direkt, entlang der beide Punkte verbindenden erdmagnetischen Kraftlinie, oder nachdem das Signal einige Male längs derselben hin und her gelaufen ist. Die Wahrnehmbarkeit erfordert aber, dass die durchschnittliche Elektronendichte längs der betreffenden Kraftlinie hoch genug ist, damit sie ein als Leiter wirksames Medium hervorrufen kann. Dies erklärt, weshalb durch Langwellensender künstlich erzeugte Whistlers nicht immer im konjugierten Punkt beobachtet werden können. Ausserdem wirkt der im allgemeinen anwesende Gradient der Elektronendichte senkrecht zu den Kraftlinien günstig auf das Überwinden der Krümmungseffekte der Kraftlinien.

Numerisch wird die Laufzeit entlang der Kraftlinie für jede Frequenz durch das Integral  $\int ds/v_{gr}$  längs der Kraftlinien bestimmt. Weil  $v_{gr}$  nach (16) maximal ist für  $\omega = \omega_{ce}/4$ , kann die am Anfang des Whistlers beobachtete Frequenz mit  $\omega_{ce}/4$  für den höchsten Bahnpunkt (des-

sen Umgebung für die totale Laufzeit massgebend ist) identifiziert werden und demgemäss Auskunft über das dortige Erdmagnetfeld erteilen. Nach Empfang dieser ersten Frequenz sind später oft gleichzeitig zwei Frequenzen beobachtbar, im Einklang mit beiden  $\omega$ -Werten, die gemäss (16) zur selben Gruppengeschwindigkeit führen; die entsprechende Form der  $\omega(t)$  Kurve hat die Bezeichnung Noise Whistlers veranlasst.

b) Exosphärische VLF-emissions. Diese Bezeichnung wird zusammenfassend benutzt für alle VLF-Signale, die offenbar aus der höheren Atmosphäre stammen. Jedes für sich wird gekennzeichnet durch seine eigene  $\omega(t)$ -Kurve, die hier sehr verschieden sein können. Für die im Audiogebiet liegenden Frequenzen kann das sogar zu musikalisch klingenden Melodien (dawn chorus) führen. Diese Erscheinungen werden teilweise der Wechselwirkung von vorübergehenden Whistlers, aber sonst der Wechselwirkung von einfallenden Bündeln von Elektronen oder Ionen (wie sie zum Beispiel häufig nach Sonneneruptionen und während magnetischer Stürme vorkommen) mit dem exosphärischen oder ionosphärischen Plasma zugeschrieben. Die betreffende Theorie betrachtet im letzteren Falle das Dispersionsgesetz für das kombinierte Medium von Plasma und Bündel. Wenn letzteres als rein longitudinal mit Geschwindigkeit  $u$  angenommen wird, findet man in der linearisierten Theorie (Radio-Näherung):

$$n^2 = \frac{c^2}{\omega^2} k^2 = 1 - \frac{\omega_{p1e}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} - \frac{\omega_b^2 \left(1 - \frac{ku}{\omega}\right)}{\omega(\omega - ku - \omega_{ce})} \quad (16)$$

für ein Elektronenbündel, während für ein Protonenbündel im letzten Glied  $\omega_{ce}$  durch  $-\omega_{ci}$  ersetzt werden soll;  $\omega_b$  ist die Plasmafrequenz des Bündels.

Die durch (16) bestimmte Dispersionskurve ist näherungsweise aus den beiden einzelnen Zweigen für das Plasma und das Bündel zusammengesetzt und weicht von beiden nur merklich ab in der Nähe der Stellen, wo  $\omega - ku = \omega_{ce}$  für ein Elektronenbündel und  $\omega - ku = -\omega_{ci}$  für ein Protonenbündel ist. Diese Beziehungen stellen die Bedingungen für eine wahrnehmbare Wechselwirkung zwischen Bündel und Plasma dar, so dass die durch diese Wechselwirkung er-

zeugten Frequenzen, bei gegebener Geschwindigkeit  $u$ , durch Elimination von  $k$  aus

$$\frac{c^2}{\omega^2} k^2 = 1 - \frac{\omega_{p1e}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}$$

und  $\omega - ku = \omega_{ce}$  (beziehungsweise  $-\omega_{ci}$ ) gefunden werden. Man erkennt hier eine Cyclotronresonanz, wobei die Korrektur  $-ku$  zu  $\omega$  auf einen Dopplereffekt (Bewegung der Welle relativ zum Bündel) hinweist. Ohne Berücksichtigung des Resonanzeffektes, wobei einfach die Bündelgeschwindigkeit der Phasengeschwindigkeit  $c/n$  gleichgesetzt wird, findet man, dass bei vorgegebener Bündelgeschwindigkeit zwei Frequenzen erregt werden können; jede dieser Frequenzen wird durch diesen Effekt aber weiter in ein Doublet aufgespaltet, dessen beide Komponenten mit einer sich schneller und einer sich langsamer als die Bündelteilchen fortpflanzenden Welle verknüpft sind. Die Theorie kann auch noch korrigiert werden für endliche Temperaturen, wobei gleichzeitig sechs Frequenzen durch ein Teilchenbündel erzeugt werden; das beschriebene Modell eines kalten Plasmas wird aber im allgemeinen genügen.

Bei VLF-emissions wird die endgültige Form der  $\omega(t)$ -Kurve namentlich bestimmt durch die stetige Erzeugung von Wellen während des Zeitintervalls, in dem das betreffende Bündel den dafür günstigen Teil der Exosphäre passiert. Theoretisch würde man im einfachsten Falle – wenn sich das Bündel mit konstanter Geschwindigkeit  $u$  durch ein Gebiet bewegt, in welchem die Elektronendichte  $N$  dem Erdmagnetfeld  $B$  proportional ist – eine einzige zeitunabhängige dominierende Frequenz erwarten. Beim Eindringen in die Ionosphäre wird  $N$  aber viel stärker als  $B$  anwachsen, was ein Steigen der dominierenden Frequenz zur Folge hat. In dieser Weise bekommt man für jeden  $u$ -Wert eine idealisierte  $\omega(t)$ -Kurve. Abweichungen von dieser können sogar zu einem Frequenzband führen. Die theoretische Analyse beobachteter  $\omega(t)$ -Kurven kann Auskunft über die Wechselwirkung zwischen einfallenden Bündeln und dem exosphärischen Plasma verschaffen.

Adresse des Autors: Prof. H. Bremmer, Technische Hochschule, Abt. Elektrotechnik, Eindhoven (Niederlande).