

<b>Zeitschrift:</b>	Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegraфи svizzeri
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe
<b>Band:</b>	46 (1968)
<b>Heft:</b>	7
<b>Artikel:</b>	Ausbreitung und Verstärkung elektromagnetischer Wellen in periodischen Strukturen
<b>Autor:</b>	Schanda, Erwin
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-875666">https://doi.org/10.5169/seals-875666</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ausbreitung und Verstärkung elektromagnetischer Wellen in periodischen Strukturen<sup>1</sup>

Erwin SCHANDA, Bern

538.566  
621.372.2

Zusammenfassung. Es wird nach einer kurzen Darstellung der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung und des Floquetschen Theorems die Ausbreitung einer Welle in einer mit Längsreaktanzen belasteten Leitung und auf einer speziellen Verzögerungsleitung behandelt und das Brillouin-Diagramm für beide Fälle besprochen. Die Verstärkung einer verzögerten Welle durch Wechselwirkung mit einem Elektronenstrahl (Wanderfeldröhre) wird diskutiert. Nach einigen einleitenden Bemerkungen über den parametrischen Verstärker wird das Grundsätzliche der Verstärkung durch periodisch in einer Leitung eingegebene Reaktanzdioden dargestellt. In einer sehr elementaren Einführung zum Prinzip der Quantenverstärkung wird das Thema mit dem Wanderwellen-Maser abgerundet. In einem Anhang werden einige grundsätzliche Fragen zur Verwendung von Laserstrahlung in der Nachrichtenübertragung angeschnitten.

## Propagation et amplification des ondes électromagnétiques dans des structures périodiques

Résumé. Après un bref exposé des solutions de l'équation différentielle de Mathieu et du théorème de Floquet, on traite de la propagation d'une onde sur un conducteur affecté de réactances longitudinales et sur un conducteur spécial à retardement, puis on discute pour les deux cas le diagramme de Brillouin. L'amplification d'une onde retardée par interaction due à un faisceau d'électrons (tube à ondes progressives) est discutée. Après quelques remarques préliminaires sur les amplificateurs paramétriques, on expose le principe de l'amplification par des diodes de réactance insérées périodiquement dans un conducteur. L'article se termine par une introduction très élémentaire au principe de l'amplification quantique, avec mention du maser à ondes progressives. Dans un appendice sont traitées quelques questions en rapport avec l'emploi du rayonnement laser pour la transmission des messages.

## Propagazione e amplificazione delle onde elettromagnetiche nelle strutture periodiche

Riassunto. Dopo una breve rappresentazione della soluzione dell'equazione differenziale di Mathieu e del teorema di Floquet vien trattata dapprima la propagazione d'una onda su una linea con carico a reattanza longitudinale e su d'una particolare linea ritardatrice e vien discusso poi, per i due casi, il diagramma di Brillouin. È indi discussa l'amplificazione d'un'onda ritardata mediante interazione con un fascio d'elettroni (tubo a onde progressive). Dopo alcune osservazioni introduttive sull'amplificatore parametrico è rappresentato il principio base dell'amplificazione tramite diodi a reattanza intercalati periodicamente su una linea. L'articolo, in un'introduzione molto elementare sul principio dell'amplificazione dei quanti, completa il tema con il maser a onda migrante. In appendice si fanno accenni alle questioni di principio inerenti all'amplificazione dei raggi «laser» nella tecnica della trasmissione di informazioni.

## 1. Periodische Leitungsstrukturen

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über lineare periodische Netzwerke ist eine in der Fernmeldetechnik häufig angewendete Methode, die verschiedenen Zielen dienen kann. Solche periodische Strukturen können sein: Filter, pupinierte Kabel zur Verringerung der Wellendämpfung und Verzögerungsleitungen, die zum Beispiel die Wellengeschwindigkeit an die Geschwindigkeit der Elektronen in einem Strahl anzugeleichen oder für eine möglichst lange Wechselwirkung zwischen einem aktiven Medium und der Welle zu dienen haben. Von Brillouin [1] wurde eine zusammenfassende und allgemeine Darstellung der Ausbreitung von Wellen innerhalb periodischer Strukturen gegeben. Es werden dort ausser elektrischen vor allem mechanische Wellen und die Ausbreitungseigenschaften von Wellen im dreidimensionalen Raum studiert. Wir wollen uns hier auf die eindimensionale Ausbreitung elektromagnetischer Wellen beschränken. Für zeitharmonische Schwingungen der Kreisfrequenz  $\omega$  lässt sich die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  formulieren wie

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} n(z) \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

worin  $n(z)$  als der vom Ort  $z$  abhängige Brechungsindex aufgefasst werden kann, jedoch in unserer Betrachtung lediglich eine dimensionslose periodische Funktion der Ortsvariablen  $z$  mit der Periodenlänge  $l$  sein soll. Es ist ferner  $i \frac{\omega}{v} = i \omega / \sqrt{\epsilon \mu_0} = K$  die Wellenzahl. Da der Koeffizient des linearen Gliedes in (1) nicht konstant ist, wird die Lösung einer solchen Wellengleichung nur für spezielle Annahmen möglich sein. Unter der Voraussetzung, dass  $n(z)$  eine allgemeine, aber stückweise differenzierbare periodische Funktion ist, stellt (1) eine Hillsche Differentialgleichung dar. Die Beschränkung von  $n(z)$  auf rein harmonische Funktionen etwa der Form

$$F(z) = \frac{n(z)}{v^2} = a + b \cos \frac{2\pi}{l} z \quad (2)$$

führt auf einen Sonderfall der Hillschen, nämlich die Mathieu-sche Differentialgleichung [2]. Als allgemeine Lösung von (1) mit dem periodischen Koeffizienten (2) wurde von Floquet gefunden [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) = & e^{i\omega t} \left[ \mathbf{D}_1 A\left(\frac{\pi}{l} z\right) e^{\frac{\mu\pi}{l} z} + \right. \\ & \left. + \mathbf{D}_2 A\left(-\frac{\pi}{l} z\right) e^{-\frac{\mu\pi}{l} z} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Lösung stellt eine Superposition zweier in entgegengesetzter Richtung laufender Wellen dar (wenn  $\mu$

<sup>1</sup> Nach einem Vortrag, gehalten anlässlich des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Instituten für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern

nicht rein reell ist), deren Amplituden periodische Funktionen von  $z$  mit der Periodenlänge  $l$  sind. Das Studium des Zusammenhangs zwischen  $\mu$  einerseits und  $a$  und  $b$  anderseits zeigt [1, 2], dass für alle  $a < -b$  mit positivem  $b$  ein reeller oder komplexer Wert für  $\mu$  resultiert, was aperiodisches Abklingen der Feldstärke bzw. gedämpfte Wellenausbreitung bedeutet (Fig. 1). Für  $a > -b$  dagegen wechseln bei anwachsenden  $a$  oder  $b$  Gebiete mit komplexen und rein imaginären Werten von  $\mu$  einander ab. Imaginäres  $\mu$  bedeutet ungedämpfte Wellenausbreitung, und ähnlich wie für die Wellenausbreitung in Hohlrohren ist auch hier bei vernachlässigten Ohmschen Leitungsverlusten die dämpfungsfreie Übertragung die gesuchte Lösung. Im Grenzfall  $b = 0$  wird (1) wieder eine Wellengleichung mit konstantem Koeffizienten, und  $\mu$  wird für alle positiven  $a$  rein imaginär, und die Wellenausbreitung erfolgt ungedämpft.

Die Zusammenhänge werden übersichtlicher, wenn statt der allgemeinen Lösung (3) nur der ortsabhängige Teil einer einzigen Welle angeschrieben wird

$$u(z) = A \left( \frac{\pi}{l} z \right) e^{i \zeta \frac{\pi}{l} z} \quad (4)$$

worin für  $\mu = i\zeta$  eingesetzt wurde, um den imaginären Exponenten für die ungedämpfte Wellenausbreitung explizit aufzuscheinen zu lassen. Da die Funktion  $A \left( \frac{\pi}{l} z \right)$  rein periodisch mit der Periodenlänge  $l$  ist, kann  $u(z)$  durch  $u(z-l)$  dargestellt werden

$$u(z) = e^{i\zeta\pi} u(z-l) = e^{i\beta l} u(z-l) \quad (5)$$

Es soll an dieser Stelle  $\beta = \zeta \frac{\pi}{l}$  eingeführt werden; es bedeutet  $\beta/l$  die Phasenverschiebung zwischen zwei Punkten der Leitung, deren  $z$ -Koordinaten sich genau um eine Perio-

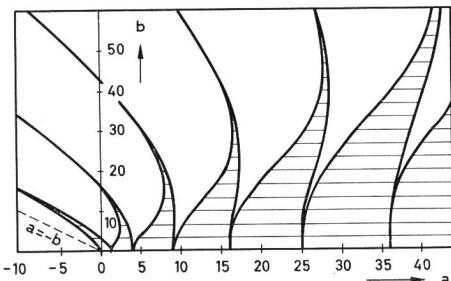


Fig. 1

Stabilitätsdiagramm der Mathieu-Funktionen. Wertepaare  $a$  und  $b$ , die in den schraffierten Bereichen liegen, geben stabile Lösungen (imaginäre Werte für  $\mu$ , d. h. ungedämpfte Wellenausbreitung)

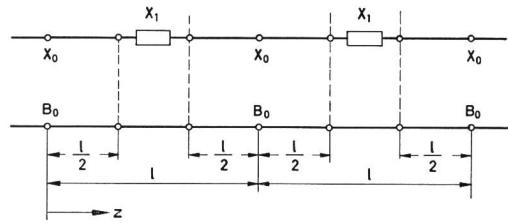


Fig. 2

Periodische Leitungsstruktur. Die homogene Leitung (Charakteristische Impedanz  $\sqrt{X_0/B_0}$ ) ist periodisch (Periodenlänge  $l$ ) mit einer Längsreaktanze  $X_1$  belastet

denlänge  $l$  unterscheiden. (5) stellt den Inhalt des Floquet'schen Theorems dar, das auf elektromagnetische Wellen in periodischen Leitungen angewendet lautet [3]: Für eine stationäre Lösung einer einzelnen fortschreitenden Mode unterscheiden sich die Felder in allen benachbarten Einheitszellen einer periodischen Leitung nur durch einen komplexen Faktor  $\exp(\pm i\beta l)$ .

Die Lösung von (1) für den Fall, dass der periodische Faktor  $F(z)$  nicht eine reine harmonische Funktion ist, aber durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden kann

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{i \frac{2\pi m}{l} z} \quad (6)$$

wird dann ebenfalls statt der einfachen harmonischen Funktionen (3) durch Fourier-Reihen ausgedrückt ([4] Seite 414 und [1] Seite 139)

$$E(z) = e^{i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m e^{i \frac{2\pi m}{l} z} \quad (7)$$

Die einzelnen Summanden der Reihe (7) werden in Analogie zu Fourier-Entwicklungen von nichtharmonischen periodischen Zeitfunktionen, hier Raumharmonische genannt.

Es soll nun am Beispiel einer periodisch mit der Reaktanz  $X_1$  belasteten verlustfreien Leitung (Fig. 2) das Auftreten von Frequenzgebieten mit ungedämpfter Wellenübertragung und dazwischenliegenden Gebieten mit hoher Dämpfung gezeigt werden [1, 5]. Die (konstante) Quersuszeptanz der Leitung je Längeneinheit sei  $iB_0$ , die variierende Längsreaktanze  $iX_1$ ; diejenige der unbelasteten Leitung sei  $iX_0$  und somit deren charakteristische Impedanz  $\sqrt{X_0/B_0}$ . Die Wellengleichung für den Strom lautet dann bekanntlich (harmonische Wellen)

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + X B_0 I = 0 \quad (8)$$

Da  $X$  eine periodische Funktion der Ortskoordinate  $z$  ist, kann der folgende Lösungsansatz für eine fortschreitende Welle (keine Reflexionen) versucht werden

$$I = A(z) e^{i\beta z} \quad (9)$$

Für die Leitungsstücke zwischen den Reaktanzen  $X_1$  sei die Fortpflanzungskonstante jene der unbelasteten Leitung, nämlich  $i\beta_0 = i/\sqrt{X_0 B_0}$ ; daher wird für diese Abschnitte die Wellengleichung

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + \beta_0^2 I = 0 \quad (10)$$

Der Ansatz (9) muss für jede Stelle  $z$  der Leitung richtig sein, also setzen wir ihn in (10) ein

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + 2i\beta \frac{dA}{dz} + (\beta_0^2 - \beta^2) A = 0 \quad (11)$$

Diese neue Differentialgleichung kann mit dem Ansatz

$$A(z) = e^{-i\beta z} (C \cos \beta_0 z + D \sin \beta_0 z) \quad (12)$$

gelöst werden. Die Konstanten  $C$  und  $D$  müssen für die Bestimmung von  $\beta_0$  und  $\beta$  eliminiert werden. Die Bedingung, dass  $A(z)$  periodisch ist ( $A(0) = A(l)$ ), liefert

$$C = e^{-i\beta l} (C \cos \beta_0 l + D \sin \beta_0 l) \quad (13)$$

Mit Hilfe der bekannten Beziehung aus der Leitungstheorie  $dI/dz = -iB_0 V$  und der Tatsache, dass der Spannungsabfall  $V = iX_1 I$  über  $X_1$  bei  $z=0$  die Differenz zwischen  $V(0)$  und  $V(l)$  darstellt ( $V(0) - V(l) = iX_1 I(0) = \frac{i}{B_0} [A'(0) - A'(l)]$ ), erhält man als zweite Randwertgleichung

$$BX_1 C - i\beta C + \beta_0 D = -i\beta e^{-i\beta l} [C \cos \beta_0 l + D \sin \beta_0 l] + \beta_0 e^{-i\beta l} [-C \sin \beta_0 l + D \cos \beta_0 l] \quad (14)$$

Es sind (13) und (14) zwei homogene Gleichungen in den Unbekannten  $C$  und  $D$ , die nur dann eine Lösung haben, wenn die Determinante der Koeffizienten von  $C$  und  $D$  in diesem Gleichungssystem null wird. Nach einer etwas umständlichen Rechnung kann der durch das Nullsetzen dieser Determinante entstehende Ausdruck auf die Form

$$\cos \beta_0 l - \frac{X_1}{2} \sqrt{\frac{B_0}{X_0}} \sin \beta_0 l = \cos \beta l \quad (15)$$

gebracht werden. Es kann  $\beta$  nur dann reell bleiben (ungeämpfte Welle), wenn  $X_1$  reell, also eine reine Reaktanz ist, das heißt entweder  $X_1 = \omega L_1$  oder  $X_1 = -\frac{1}{\omega C_1}$ , wie es auch vorausgesetzt war. Die Gleichung kann nur für diejenigen  $\beta_0 l$  erfüllt werden, für die die linke Seite Werte zwischen -1 und +1 annimmt. Schreibt man  $X_0 = \omega L_0$ ,  $B_0 = \omega C_0$  und  $\beta_0 = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ , so wird der Vorfaktor des zweiten Gliedes in (15) für induktive ( $X_1 = \omega L_1$ ) Längsbelastung  $-\frac{\beta_0 L_1}{2 L_0}$  und

für kapazitive ( $X_1 = -\frac{1}{\omega C_1}$ ) Längsbelastung  $\frac{C_0}{2 \beta_0 C_1}$ . Da  $L_0$  und  $C_0$  beziehungsweise Induktivität und Kapazität je Längeneinheit sind, erweitern wir mit der Periodenlänge, so dass nun aus (15) für induktive Belastung

$$\cos \beta_0 l - \frac{L_1}{2 L_0 l} \cdot \beta_0 l \sin \beta_0 l = \cos \beta l \quad (16)$$

und für kapazitive Belastung

$$\cos \beta_0 l + \frac{C_0 l}{2 C_1} \frac{\sin \beta_0 l}{\beta_0 l} = \cos \beta l \quad (17)$$

wird. In Figur 3 sind die linken Seiten von (16) und (17) als  $f(\beta_0 l)$  über  $\beta_0 l$  für eine spezielle Wahl von  $\frac{C_0}{C_1 l}$  und  $\frac{L_1}{L_0 l}$  aufgetragen.

Gebiete  $\beta_0 l$  für ungedämpfte Wellenübertragung ( $-1 \leq f(\beta_0 l) \leq +1$ ) wechseln ab mit solchen starker Dämpfung. Für grössere  $L_1$  werden die entsprechenden Durchlassgebiete schmäler, für grössere  $C_1$  dagegen werden sie breiter. Man kann daraus wegen  $\beta_0 = \omega \sqrt{L_0 C_0}$  mit konstanten  $L_0$  und  $C_0$  leicht ein  $\omega$ - $\beta$ -Diagramm herleiten, wenn man  $\beta_0 l$  über  $\beta l$  aufträgt. In Figur 4 ist dieser Zusammenhang dargestellt. Man bezeichnet  $\omega$ - $\beta$ -Diagramme für Wellenausbreitungs-vorgänge auf periodischen Strukturen auch als Brillouin-Diagramme. Die Steilheit der Verbindungsstrecke eines Punktes auf einer solchen Kurve mit dem Ursprung stellt ein Mass für die Phasengeschwindigkeit  $v_p = \omega/\beta$  einer Welle dar, die

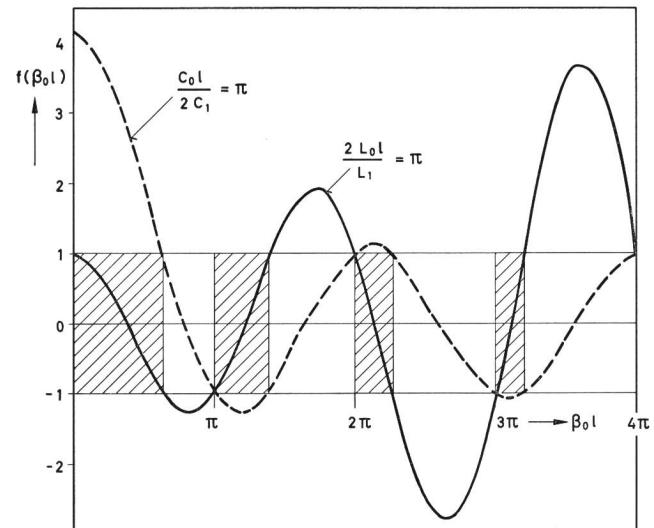


Fig. 3

Die linken Seiten der Formeln (16) und (17) für eine bestimmte Wahl der Parameter. Die schraffierten Gebiete stellen Bereiche von  $\beta_0 l$  dar, in denen die mit Induktivitäten belastete Leitung Durchlässbänder hat, für die dazwischenliegenden Werte von  $\beta_0 l$  ist die kapazitiv belastete Leitung durchlässig

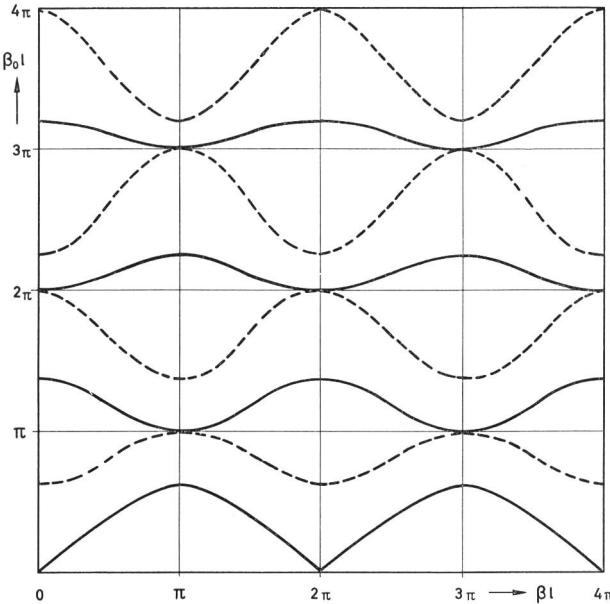


Fig. 4

Brillouin-Diagramm einer mit Längsreaktanzen  $\left(\frac{2L_o}{L_1} = \pi\right)$  auszogene Linien,  $\frac{C_o}{2C_1} = \pi$  strichliert belasteten Leitung. Die Ordinate  $\beta_0 l = \omega / c$  kann als  $\omega$ -Achse aufgefasst werden. Den Perioden der Länge  $2\pi$  auf der Abszisse entsprechen die Definitionsbereiche der einzelnen Raumharmonischen (d. h. der Glieder der Reihe (7)). Die Kurve mit den kleinsten Werten  $\beta_0 l$  wird als Grundwelle, die darüberliegenden als höhere Wellentypen bezeichnet, die sich bei höheren Frequenzen über die periodische Leitung fortpflanzen können

Steilheit der Kurve selbst in einem ihrer Punkte ein Mass für die Gruppengeschwindigkeit ( $v_g = d\omega/d\beta$ ). Man sieht, dass zu positiven Phasengeschwindigkeiten negative Gruppengeschwindigkeiten gehören können. Auf den physikalischen Sinn dieser Situation soll später eingegangen werden. Dieses Diagramm kann man sich für negative  $\beta l$ -Werte durch Spiegelung bei  $\beta l = 0$  fortgesetzt denken.

Wir wollen uns nun der Fortpflanzung eines Wellenfeldes auf einer Verzögerungsleitung zuwenden. Als erstes sei festgehalten, dass die Lösung (7) in die Wellengleichung eingesetzt, diese erfüllen muss. Die elektrische Feldstärke sei, abgesehen von der z-Koordinate (der Fortpflanzungsrichtung) auch noch eine Funktion der Querschnittskoordinaten.

$$\Delta \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} E_m(x, y) e^{-i\beta_m z} \right] - K^2 \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} E_m(x, y) e^{-i\beta_m z} \right] = 0 \quad (18)$$

Es ist hier der Exponent der einzelnen Raumharmonischen zu  $\beta_m z$  zusammengefasst. Wegen der Linearität der Wellen-

gleichung dürfen Summation und Differentiation vertauscht werden.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} [\Delta E_n(x, y) e^{-i\beta_m z} - K^2 E_m(x, y) e^{-i\beta_m z}] = 0 \quad (19)$$

Aus (19) erkennt man: wenn jede Raumharmonische für sich eine Lösung der Wellengleichung ist, dann erfüllt ihre Summe automatisch die Wellengleichung. Dies bedeutet jedoch nicht, dass sich einzelne Raumharmonische auf der Verzögerungsleitung ausbreiten können, denn die Randbedingungen für eine spezielle Struktur können nur von der Gesamtlösung (7) erfüllt werden, die aus unendlich vielen Raumharmonischen besteht. Dies wird besser verständlich anhand einer besonderen Struktur (Fig. 5), die wir einfacheitshalber in y-Richtung unbegrenzt und in z-Richtung unendlich lang oder, was dasselbe ist, links und rechts angepasst abgeschlossen denken, so dass es nur in +z-Richtung laufende Wellen gibt [3]. Vom unteren Leiter ragen infinitesimal dünne leitende Stege bis zur Höhe  $h$ , deren gegenseitiger Abstand die Periodenlänge / der Struktur sei. Wie in Hohlleitern, ist auch in Verzögerungsleitungen die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in vielen Modes möglich. Es soll hier nur der einfachste Wellentyp betrachtet werden. Zwischen den Stegen ist das elektrische Feld wegen der Randbedingung bei  $x = -h$  für die nulite Zelle der Struktur gegeben durch  $E_{z1} = E_1 \sin K(x+h)$  mit der noch zu bestimmenden Konstanten  $E_1$ . Für die N-te Zelle, deren Mitte bei  $z = Nl$  liegt, ist das Feld wegen des Floquetschen Theorems durch

$$E_{z1} = E_1 \sin K(x+h) \cdot e^{-iN\beta l} \quad (20)$$

gegeben. Für den Abschnitt  $x > 0$  der Struktur (Fig. 5) soll vorerst allgemein der Lösungsansatz (7)

$$E_{zz} = \sum_{-\infty}^{\infty} E_{zm}(x) e^{-i\beta_m z} \quad (21)$$

verwendet werden. Die Wellengleichung für die einzelnen Raumharmonischen

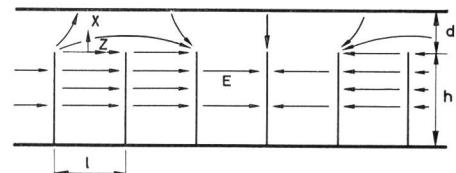


Fig. 5

Verzögerungsleitung für Wellenausbreitung in z-Richtung mit dünnen leitenden Querstegen, deren Abstände  $l$  die Periodenlänge der Struktur sind. Das elektrische Feld der Grundwelle ist schematisch eingezeichnet

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad E_{z_m}(x, y, z) = E_{z_m}(x) \exp(-i\beta_m z) \right)$$

wird

$$\frac{\partial^2 E_{z_m}}{\partial x^2} + (K^2 - \beta_m^2) E_{z_m} = 0 \quad (22)$$

mit der Lösung

$$E_{z_m} = E_{2m} \operatorname{sh} k_m (x - d) \quad (23)$$

bei willkürlichen  $E_{2m}$  und der Abkürzung  $k_m^2 = \beta_m^2 - K^2$ . Die Ansätze (20) für  $x < 0$  und (21) für  $x > 0$  müssen noch bei  $x = 0$  einander angepasst werden. Es wird also

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{2m} \operatorname{sh} k_m d \cdot e^{-i\beta_m z} = E_1 \sin K h \quad (24)$$

für die nullte Zelle ( $N = 0$ ). Wegen des Floquetschen Theorems sind jedoch die Felder in allen Zellen angepasst, wenn sie es in einer einzigen sind, also muss (24) genügen. Durch Ausnutzung der Orthogonalität der Funktion  $e^{i\beta_m z}$

$$+\frac{i}{2} \int_{-\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}} e^{i(\beta_n - \beta_m)z} dz = \int_{-\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}} e^{i\frac{2\pi}{l}(n-m)z} dz = l \delta_{nm} \quad (25)$$

mit dem Kroneckerschen Delta ( $\delta_{nn} = 1$ , alle  $\delta_{nm} = 0$  wenn  $n \neq m$ ) können aus der linken Seite von (24) alle Glieder der Reihe bis auf das n-te eliminiert werden. Wir multiplizieren (24) links und rechts mit  $e^{i\beta_n z}$ , integrieren über die nullte Zelle

$$-\sum E_{2m} \operatorname{sh} k_m d \int_{-\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}} e^{i(\beta_n - \beta_m)z} dz = E_1 \sin K h \int_{-\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}} e^{i\beta_n z} dz \quad (26)$$

und benutzen (25), wodurch wir aus (26) erhalten

$$-E_{2n} l \operatorname{sh} k_n d = E_1 \sin K h \cdot \frac{\sin \frac{\beta_n l}{2}}{\frac{\beta_n}{2}} \quad (27)$$

Aus (27)  $E_{2n}$  in (23) und dies in (21) eingesetzt erhält man die z-Komponente der elektrischen Feldstärke im Abschnitt  $x > 0$  zu

$$E_{z_2} = -E_1 \sin K h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} k_n (x - d)}{\operatorname{sh} k_n d} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_n l}{2}}{\frac{\beta_n l}{2}} \quad (28)$$

Wegen der Unbegrenztheit der Struktur in der y-Richtung wird für den einfachsten Wellentyp in beiden Abschnitten  $E_y = 0$ . Die x-Komponente der elektrischen Feldstärke kann mit Hilfe der Divergenzgleichung der Maxwelltheorie

$\operatorname{div} D = 0$  (die sich hier vereinfacht zu  $\partial E_x / \partial x + \partial E_z / \partial z = 0$ ) für ladungsfreie Räume berechnet werden ([3] S. 281). Es wird also

$$E_x = - \int_0^x \frac{\partial E_z}{\partial z} dx = -i E_1 \sin K h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k_n (x - d)}{\operatorname{sh} k_n d} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_n l}{2}}{\frac{k_n l}{2}} \cdot e^{-i\beta_n z} \quad (29)$$

Damit ist der Feldlinienverlauf vollständig beschrieben. Eine schematische Darstellung davon ist in Figur 5 eingezeichnet. Das Magnetfeld kann aus der zweiten Maxwell-Gleichung berechnet werden, die sich wegen  $E_y = 0$  und  $\partial/\partial y = 0$  reduziert zu

$$i \omega \mu H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (30)$$

und  $H_x = H_z = 0$ . Für den Abschnitt  $x < 0$  ( $E_x = 0$ ) liefert dies

$$H_y = -i \frac{E_1}{\eta} \cos K(x + h) \quad (31)$$

mit dem Wellenwiderstand des freien Raumes  $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

Für den Abschnitt  $x > 0$  liefert (30) mit (28) und (29) für das Magnetfeld [3]

$$H_{y2} = -i \omega \epsilon_0 E_1 \sin K h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k_n (x - d)}{\operatorname{sh} k_n d} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_n l}{2}}{\frac{k_n \beta_n l}{2}} \cdot e^{-i\beta_n z} \quad (32)$$

Nun haben wir durch Gleichsetzen von (31) und (32) für  $x = 0$  die Möglichkeit, die willkürliche Konstante  $E_1$  zu eliminieren und eine Bestimmungsgleichung für die Phasenkonstante des gesamten Feldbildes zu erhalten. Da wegen der Vernachlässigung der Streufelder an den Kanten die berechneten Feldstärken nur näherungsweise gelten, soll die Gleichsetzung nur für die Zellmittnen (zum Beispiel  $z = 0$ ) durchgeführt werden:

$$\frac{\cot K h}{K h} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k_n d}{k_n h} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_n l}{2}}{\frac{\beta_n l}{2}} \quad (33)$$

Diese transzendente Gleichung für die Phasenkonstanten  $\beta_n$  (wenn  $K, l, h, d$  als bekannt vorausgesetzt werden) lässt sich nur numerisch lösen. Weil sich jedes  $\beta_n$  aus  $\beta_0$  durch  $\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{l}$  darstellen lässt, ist (33) die Bestimmungs-

gleichung für die Funktion  $\beta_0(\omega)$  und somit der Schlüssel zum Brillouin-Diagramm des hier behandelten einfachsten Wellentyps der in Figur 5 dargestellten Verzögerungsleitung. In Figur 6 ist dieses Diagramm [3] für die Grundmode (unterste Kurve) und zwei höhere Wellentypen (die beiden darüberliegenden Kurven) für positive Phasengeschwindigkeiten ( $\beta_n > 0$ ) bis und mit der zweiten Raumharmonischen eingetragen. Es ist leicht zu erkennen, dass  $\beta_n(\omega) = \beta_0(\omega) + \frac{2\pi h}{l}$  gilt und die Kurve  $\beta_0(\omega)$  sich für jedes weitere  $n$  wiederholt. Die strichlierte Linie  $\omega/\beta = c$  entspricht der Wellengeschwindigkeit im freien Raum, und man sieht, dass die Phasengeschwindigkeit der Grundmode für alle Raumharmonischen kleiner ist und nach höheren Ordnungen  $n$  wegen  $v_{pn} = \omega/\beta_n$  immer mehr abnimmt. Dagegen ist die Gruppengeschwindigkeit aller Raumharmonischen für eine bestimmte Frequenz gleich, sie kann jedoch positiv oder negativ sein. Das letztere bedeutet, dass eine Welle mit einem bewegten Beobachter (zum Beispiel ein Elektron in einer Wanderfeldröhre) synchron (gleiche Phasengeschwindigkeit) läuft, aber Energie in die entgegengesetzte Richtung transportiert. Dieser Effekt liegt dem Rückwärtswellenoszillator zugrunde. Der Anteil der Raumharmonischen höherer Ordnung am Gesamtfeld nimmt für verschiedene Verzögerungsleitungen verschieden stark ab; für die in Figur 5 dargestellte ist die Abnahme näherungsweise wie  $1/n$ , was beispielsweise aus (28) zu erkennen ist.

Bei höheren Frequenzen treten, wie in Hohlleitern, höhere Wellentypen auf, meistens mehrere gleichzeitig. Für sie gibt es – wenigstens für ihre Grund-Raumharmonischen – Frequenzbereiche mit Phasengeschwindigkeiten  $v_p > c$ . Die einfachste Verzögerungsleitung ist die Wendel; für sie werden die Kurven  $\omega(\beta)$  im Brillouin-Diagramm Geraden [3], also die Gruppengeschwindigkeit unabhängig von  $\beta$ .

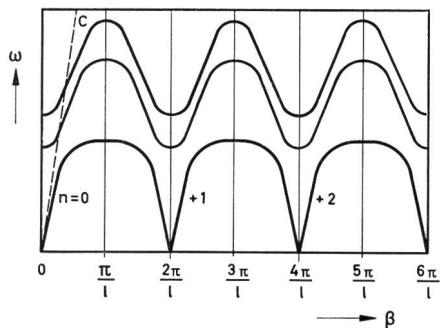


Fig. 6

Brillouin-Diagramm der Verzögerungsleitung von Figur 5 (nach [3]). Die Abschnitte  $n = 0, 1, 2$  usw. mit positiver Gruppengeschwindigkeit sind die Definitionsbereiche der einzelnen Raumharmonischen für eine fortschreitende Welle. Strichliert ist die Geschwindigkeit der freien Welle eingetragen

Wir wollen uns hier mit dieser kurzen Zusammenfassung zur Theorie der Wellenausbreitung in periodischen Strukturen begnügen. Diese Theorie ist nicht nur für die Anwendung auf elektromagnetische Wellen von grosser Bedeutung [6, 7], sondern hat in der quantenmechanischen Erklärung der Energiebänder für die Wellenfunktion der Elektronen in einem Kristallgitter einen grossen Dienst geleistet [5].

## 2. Elektronenstrahl-Wanderwellenverstärker

Es soll in diesem Abschnitt die Wechselwirkung zwischen einer verzögerten elektromagnetischen Welle und einem Elektronenstrahl, der entlang der Verzögerungsleitung mit einer der Raumharmonischen synchron läuft, kurz besprochen werden. Um mit möglichst geringem Rechenaufwand Beziehungen zwischen der Elektronenbewegung und dem Wellenfeld der Verzögerungsleitung – einschliesslich jenem, das durch den Elektronenstrom in der Verzögerungsleitung induziert wird – zu finden, wollen wir uns hier mit einer sehr vereinfachten Betrachtungsweise ([8] S. 144–163) begnügen, die jedoch die physikalischen Zusammenhänge sehr deutlich erscheinen lässt. Für ein gründlicheres Studium dieser Materie sei auf die einschlägige Literatur [3, 8, 9, 10, 11] verwiesen.

Wir wollen zuerst eine Gleichung für den Elektronenstrahl finden, von dem wir in erster Näherung annehmen, dass er nur von der z-Richtung, der Bewegungsrichtung der Elektronen, abhängen soll. Die totale Strahlstromdichte ist gegeben durch

$$\mathbf{j}_{tot} = (\varrho_0 + \varrho) \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}) \approx \varrho_0 \mathbf{v}_0 + \varrho \mathbf{v}_0 + \varrho_0 \mathbf{v} \quad (34)$$

worin  $\varrho_0$  und  $\mathbf{v}_0$  die konstanten Anteile von Elektronendichte und -geschwindigkeit darstellen, während  $\varrho$  und  $\mathbf{v}$  die periodischen Schwankungen dieser Grössen sind. Sie bilden die Wechselkomponente des Strahlstromes. Es sei  $\varrho_0 \gg \varrho$  und  $\mathbf{v}_0 \gg \mathbf{v}$  und somit  $\varrho \mathbf{v}$  in (34) vernachlässigbar. Die Dichte des Wechselstroms im Strahl ist also

$$\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}_0 + \varrho_0 \mathbf{v} \quad (35)$$

Die Vektoren  $\mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{v}$  sollen nur eine z-Komponente haben (keine radialem Ströme) ebenso wie  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{j}_{tot}$ .

Die Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen [12] auf den Strahlstrom angewendet, wird

$$i \omega \varrho + \frac{\delta \mathbf{j}}{\delta z} = 0 \quad (36)$$

wenn die Wechselkomponente eine reine harmonische Schwingung ist. Die Bewegungsgleichung eines Elektrons im elektrischen Feld lautet bekanntlich

$$m \frac{d \mathbf{v}}{d t} = - e \mathbf{E} \quad (37)$$

wobei  $e$  die Elementarladung,  $m$  die Masse und  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  die zeitliche Änderung der Elektronengeschwindigkeit bedeuten. Das totale Differential nach der Zeit in (37) kann durch partielle Differentiale ausgedrückt werden

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (38)$$

so dass man (37) nun schreiben kann

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \quad (37a)$$

und mit unseren Annahmen über Zeit- und Ortsabhängigkeit (die auch für  $\mathbf{E}$  gelten soll), wird dies

$$i\omega v + v_o \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{e}{m} E \quad (39)$$

Aus (36)  $\varrho$  in (35) eingesetzt, liefert

$$v = j/\varrho_o - \frac{i}{\omega} \frac{v_o}{\varrho_o} \frac{\partial j}{\partial z}$$

und dies in (39) verwendet, ergibt

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} + 2i \frac{\omega}{v_o} \frac{\partial j}{\partial z} - \frac{\omega^2}{v_o^2} = i \frac{e \varrho_o}{m v_o} \frac{\omega}{v_o} E \quad (40)$$

Wir führen hier die Phasenkonstante des Strahlstromes

$$\beta_o = \omega/v_o \quad (41)$$

ein. Durch Erweitern der rechten Seite von (40) mit  $v_o$  und dem Strahlquerschnitt  $\sigma$  und geeignetes Zusammenfassen wird das Verhältnis der konstanten Komponenten von Strahlspannung und -strom

$$\frac{V_o}{I_o} = \frac{m v_o^2 / 2 e}{\sigma \varrho_o v_o} = R_o \quad (42)$$

mit der Dimension Ohm. Man bezeichnet (40) als die elektronische oder Strahlgleichung.

Wir wollen nun eine Gleichung für die elektromagnetische Welle auf der Verzögerungsleitung, die sogenannte Systemgleichung, finden. Aus der Kontinuitätsgleichung für die elektrische Erregung ([12], Formel (39)) finden wir durch Anwendung des Divergenzoperators, Integration über ein einfach abgeschlossenes Volumen und Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\oint_F \left[ \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varrho \mathbf{v} \right] dF = 0 \quad (43)$$

Dies bedeutet, dass der gesamte durch eine geschlossene Oberfläche austretende Strom gleich gross wie der durch

sie eintretende ist, wobei der Strom allerdings als Verschiebungsstrom  $j_D = \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  oder als Konvektionsstrom  $j_K = \varrho \mathbf{v}$  der Kombination von beiden aufscheinen kann. Da der Strahlstrom ein Konvektionsstrom bestimmter Grösse ist, muss es einen gleich grossen Verschiebungsstrom durch die geschlossene Oberfläche geben. Abhängig von der Art und Enge des Kontakts zwischen Strahl und Leitung wird letztere mehr oder weniger in den Bereich der Verschiebungsströme kommen, die von der Strahloberfläche ausgehen und im Verzögerungssystem Leitungsströme induzieren können, beziehungsweise werden primäre Leitungsströme über Verschiebungsströme auf den Strahl einwirken können. Es kommt über die Verschiebungsströme zu einer gegenseitigen Kopplung zwischen Strahl und System. Wählt man die geschlossene Oberfläche, über die man nach (43) integriert, so gross, dass sie einen Teil der Verzögerungsleitung noch umschliesst, so muss (43) auch mit Einschluss der Leitungsströme noch gelten. Wir wollen als Integrationsfläche die Oberfläche einer Scheibe aus dem Strahl (Fig. 7) mit der Länge  $dz$  und dem Strahlquerschnitt  $\sigma$  beziehungsweise dem Umfang  $p$  (der nur den Strahl umschliessen soll) annehmen und setzen voraus, dass der Strahlstrom nur in der  $z$ -Richtung fliesst, dagegen der Verschiebungsstrom nur radial (dies ist sicher eine sehr grobe Näherung), so können wir mit (43) den Verschiebungsstrom aus der Änderung des Konvektionsstroms bestimmen

$$j_D p dz = \sigma j_K - \sigma \left( j_K + \frac{\partial j_K}{\partial z} dz \right) = -\sigma \frac{\partial j_K}{\partial z} dz \quad (44)$$

Jedes Strahlelement der Länge  $dz$  wirkt als Generatorelement für den Verschiebungsstrom, also für die Felder der verschiedenen Raumharmonischen und Modes auf der Verzögerungsleitung. Diese induzierten Felder laufen nun vom Punkt ihrer Entstehung aus in beiden Richtungen der Leitung entlang mit den für sie charakteristischen Phasengeschwindigkeiten. Wir wollen uns hier damit begnügen, nur jene Raumharmonische zu betrachten, deren Phasengeschwindigkeit mit der Strahlgeschwindigkeit übereinstimmt.

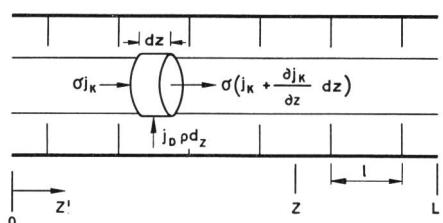


Fig. 7

Elektronenstrahl in einer Verzögerungsleitung. Konvektionsströme sind in Achsrichtung, Verschiebungsströme in radialer Richtung angenommen

stimmt, weil diese mit dem Strahl in dauernder Wechselwirkung steht und daher am stärksten beeinflusst wird. Wenn diese eine Raumharmonische verstärkt wird, wird aber auch die Summe aller Raumharmonischen verstärkt, weil nur sie alle zusammen fähig sind, sich unter Erfüllung der Randbedingungen auf der Verzögerungsleitung auszubreiten. Das Feld der betrachteten Raumharmonischen (Index 1) an einer Stelle  $z$  der Leitung setzt sich aus drei Anteilen zusammen

$$E_1 = E_0 e^{-i\beta_1 z} + \frac{1}{2} \int_0^z A(z') e^{-i\beta_1(z-z')} dz' + \frac{1}{2} \int_z^L A(z') e^{i\beta_1(z-z')} dz' \quad (45)$$

von denen der erste von der ursprünglichen bei  $z = 0$  eingekoppelten Welle stammt, der zweite der zwischen  $z' = 0$  und  $z$  durch Wechselwirkung mit dem Strahl erzeugte und der dritte der zwischen  $z$  und dem Ende der Leitung ( $z' = L$ ) erzeugte, ist. Es ist  $1/2 A(z') dz' = dE_1$ , das durch den Strom, bei  $z'$  auf der Länge  $dz'$  produzierte und nach einer Richtung laufende Wellenfeld und  $\beta_1$  die Phasenkonstante dieser Raumharmonischen. Durch zweimalige Differentiation nach  $z$ , wobei die Differentiationsvariable in den Integrationsgrenzen erscheint, erhält man aus (45) eine Differentialgleichung. Es wird

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} = -\frac{\beta_1^2}{2} \int_0^z A(z') e^{-i\beta_1(z-z')} dz' - \frac{\beta_1^2}{2} \int_z^L A(z') e^{i\beta_1(z-z')} dz' - i\beta_1 A(z)$$

und die beiden noch verbliebenen Integrale sind bis auf die konstante Eingangsfeldstärke  $E_0$  gleich  $E_1$ , also wird, die gesuchte Differentialgleichung (Systemgleichung)

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + \beta_1^2 E_1 = -i\beta_1 A(z) \quad (46)$$

Es soll noch  $A(z) = 2 \frac{dE_1}{dz}$  als Funktion des Strahlstroms

ausgedrückt werden, um die Kopplung zwischen Strahl und System explizit aufzuscheinen zu lassen. Zu diesem Zweck vergleichen wir die Leistungszunahme der Leitungswelle mit der Leistungsabnahme im Strahl. Die Leistung der in positiver  $z$ -Richtung laufenden Welle (Summe aller Raumharmonischen  $E_+ = \sum_n e^{i\beta_n z}$ ) kann angeschrieben werden

als

$$P^+ = \frac{1}{2} \frac{E_+^2}{\beta_1^2 R_K} \quad (47)$$

wobei  $\beta_1$  die Phasenkonstante der mit dem Strahl synchronen Raumharmonischen ist. Die Willkür in der Verwendung von  $\beta_1$ , um dem Zähler von (47) in Ermangelung einer geeigneteren Grösse die Dimension einer Spannung zu verschaffen, wird durch die ebenfalls nicht konkret definierbare Grösse des Kopplungswiderstandes  $R_K$  wieder aufgehoben. Eine analoge Leistung  $P^-$  fließt in die negative  $z$ -Richtung. Die Leistungszunahme der beiden Leitungswellen auf der infinitesimalen Leitungslänge  $dz$  ist

$$dP = \frac{1}{\beta_1^2 R_K} [E_+ dE_+ + E_- dE_-] = \frac{E_+ + E_-}{\beta_1^2 R_K} dE_1 \quad (48)$$

mit der Annahme, dass für beide Wellen je Längenelement  $dz$  ein gleich grosses Wellenfeld  $dE_1$  (wie es bereits eingeführt wurde) produziert wird.

Die Leistungsverlustrate im Strahl bei Anwesenheit eines dem Strahlstrom entgegengerichteten elektrischen Feldes  $E_+ + E_-$  ist, wie man leicht einsieht

$$dP = -\frac{1}{2} (E_+ + E_-) j \sigma dz \quad (49)$$

Durch Gleichsetzen von (48) und (49) ergibt sich

$$\frac{dE_1}{dz} = -\beta_1^2 / 2 \cdot R_K \sigma j \quad (50)$$

Damit kann die Systemgleichung (46) umgeschrieben werden

$$\frac{d^2 E_1}{dz^2} + \beta_1^2 E_1 = i \beta_1^3 R_K \sigma j \quad (51)$$

Es wurde bisher immer davon ausgegangen, dass die einzelnen in die Leitung gekoppelten Beiträge zum Wellenfeld mit der sogenannten kalten (ohne Strahl) Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\frac{\omega}{\beta_1}$  über die Verzögerungsleitung laufen. Die Strahlgleichung (40) und die Systemgleichung (51) sind zwar Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die mit Exponentialfunktionen gelöst werden können, jedoch ist für eine gemeinsame Lösung dieser beiden Gleichungen ein neuer Exponent  $I'$  erforderlich. Setzen wir an

$$j = T e^{-I'z} \quad \text{und} \quad E = Q e^{-I'z} \quad (52)$$

und verwenden dies in den beiden Gleichungen, so wird das Verhältnis von Stromdichte und elektrischem Feld aus der Strahlgleichung (Strahladmittanz)

$$(j/E_1)_{\text{Strahl}} = -i \frac{\beta_e}{2 \sigma R_o (\beta_e + i I')^2} \quad (53)$$

und dasselbe aus der Systemgleichung (Systemadmittanz)

$$(j/E_1)_{\text{System}} = -i \frac{I'^2 + \beta_1^2}{\beta_1^3 \sigma R_K} \quad (54)$$

Für Lösungen beider Gleichungen muss  $\Gamma$  aus der bi-quadratischen Gleichung berechnet werden, die sich durch Gleichsetzen von (53) und (54) ergibt.

$$\frac{\beta_1^2 - (i\Gamma)^2}{\beta_1^3 R_K} = \frac{\beta_e}{2R_o(\beta_e + i\Gamma)^2} \quad (55)$$

Die Lösung dieser Gleichung für  $\Gamma$  wird verdeutlicht durch die gemeinsame graphische Darstellung der linken und der rechten Seite von (55) in Figur 8. Die vier Schnittpunkte der beiden Kurven sind die vier Lösungen für  $i\Gamma$ . Man erkennt, dass zwei davon nahe von  $\beta_e$  und die beiden andern bei  $+\beta_1$  und  $-\beta_1$  liegen. Diese vier Wurzeln sind reell für  $i\Gamma$ , bedeuten also dämpfungsfreie Wellenausbreitung nach dem Ansatz (52), jedoch sicher nicht Dämpfung oder Verstärkung. Wird aber beispielsweise  $\beta_e$  vergrössert bis in die Nähe von  $\beta_1$  (Strahlgeschwindigkeit verkleinert) oder durch Vergrösserung des Strahlstroms der Strahlwiderstand  $R_o$  verkleinert, so wird die Kurve für die Strahladmittanz so weit nach rechts verschoben, dass die beiden rechten Schnittpunkte verschwinden; dann gibt es Wurzeln der Gleichung (55) mit komplexen Werten für  $\Gamma$ . Für eine mehr quantitative Aussage ist die Lösung der Gleichung nötig. Aus (55) erhalten wir durch Ausmultiplizieren mit den Nennern und Einführen eines Gewinnparameters  $C$  in folgender Weise

$$R_K/4R_o = C^3 \quad (56)$$

die Form

$$(\beta_e + i\Gamma)^3 (\beta_e - i\Gamma) = 2\beta_e^4 C^3 \quad (57)$$

Aus der graphischen Darstellung Figur 8 ist bekannt, dass eine Wurzel bei  $-i\Gamma \approx -\beta_1 \approx -\beta_e$  liegt; dafür kann statt (57) näherungsweise

$$(2\beta_e)^2 (\beta_e - i\Gamma) \approx 2\beta_e^4 C^3$$

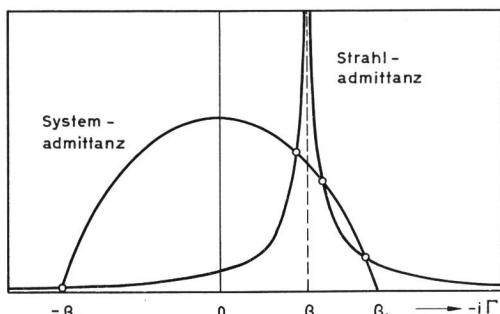


Fig. 8

Strahladmittanz und Systemadmittanz als Funktion von  $-i\Gamma$ . Die Schnittpunkte sind die Lösungen der Gleichung (55)

geschrieben werden mit der (bereits vorweggenommenen) rein imaginären Lösung

$$\Gamma_1 \approx -i\beta_e \quad (58)$$

Die drei anderen Wurzeln liegen nahe von  $-i\Gamma \approx +\beta_e$ , was durch

$$-i\Gamma = \beta_e (1 + iC\delta) \quad (59)$$

ausgedrückt werden soll. Es ist damit  $\delta$  die neue Variable und das Produkt  $C\delta$  sehr klein vorausgesetzt (bei üblichen Wanderfeldröhren liegt  $C$  unterhalb von 0,1 [8]). Aus (57) wird nun näherungsweise

$$(-i\beta_e C \delta)^3 \cdot 2\beta_e \approx 2\beta_e^4 C^3 \quad (60)$$

wovon nach Kürzen von  $2\beta_e^4$  die drei Wurzeln gefunden werden

$$\delta_2 \approx e^{i\pi/2}, \quad \delta_3 \approx e^{-i\pi/6}, \quad \delta_4 \approx e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

die in (59) eingesetzt und in Real- und Imaginärteile aufgespalten die drei Lösungen für die Fortpflanzungskonstante  $\Gamma$  ergeben

$$\Gamma_2 = i\beta_e (1 - C)$$

$$\Gamma_3 = -\beta_e C \frac{\sqrt{3}}{2} + i\beta_e \left(1 + \frac{C}{2}\right) \quad (61)$$

$$\Gamma_4 = \beta_e C \frac{\sqrt{3}}{2} + i\beta_e \left(1 + \frac{C}{2}\right)$$

Eine der vier Fortpflanzungskonstanten in (58) und (61), nämlich  $\Gamma_3$ , liefert eine anwachsende Welle in positiver z-Richtung, deren Verstärkungsmass gleich gross wie das Dämpfungsmass der gedämpften Welle ( $\Gamma_4$ ) ist. Beide haben eine Phasengeschwindigkeit, die nur wenig unter der

Strahlgeschwindigkeit  $\frac{\omega}{\beta_e}$  liegt. Die beiden anderen Lösungen ( $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ ) liefern ungedämpfte Wellen in Rückwärts- und Vorwärtsrichtung, wobei zu beachten ist, dass die letztere wegen  $\Gamma_2 < i\beta_e$  dem Strahl vorausseilt; sie wird auch die schnelle Welle genannt. Die Leistungsverstärkung einer Wanderfeldröhre ist mit  $\Gamma_3$  also

$$\frac{P_{aus}}{P_{ein}} = e \times p \left[ \beta_e L C \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \exp \left( 5,44 C \frac{L}{\lambda} \right) \quad (62)$$

worin  $L$  die Länge der Verzögerungsleitung ist. In Wirklichkeit ist der Gewinn geringer, weil ein Teil der eingekoppelten Leistung  $P_{ein}$  zur Aufrechterhaltung der anderen Wellen verbraucht wird und selbstverständlich eine reelle Verzögerungsleitung Dämpfungsverluste aufweist.

Bei den bisherigen Betrachtungen der Wechselwirkung wurde der wichtige Effekt der Raumladungen vernachlässigt. Durch die dauernde Wechselwirkung zwischen Welle und

Strahl weist der letztere eine Dichtemodulation und die Elektronen in ihm eine Geschwindigkeitsmodulation auf. Die Elektronen wirken wegen der abstossenden Kräfte dieser Dichtemodulation entgegen, indem sie von Orten grösserer Dichte nach solchen kleinerer streben und so zu einer zusätzlichen Schwingung mit der Plasmafrequenz auf dem Strahl Anlass geben. Das Resultat einer einfachen Behandlung des Raumladungseffekts [8], bei der die Strahlgleichung (40) mit einem entsprechenden Ausdruck ergänzt wird, ist die Aufspaltung des Pols in Gleichung (53) beziehungsweise Figur 8 in zwei Pole, deren Lage ausser von  $\beta_e$  noch von der Plasmafrequenz des Strahls abhängt, mit einem dazwischenliegenden negativen Kurvenast. Die Lösungen der modifizierten Gleichung (55) werden mit der Berücksichtigung der Raumladungseffekte realistischer.

### 3. Parametrischer Wanderwellenverstärker

Als nächstes Beispiel von Wellenverstärkung in einer periodischen Struktur soll nun kurz die periodische Anordnung von Halbleiter-Varaktoren in einer Übertragungsleitung und deren Wechselwirkung mit einer darin fortschreitenden elektromagnetischen Welle behandelt werden. Der parametrische Verstärker passt auch aus einem weiteren Grund gut zum Thema dieses Aufsatzes, weil – wie wir gleich sehen werden – seine exakte Behandlung auf Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung führt.

Der parametrische Verstärker hat seinen Namen daher, dass einer der reaktiven Parameter ( $C, L$ ) der Schwingungsgleichung eines Resonanzkreises

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (63)$$

periodisch geändert wird. Bei den meisten technisch realisierten parametrischen Verstärkern ist es eine Halbleiterdiode, deren Sperrsicht, als Kapazität des Schwingungskreises verwendet, durch Variieren der Sperrspannung in ihrer Dicke verändert werden kann. Man bezeichnet die besonders für diese Verwendung entwickelten Dioden als variable Reaktanzdioden oder kurz Varaktoren. Für detaillierte Darstellungen der parametrischen Verstärker mit Dioden sowie anderer parametrischer Methoden zur Signalverstärkung sei auf die Literatur [13, 14, 15, 16, 17] verwiesen; hier soll nur das für die grundsätzliche Beschreibung der Wanderwellenverstärker Notwendige zusammengefasst werden.

Die Dioden-Kapazität ist ein nichtlineares Glied, dessen Wert  $C$  in (63) durch eine genügend grosse Spannung (Pumpspannung) verändert wird, das sich aber gegenüber der als klein vorausgesetzten Signalspannung linear verhält. Es soll nun  $C(t)$  im Takt  $\omega_p$  der angelegten Pumpspannung variieren

$$C(t) = C_0 (1 + 2\gamma \cos \omega_p t) \quad (64)$$

wobei  $\gamma \ll 1$  ist. Die Schwingungsgleichung für die Ladung des Kondensators ( $I = \frac{dQ}{dt}$ ) wird

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC_0(1 + 2\gamma \cos \omega_p t)} = 0$$

oder nach Einsetzen der Resonanzfrequenz des Kreises  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$  und wegen der Voraussetzung über  $\gamma$  näherungsweise

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega_o^2 (1 - 2\gamma \cos \omega_p t) Q \approx 0 \quad (65)$$

und dies ist gerade die Mathieusche Differentialgleichung [2], für deren Lösungen das im ersten Abschnitt Gesagte auch hier gilt. Diese Schaltung kann also oszillieren oder stabil (ungedämpft) schwingen, je nach dem Verhältnis  $\frac{\omega_p}{\omega_o}$ . Aus Figur 1 ist zu erkennen, dass es schmale Gebiete

instabilen Verhaltens (Oszillieren) für  $\frac{\omega_p}{\omega_o} \approx 2$  und  $\approx 4$  gibt, wenn voraussetzungsgemäss  $\gamma \ll 1$  ist.

Es soll nun gezeigt werden, wie dieser Kreis für die Verstärkung eines Signals gebraucht werden kann. Zuerst sollen hier die Leistungsbeziehungen von *Manley* und *Rowe* zitiert werden, deren Ableitung in [13] gut dargestellt ist. Sie geben die Beziehungen an, die zwischen den Leistungen auf den verschiedenen Kombinationsfrequenzen herrschen, wenn die Leistungen  $P_1$  und  $P_2$  zweier Oszillatoren mit den Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  auf ein nichtlineares Element einwirken. Sie gelten unabhängig von der Art und Stärke der Nichtlinearität und lauten in allgemeinster Form

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m P_{m,n}}{m f_1 + n f_2} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n P_{m,n}}{m f_1 + n f_2} &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

In den meisten praktischen Fällen wird durch Filterung ausser den beiden Oszillatorkräften nur eine einzige weitere Frequenz zugelassen. Lassen wir beispielsweise nur  $f_3 = f_2 - f_1$  zu, so folgt aus (66)

$$\frac{P_1}{f_1} - \frac{P_3}{f_3} = 0 \quad \frac{P_2}{f_2} + \frac{P_3}{f_3} = 0 \quad (67)$$

Identifiziert man  $f_1, f_2$  und  $f_3 = f_2 - f_1$  mit beziehungsweise Signal-, Pump- und Hilfs- (*Idler*-) Frequenz und  $P_1, P_2, P_3$  mit den entsprechenden Leistungen, dann folgt die qualitative Aussage, dass bei positiver (eingestrahlter) Pumpleistung sowohl auf der Signal- wie auf der Hilfsfrequenz

Leistung abgegeben wird. Dieser Fall tritt beim sogenannten negativen Widerstandsverstärker auf. Andere interessante Kombinationen sind in der angegebenen Literatur ausführlich beschrieben.

Es soll nun nach [13] die Verknüpfung zwischen Strömen und Spannungen auf Signal- und Hilfsfrequenz gesucht werden, wobei die Pumpfrequenz implizit in der Kapazitätsänderung vorkommt. Statt (64) schreiben wir

$$C(t) = C_o [1 + \gamma_1 (e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t})] \quad (68)$$

während Spannung und Strom der Diode zusammengefasst sind aus den Größen für Signal- und Hilfsfrequenz

$$\begin{aligned} V(t) &= V_s e^{i\omega_s t} + V_s^* e^{-i\omega_s t} + V_H e^{i\omega_H t} + V_H^* e^{-i\omega_H t} \\ I(t) &= I_s e^{i\omega_s t} + I_s^* e^{-i\omega_s t} + I_H e^{i\omega_H t} + I_H^* e^{-i\omega_H t} \end{aligned} \quad (69)$$

Der Strom wird wegen der variablen Kapazität

$$I = \frac{d}{dt} [C(t) V(t)] \quad (70)$$

und wenn man aus (68) und (69) in (70) einsetzt und den Koeffizientenvergleich durchführt, bei dem man die Glieder der rechten Seite mit Kombinationsfrequenzen, die durch Filterung nicht zugelassen sind, Null setzt, so findet man aus (70) leicht eine Matrix für die Verknüpfung von Strömen und Spannungen auf den Frequenzen  $\omega_s$  und  $\omega_H$ .

$$\begin{pmatrix} I_s \\ I_H^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_s C_o & i\omega_s \gamma C_o \\ -i\omega_H \gamma C_o & -i\omega_H C_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ V_H^* \end{pmatrix} \quad (71)$$

Berücksichtigen wir auch die Phasenwinkel der einzelnen Signale, so dass in (69) statt zum Beispiel  $e^{i\omega_s t}$  geschrieben wird  $e^{i(\omega_s t + \theta_s)}$  usw., so ist die Koeffizientengleichsetzung in (70) nur durch Erfüllen der Phasenbeziehung

$$\theta_s + \theta_H = \theta_p \quad (72)$$

möglich. Die zu (71) invertierte Matrix wird

$$\begin{pmatrix} V_s \\ V_H^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_s C} & \frac{\gamma}{i\omega_H C} \\ \frac{-\gamma}{i\omega_s C} & \frac{1}{i\omega_H C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ I_H^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ I_H^* \end{pmatrix} \quad (73)$$

mit der Abkürzung  $C = C_o (1 - \gamma^2)$ . Baut man die Diode in eine Schaltung (Figur 9) ein, mit Signalkreis, (Signalgenerator, Lastwiderstand  $R_L$ ) und einem Hilfskreis ohne Generator (der Pumpkreis ist nicht explizit dargestellt), so müssen für eine Verknüpfung der Generator-Spannungen und Ströme durch die beiden Kreise nun die Impedanzmatrizen der beteiligten Kreise addiert werden,

$$\begin{pmatrix} V g_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} + Z_{TS} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_{TH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ I_H^* \end{pmatrix} \quad (74)$$

wo in  $Z_{TS} = Z_1 + Rg + R_L + R_s$  und  $Z_{TH} = Z_2 + R_s$  alle Impedanzen der beiden Kreise zusammengefasst sind.

Aus (74) kann leicht der Signalstrom als Funktion der Signalgeneratorenspannung berechnet und der maximale Leistungsgewinn (bei Resonanz) als Verhältnis der an  $R_L$  abgegebenen Leistung zur verfügbaren (angepassten) Generatorleistung gefunden werden

$$\frac{P_L}{P_g} = \frac{R_L |I_s|^2}{|V g_s|^2 / 4 Rg} = \frac{4 Rg R_L}{\left( R_{TS} - \frac{\gamma^2}{\omega_s \omega_H C^2 R_{TH}} \right)^2} \quad (75)$$

Es ist der zweite Ausdruck im Nenner zusammen mit seinem negativen Vorzeichen der negative Widerstand, durch dessen Angleichung an  $R_{TS}$  die Verstärkung beliebig gross gemacht werden kann. Diesen Verstärkertyp nennt man auch Reflexionsverstärker, weil die verstärkte Leistung wieder zum Generator zurückfließt. Durch Einfügen eines Zirkulators zwischen Generator, Diode und Lastwiderstand ist es möglich, letzteren vom ersten zu entkoppeln. Abgesehen von der Entkopplung zwischen Last und Generator ist ein weiterer Vorteil ein viermal so hoher Leistungsgewinn, als der durch (75) angegebene.

Wir wollen uns nun dem Wanderwellenverstärker zuwenden, bei dem periodisch entlang einer Leitung (mit gleichen Abständen) Reaktanzen eingebaut sind, deren Wert selbst als Funktion der Zeit periodisch ändert [18, 13]. In Figur 10 ist ein Abschnitt der Periodenlänge / schematisch dargestellt. Die durch die Dioden repräsentierten Admittanzen sind jeweils in zwei Hälften am Beginn und am Ende der Leitungsperiode berücksichtigt. Die Realteile davon werden zur Erzielung einer Verstärkung negativ sein müssen.

Wir benötigen für die Berechnung der Strom- und Spannungsverhältnisse von Eingang und Ausgang einer Periodenlänge die Admittanzmatrix des Leitungsstückes, das zwischen den Dioden liegt. Aus der Leitungsgleichung (z. B. [19] Formel 71) lässt sie sich leicht finden und ist für die verlustfreie Leitung

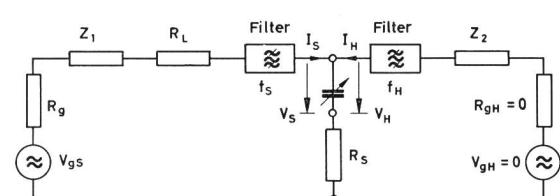


Fig. 9

Schaltung für einen parametrischen Verstärker (Reflexionsverstärker) mit Signalkreis, in den auch der Lastwiderstand eingebaut ist, und Hilfskreis. Durch Filterung werden in beiden Kreisen nur die entsprechenden Frequenzen zugelassen. Die Diode – zwischen beide Kreise geschaltet – hat einen Verlustwiderstand  $R_s$ . Der Pumpkreis ist nicht dargestellt

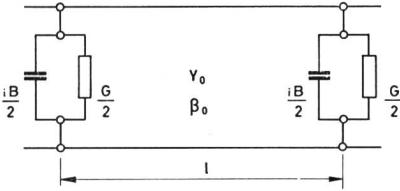


Fig. 10

Schematische Darstellung einer Periodenlänge eines Wanderwellenparametrischen Verstärkers. Die Reaktanzdioden werden durch  $G+iB$  repräsentiert

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iY_0 \cot\beta_o l & i \frac{Y_0}{\sin\beta_o l} \\ -i \frac{Y_0}{\sin\beta_o l} & iY_0 \cot\beta_o l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

wobei die Indizes 1 und 2 Eingangs- und Ausgangsseite bedeuten und  $Y_0$  die charakteristische Admittanz und  $\beta_o$  die Phasenkonstante der unbelasteten Leitung sind. Unter Einbeziehung der Queradmittanz  $\frac{1}{2}(G+iB)$  wird die Admittanzdarstellung zwischen Strömen und Spannungen der n-ten Zelle der periodischen Struktur (Fig. 10)

$$I_n = [-iY_0 \cot\beta_o l + \frac{1}{2}(G+iB)] V_n + i \frac{Y_0}{\sin\beta_o l} V_{n+1} \quad (77)$$

$$I_{n+1} = -\frac{iY_0}{\sin\beta_o l} V_n - [-iY_0 \cot\beta_o l + \frac{1}{2}(G+iB)] V_{n+1}$$

Für den Zusammenhang zwischen den Spannungen von Ein- und Ausgang ( $V_n$  und  $V_{n+1}$ ) und den Strömen  $I_n$  und  $I_{n+1}$  darf wieder das Floquetsche Theorem angewendet werden

$$V_{n+1} = V_n e^{-\gamma l} \quad I_{n+1} = I_n e^{-\gamma l} \quad (78)$$

worin nun  $\gamma = \alpha + i\beta$  komplex zu nehmen ist. Es kann jetzt (78) in (77) eingesetzt und  $\frac{I_n}{V_n}$  aus der ersten und der zweiten Zeile von (77) gleichgesetzt werden

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{V_n} &= -iY_0 \cot\beta_o l + \frac{1}{2}(G+iB) + iY_0 \frac{e^{-\gamma l}}{\sin\beta_o l} = \\ &= -iY_0 \frac{e^{-\gamma l}}{\sin\beta_o l} + iY_0 \cot\beta_o l - \frac{1}{2}(G+iB) \end{aligned} \quad (79)$$

Daraus lässt sich leicht  $ch\gamma l = ch\alpha l \cos\beta_o l + ish\alpha l \sin\beta_o l$  anschreiben. Durch Trennung in reelle und imaginäre Glieder erhält man zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} ch\alpha l \cos\beta_o l &= \cos\beta_o l - \frac{1}{2}B/Y_0 \sin\beta_o l \\ sh\alpha l \sin\beta_o l &= \frac{1}{2} \frac{G}{Y_0} \sin\beta_o l \end{aligned} \quad (80)$$

Die erste Zeile ist für  $G = 0$  und  $\alpha = 0$  nichts anderes als die zu (15) analoge Gleichung für eine periodisch mit der Quersuszeptanz  $B$  belastete verlustfreie Leitung. Die bisher allgemein verwendeten Real- und Imaginärteile  $G+iB$  der Reaktanzdioden können nach (71) für Signal- und Hilfsfrequenz spezifiziert werden.

$$\begin{aligned} G_s + iB_s &= I_s/V_s = i\omega_s C_o + i\omega_s \gamma C_o V_H^*/V_s \\ G_H + iB_H &= I_H^*/V_H^* = -i\omega_H C_o - i\omega_H \gamma C_o V_s/V_H^* \end{aligned} \quad (81)$$

Für Verstärkung ist ein negativer Realteil nötig, so dass  $\frac{V_H^*}{V_s} = q e^{\frac{In}{2}}$  mit der reellen Zahl  $q$  sein muss. Die Phasenbeziehung (72) muss nun für alle Dioden erfüllt werden. Dies wird möglich, wenn für die Phasenkonstanten der Wellen auf den drei Frequenzen gilt

$$\beta_s + \beta_H = \beta_P + \frac{2n\pi}{l} \quad (82)$$

mit beliebigem ganzen  $n$ . Dies bedeutet, dass die Phasenbeziehung nur bei jeder Diode erfüllt zu sein braucht, auf den dazwischenliegenden Leitungsstücken darf die Pumpphase jedoch beliebig zur Signal- und Hilfsphase liegen. Die Verstärkung kann aus der zweiten Zeile von (80) gewonnen werden, die für kleine Verstärkungen je Periodenlänge ( $sh\alpha l \approx \alpha l$ ) geschrieben werden kann, wie

$$\alpha l = \frac{1}{2} G/Y_0 \cdot \frac{\sin\beta_o l}{\sin\beta l} \quad (83)$$

Die Leistungszunahme je Periodenlänge lässt sich durch  $P_{n+1} = P_n e^{2\alpha l}$  ausdrücken, wobei nun wegen (81) zu beachten ist, dass aus (83) zwei verschiedene Verstärkungskoeffizienten  $\alpha_s$  für das Signal und  $\alpha_H$  für die Hilfsfrequenz zu erwarten sind. Aus den Manley-Rowe-Beziehungen für den negativen Widerstandsverstärker (67) folgt jedoch, dass  $\frac{P_{s,n+1}}{P_{H,n+1}} = \frac{P_{s,n}}{P_{H,n}}$  und daher auch  $\alpha_s = \alpha_H$  ist. Wir setzen statt  $G$  in (83) aus (81) einmal für  $\omega_s$  und einmal für  $\omega_H$  ein und versehen dazu  $Z_0 = \frac{1}{Y_0}$ ,  $\beta_0$  und  $\beta$  mit den Indizes  $S$  und  $H$ . Aus  $\alpha_s l = \alpha_H l$  kann  $\left| \frac{V_H}{V_s} \right|$  berechnet und in  $\alpha_s l$  eingesetzt werden. Es folgt schliesslich für die Verstärkung je Periodenlänge

$$\alpha l = \pm \frac{\gamma C_o}{2} \sqrt{\omega_s \omega_H Z_{os} Z_{oH} \frac{\sin\beta_{os} l}{\sin\beta_s l} \frac{\sin\beta_{oH} l}{\sin\beta_H l}} \quad (84)$$

das heisst eine wachsende und eine gedämpfte Welle. Die Leistungsverstärkung wird daher für den ganzen aus  $N$ -Perioden bestehenden Verstärker

$$\frac{P_{aus}}{P_{ein}} = (ch|\alpha|/N)^2$$

#### 4. Elementare Grundlagen der Quantenverstärkung und des Wanderwellenmasers

Die quantenmechanische Beschreibung eines Atoms [5] führt bekanntlich auf die Aussage, dass seine Gesamtenergie nur diskrete Werte annehmen kann, weil für die Bewegungen und gegenseitige Lage von Atomkern und Elektronen nur ganz bestimmte Zustände erlaubt sind. Ändert die Energie  $W_1$  eines Atoms oder Moleküls – zum Beispiel durch Übergang eines Elektrons von seiner ursprünglichen auf eine (erlaubte) benachbarte Bahn – von den ursprünglichen auf einen höheren oder tieferen Wert  $W_2$ , so kann dies für den ersten Fall nur möglich sein, wenn die zusätzliche Energie von aussen, zum Beispiel durch elektromagnetische Strahlung, dem Atom zugeführt wird oder im zweiten Fall, wenn das freiwerdende Energiequant in der Form von elektromagnetischer Strahlung abgegeben wird. Die Frequenz  $f$  dieser Strahlung ist durch die Energiedifferenz nach der berühmten Formel

$$hf = W_2 - W_1 \quad (85)$$

gegeben, wobei  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ <sup>2</sup> das Plancksche Wirkungsquantum ist. In einer Ansammlung von sehr vielen gleichen Atomen befinden sich eine Anzahl  $N_n$  in einem höheren Energiezustand  $W_n$  und  $N_m$  im tieferen Zustand  $W_m$ . Aus den Gesetzen der statistischen Thermodynamik folgt, dass im thermischen Gleichgewicht das Boltzmannsche Verteilungsgesetz

$$N_n/N_m = \exp\left[-\frac{W_n - W_m}{kT}\right] \quad (86)$$

gilt, mit der Boltzmann-Konstanten  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$  und der absoluten Temperatur  $T$  in Grad Kelvin. Die Aussage von (86) ist, dass bei thermischem Gleichgewicht immer  $N_m > N_n$  ist, dass aber nach höheren Temperaturen  $N_n$  auf Kosten von  $N_m$  zunimmt.

Gewöhnlich findet das Abstrahlen von Energiequanten – ohne Einwirkung einer Strahlung von aussen auf das Medium – durch spontanen Übergang vom Niveau  $W_n$  auf  $W_m$  des Atoms mit einer Wahrscheinlichkeit  $A_{nm} N_n$  statt, wobei die einzelnen Übergänge der verschiedenen Atome unabhängig voneinander vor sich gehen und die ausgesandten Wellenzüge unkorreliert sind. Sorgt man dafür, dass die Temperatur des Mediums konstant bleibt, so wird durch die thermische Bewegungsenergie das Verhältnis  $N_n/N_m$  nach (86) aufrecht erhalten.

Wird das Medium mit einer elektromagnetischen Welle der Frequenz  $f$  und der Energiedichte  $U(f)$  bestrahlt, so kann

erstens das Medium aus der Strahlung Energiequanten absorbieren und damit den Energiezustand einzelner Atome mit der Wahrscheinlichkeit  $B_{mn} N_m U(f)$  von  $W_m$  auf  $W_n$  anheben, und zweitens kann die eingestrahlte Welle das Zurückfallen von Elektronen aus dem oberen in den unteren Energiezustand und damit das Abstrahlen eines Energiequants in Phase mit der eingestrahlten Welle mit einer Wahrscheinlichkeit  $B_{nm} N_n U(f)$  auslösen. Diese Abstrahlung nennt man stimuliertes Emission (zum Unterschied zur spontanen), und die resultierende Strahlung ist kohärent. Bei Gleichgewicht zwischen emittierter und absorbiertener Energie gilt also

$$B_{mn} N_m U(f) = A_{nm} N_n + B_{nm} N_n U(f) \quad (87)$$

Die Strahlungsdichte kann daher mit (86) und (85) ausgedrückt werden wie

$$U(f) = \frac{A_{nm}}{B_{mn} e^{\frac{hf}{kT}} - B_{nm}} \quad (88)$$

Ein Vergleich von (88) mit der Planckschen Strahlungsformel ergibt  $B_{mn} = B_{nm} = B$  und  $\frac{A_{nm}}{B} = \frac{8\pi h f^3}{c^3}$ , worin  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Aus (88) kann man auch noch eine Aussage über das Verhältnis von spontaner zu stimulierter Emission, das heißt inkohärenter zu kohärenter Strahlung erhalten. Es ist

$$A_{nm}/B U(f) = e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \quad (89)$$

und die beiden Anteile an der Gesamtstrahlung sind gleich gross, wenn (89) eins wird. Für  $T = 300^\circ \text{ K}$  ist dies bei  $f = 4,4 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$  der Fall. Für höhere Frequenzen oder tiefere Temperaturen ist der Anteil inkohärenter Strahlung grösser. Deshalb ist der Nachweis stimulierter Emission zuerst bei einer tieferen Frequenz, nämlich etwa  $2,4 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$  gelungen.

Bevor wir kurz auf das Grundsätzliche dieses ersten Maserversuchs eingehen, sei noch auf einen kleinen Ausschnitt der Literatur verwiesen, in der übersichtsmässig die Grundlagen und Anwendungen von Maser und Laser – sei es in eher elementaren [20, 21] oder in anspruchsvolleren Darstellungen [22, 23, 24, 25, 26] – ausführlich beschrieben sind.

Der erste Maser (Quantenverstärkung durch stimuliertes Emission<sup>2</sup>) funktionierte bei etwa  $2,4 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ , und es wurde als aktives Medium ein Ammoniakmolekülstrahl verwendet. Das Ammoniakmolekül ist so aufgebaut, dass seine drei Wasserstoffatome die Basispunkte und das Stickstoffatom die Spitze einer dreiseitigen Pyramide bilden. Dieses Mole-

<sup>2</sup> MASER ist die Abkürzung von *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*

kül führt eine Rotation um seine Körperachse durch und kann ausserdem invertieren, das heisst die Lage des  $N$ -Atoms von «oberhalb» der Ebene der  $H$ -Atome nach «unterhalb» und umgekehrt vertauschen. Ein klassisches Analogon zu dieser Situation ist durch zwei gekoppelte Oszillatoren gleicher Eigenfrequenz gegeben. Wie die Kopplungsfrequenzen werden die den einzelnen Oszillatoren zugeordneten Energieniveaus gespalten [24]. Der Unterschied zwischen den beiden neuen Niveaus entspricht beim häufigst vorkommenden Rotationszustand des  $NH_3$  nach (85) gerade der Frequenz  $f \approx 24$  GHz. Die Funktion der stimulierten Emission wird bestimmt durch das Verhältnis

der Besetzungszahlen  $\frac{N_n}{N_m}$  des oberen zum unteren Niveau.

Um die stimulierte Emission dominierend werden zu lassen, ist es daher nötig  $N_n > N_m$  zu machen, entgegen den Verhältnissen bei thermodynamischem Gleichgewicht. Man spricht dann auch von der Umkehr der Besetzungszahlen. Der Trick des ersten Masers nach Townes und Mitarbeitern ist der, dass man unter Ausnutzung des quadratischen Starkeffekts die  $NH_3$ -Moleküle im höheren Energieniveau auf der Achse des Strahls fokussiert und sie durch eine Blende in einen Mikrowellenresonator einschiesst, während jene im unteren Niveau von der Strahlachse weg abgelenkt werden [24]. Wenn der Resonator auf die Übergangsfrequenz abgestimmt ist, induzieren die stimulierten Übergänge ein Wellenfeld der Frequenz 24 GHz. Diese Anordnung stellt also einen Verstärker oder Oszillator dar. Die besondere Bedeutung dieser Maseroszillatoren für die Praxis liegt in der geringen Linienbreite des Oszillatorsignals und der geringen relativen Frequenzschwankung, die etwa  $\frac{\Delta f}{f} \approx 10^{-10}$  erreicht. Diese Maseroszillatoren werden deshalb als Frequenz- und Zeitnormal verwendet und haben in dieser Funktion den Beinamen «Atomuhren» erhalten. Statt Ammoniak wird auch noch eine Übergangsfrequenz des neutralen Wasserstoffatoms bei etwa 1,42 GHz und des Caesium bei ungefähr 9,2 GHz verwendet. Die Frequenzstabilität der beiden ist noch besser als jene der Ammoniakmaser.

Diese Gasmaser haben für die Verwendung als Verstärker zwei grundsätzliche Nachteile, nämlich die geringe Bandbreite des Energieübergangs und damit der Verstärkung, und ausserdem sind sie nicht abstimmbar. Deshalb haben sich für Maserverstärker die 3-Niveau-Festkörper-Maser durchgesetzt, deren Wirkung auf der paramagnetischen Resonanz der Elektronen beruht [23, 24]. Bei diesen Medien ist es möglich, die Energieniveaus durch Anlegen eines Magnetfeldes aufzuspalten und durch Verändern des Magnetfeldes die Niveauunterschiede zu variieren. Paramagnetische Ionen, die im Kristallgitter von Festkörpern eingebaut, bei Anlegen vernünftiger Magnetfelder Energieaufspaltungen aufweisen, wie sie für Mikrowellenverstärker

( $f \approx 10^9 - 10^{10}$  Hz) benötigt werden, sind [27]  $Ni^2$ ,  $Cr^3$ ,  $Fe^3$  und  $Gd^3$ . Vor allem  $Cr^{3+}$  in Rubin wird erfolgreich als Masermaterial eingesetzt. Ohne näher darauf einzugehen, wie die verschiedenen Niveaus entstehen, wollen wir annehmen, dass drei benachbarte Niveaus vorhanden wären und im thermodynamischen Gleichgewicht Besetzungswahrscheinlichkeiten nach dem Boltzmannschen Verteilungsgesetz (86) aufweisen (Fig. 11 a). Die für die Maserwirkung nötige Umkehr der Besetzungszahlen kann hier nicht durch eine örtliche Trennung der Atome im höheren Niveau von denen im tieferen erfolgen. Aber mit dem 3-Niveau-Medium hat man die Möglichkeit, durch Einstrahlen einer Frequenz

$$f_{13} = \frac{W_3 - W_1}{h} \text{ mit starker Intensität dafür zu sorgen, dass}$$

$N_3$  auf Kosten von  $N_1$  gefüllt wird, bis beide gleich gross sind (Fig. 11 b). Diesen Vorgang nennt man das Pumpen des Maser und  $f_{13} = f_p$  ist die Pumpfrequenz, analog zur Bezeichnungsweise bei den parametrischen Verstärkern, allerdings mit einer andern physikalischen Bedeutung. Bei der in Figur 11 angenommenen Lage der drei Niveaus herrscht dann eine Besetzungsumkehr zwischen  $E_1$  und  $E_2$ , die oft unter Beibehaltung der Boltzmann-Formel durch eine negative Temperatur charakterisiert wird. Eine Strahlung der Frequenz  $f_{12}$  kann nun durch stimulierte Emission verstärkt werden. Diese Strahlungsverstärkung geht auf Kosten der Besetzungszahl des 2. Niveaus, aber die Pumpstrahlung sorgt für die Aufrechterhaltung der Besetzungsumkehr zwischen den beiden unteren Niveaus. Erfolgt in einem Medium der (strahlungslose) Hilfsübergang  $W_3 \rightarrow W_2$  viel rascher als der Maserübergang  $W_2 \rightarrow W_1$ , so stellt sich ein neues Gleichgewicht der Besetzungszahlen ein (gestrichelte Linien in Fig. 11 b), bei dem die Besetzungsumkehr gegenüber der ursprünglichen noch verbessert ist [24].

Das Medium wirkt als negativer Widerstand und gewährleistet eine Überkompensation des (positiven) Verlustwider-

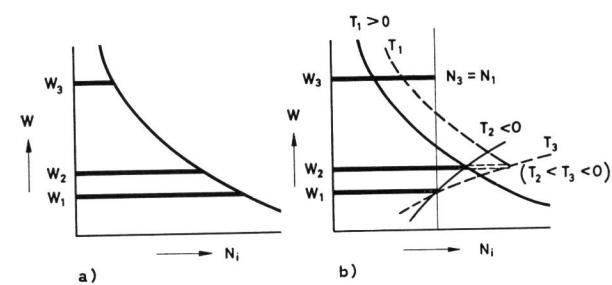


Fig. 11

Die Besetzungszahlen  $N_i$  als Funktion der Energien von drei Niveaus eines Masermaterials, a) nach der Boltzmann-Verteilung für thermisches Gleichgewicht, b) durch Pumpen mit  $f_{13}$  ist eine Inversion zwischen  $N_1$  und  $N_2$  hergestellt (ausgezogene Linie), die noch verbessert wird, wenn die Relaxationszeit des Hilfsüberganges  $W_3 \rightarrow W_2$  viel kürzer ist als der Maserübergang  $W_2 \rightarrow W_1$  (strichliert)

standes eines Resonanzkreises (zum Beispiel eines Hohlräumresonators), in den eingebaut, es Signalverstärkung ermöglicht. Die für die Nachrichtentechnik benötigte Bandbreite lässt sich jedoch nur mit dem Wanderwellenmäser erreichen. Bei diesem Wanderwellenverstärker liegt nun der Grund für die Verwendung einer Verzögerungsleitung nicht darin, dass ein dauernder Synchronismus zwischen Welle und dem mit ihr laufenden aktiven Medium (Wanderwellenröhre) oder zwischen Signalwelle und den durch eine Pumpwelle beeinflussten Zuständen periodisch in einer Leitung eingebauter aktiver Elemente (Wanderwellen-Parametrischer Verstärker) herrschen muss, sondern um eine möglichst lange Wechselwirkung zwischen aktivem Medium und Welle zu gewährleisten [25]. Das aktive Medium – das im allgemeinen paramagnetisches Material ist – kann durch eine komplexe Permeabilität

$$\tilde{\mu} = \mu_o (1 - i \mu_r'') \quad (90)$$

beschrieben werden, dessen Realteil sich kaum merkbar von dem des Vakuums unterscheidet und dessen Imaginärteil negativ ist. Für Masermaterial liegt der Wert des letzteren bei etwa  $\mu_r'' \approx -10^{-2}$ . Wegen dieses kleinen Wertes von  $\mu_r''$  ist zur Erzielung einer genügenden Verstärkung eine Wechselwirkung mit der Welle über eine lange Strecke nötig. Das aktive Medium ist einem starken statischen Magnetfeld ausgesetzt, wobei zwischen diesem und dem hochfrequenten Magnetfeld eine ganz bestimmte Richtung eingehalten werden muss. Es kann deshalb nicht jede beliebige Verzögerungsleitung angewendet werden. Die Kammstruktur [29] (Fig. 12) hat sich neben anderen [28] gut bewährt.

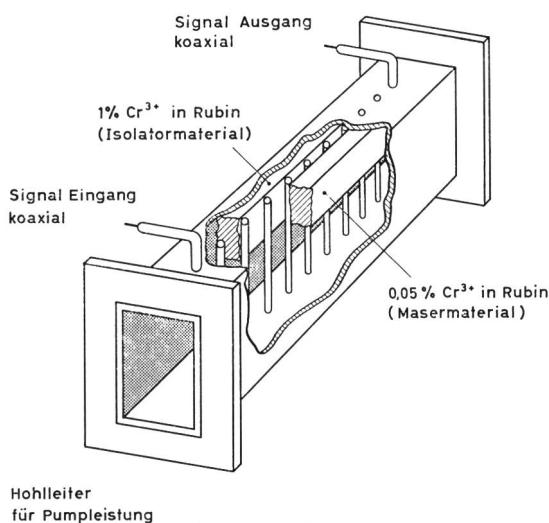


Fig. 12

Wanderwellen-Mäser mit Kammleitung (nach [27]). Durch den Hohlleiter wird die Pumpleistung transportiert, das Signal wird koaxial ein- und ausgekoppelt

Betrachten wir nun noch [27] eine auf einer periodischen Leitung mit dem Querschnitt  $A$  in  $Z$ -Richtung laufende Welle. Ihr Energieinhalt auf dem infinitesimalen Leitungsstück kann ausgedrückt werden durch

$$dW = dz \frac{\mu_o}{2} \int_A H H^* dA \quad (91)$$

Da diese Energie mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  in  $z$ -Richtung transportiert wird, kann die Leistung durch einen bestimmten Querschnitt wie

$$P = \frac{dW}{dz} v_g \quad (92)$$

geschrieben werden, was auch für den Fall langsam veränderlicher Energie noch hinreichend richtig ist. Die Leistungszunahme, die durch das aktive Medium ( $\mu_r'' < 0$ ) herbeigeführt wird, kann analog zur Leistungsabsorption, etwa durch Skineffekt [19], formuliert werden

$$dP/dz = -\omega \frac{\mu_o}{2} \int_M H \mu_r'' H^* dM \quad (93)$$

wobei  $M$  die Querschnittsfläche des aktiven Mediums bedeutet. Man definiert einen Füllfaktor  $F$

$$F = \frac{\int_M H \mu_r'' H^* dM}{\mu_{r \max}'' \int_A H H^* dA}$$

der kleiner als 1 ist, weil das aktive Medium nicht den ganzen Querschnitt  $A$  ausfüllt und außerdem nicht überall maximal wirksam sein kann ( $|\mu_r''| \leq |\mu_{r \max}''|$ ). Das Verhältnis

von  $dP/dz$  und  $P$  (für  $z = 0$ ) gebildet und über die Länge  $L$

des aktiven Mediums integriert liefert für die Leistungsverstärkung des Wanderwellenmäser

$$P(L)/P(0) = \exp [-\mu_{r \max}'' \frac{\omega}{v_g} L F] \quad (94)$$

Bei der praktischen Ausführung wird ein zweiter Rubinstab mit höherem Chromgehalt verwendet (Fig. 12) in dem das Wellenfeld entgegengesetzt polarisiert ist und für eine nicht reziproke Abschwächung in  $z$ -Richtung sorgt. Die Hauptanwendung des Maserverstärkers liegt im Empfang sehr schwacher Signale, etwa von Satelliten, weil das Eigenrauschen des Mäser extrem niedrig ist.

## 5. Anhang: Anwendungsmöglichkeiten des Lasers für die Fernmeldetechnik

Der Laser ist bekanntlich der zum Mäser analoge Quantenverstärker für Wellenlängen vom Infrarot bis zum Ultra-

violett. Das nach (89) für diese kurzen Wellenlängen ( $f \approx 10^{14} - 10^{15}$  Hz) besonders ungünstige Verhältnis von stimulierter zu spontaner Emission konnte durch besondere Pumptechnik und Wahl geeigneter aktiver Medien überwunden werden. Während sich der Maser im Mikrowellengebiet nur durch sein geringes Eigenrauschen für Verstärker und durch hohe Frequenzstabilität (Gas-Maser-Oszillator) gegenüber andern Mitteln zur Erzeugung und Verstärkung kohärenter Strahlung auszeichnet, war das Erscheinen des Laser als Quelle kohärenter Lichtstrahlen etwas ganz Neues. Neben vielen möglichen wissenschaftlichen und technischen Anwendungen dachte man bald an die Übertragung von Nachrichten auf modulierten Lichtstrahlen. Einige grundsätzliche Betrachtungen zur Verwendung von Laser für Kommunikationszwecke hat Sette [30] angestellt.

Ein prinzipieller Vorteil der sehr kurzen Wellenlängen von infrarotem und sichtbarem Licht bei der Übertragung liegt darin, dass mit Aperturen (Linsen oder Spiegel) von geringem Durchmesser schon eine viel bessere Bündelung der Strahlung erreicht wird, als dies mit sehr grossen Antennen für Mikrowellen erreicht werden kann. Der Halbwertswinkel für die von einer voll ausgeleuchteten runden Senderapertur abgestrahlte Leistung ist [31]

$$2\vartheta_H = 0,56 \frac{\lambda}{\varrho_s} \quad (95)$$

wo  $\varrho_s$  der Radius der Apertur ist. Setzen wir  $\lambda = 1 \mu m$  und  $\varrho_s = 5,6$  cm ein, so wird  $2\vartheta_H = 10^{-5} \approx 2,1$  Bogensekunden; dies ist die etwa 20- bis 30-fache Winkelauflösung des menschlichen Auges. Die von einer vorgeschriebenen Empfängerapertur aufgenommene Leistung ist proportional dem Verhältnis der Raumwinkel  $\Omega_E$  (proportional zu  $\varrho_E^2/R^2$ , mit dem Abstand  $R$ ), mit dem die Empfängerapertur (Radius  $\varrho_E$ ) vom Sender aus erscheint, zu dem Raumwinkel  $\Omega_s$  (proportional  $\vartheta_H^2$ ) in den der Sender einen bestimmten Teil seiner Leistung abgibt, vorausgesetzt, dass  $\Omega_E < \Omega_s$  ist. Für das Verhältnis der empfangenen zur gesendeten Leistung besteht daher die Proportionalität

$$\frac{P_E}{P_s} \triangleq \frac{\varrho_s^2}{\lambda^2} \frac{\varrho_E^2}{R^2} \quad (96)$$

die den Einfluss der einzelnen Parameter deutlich macht. Selbstverständlich ist wegen der Ungenauigkeit des Fokusierens und der beschränkten Qualität von Spiegel oder Linsen praktisch die scharfe Strahlenbündelung nicht ganz möglich, die man aus der Beugungstheorie berechnet. Sicher liegt das Problem der Übertragung dieser kurzen Wellen nicht mehr bei einer zu geringen Bündelung der Strahlung und zu grossen Antennen, sondern in der me-

chanischen Präzision und Stabilität der Aufstellung, um vom Sender den Empfänger überhaupt zu «treffen» und schliesslich bei der Turbulenz der Luft, die eine Winkelauflösung unterhalb einer Bogensekunde unmöglich macht. Weiter ist die Übertragung durch die atmosphärische Absorption ganz ausserordentlich erschwert. Die ungeführte Übertragung von Laserlicht über grössere Abstände hat daher nur ausserhalb der Atmosphäre wirkliche Bedeutung. Für die Verwirklichung einer «leitungs»gebundenen Übertragung von Lichtwellen wurden theoretische Arbeiten an der Strahl- oder Schlierenleitung [32, 33, 34] vorangetrieben.

Der wohl wichtigste Aspekt einer künftigen Verwendung von Laserstrahlung für die Nachrichtentechnik ist die zur Verfügung stehende Bandbreite. Eine relative Bandbreite von nur 1% bei einer Wellenlänge von  $1 \mu m$  ist bereits  $3 \cdot 10^{12}$  Hz absoluter Bandbreite. Bei den bisher verwendeten Modulationsmethoden wurden jedoch nur sehr viel geringere Bandbreiten ausgenutzt.

Ein wichtiger Gesichtspunkt in der Beurteilung einer Übermittlungsanlage ist ihr Rauschverhalten. Die von einem Medium abgestrahlte Rauschleistung setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich der von spontanen Übergängen verursachten Strahlung des schwarzen Körpers und dem Quantenrauschen (das sind die wegen der endlichen Energiemenge der Lichtquanten notwendigerweise sprunghaften Änderungen der Strahlungsenergie). Die Rauschleistung wird also

$$N = \left( \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} + hf \right) \Delta f$$

Für  $\frac{hf}{kT} \ll 1$  überwiegt die schwarze Strahlung, und es wird

$$N \approx kT\Delta f, \text{ für } \frac{hf}{kT} \gg 1 \text{ überwiegt das Quantenrauschen}$$

$N \approx hf\Delta f$ , das der Frequenz proportional ist. Für eine Temperatur  $T = 290$  °K ist die Rauschleistung auf 1 Hz Bandbreite etwa  $4 \cdot 10^{-21}$  Watt konstant bis etwa  $6 \cdot 10^{12}$  Hz, wo das Quantenrauschen schon gleich stark ist, das dann für höhere Frequenzen linear zunimmt und bei  $3 \cdot 10^{14}$  Hz ( $\lambda = 1 \mu m$ ) 50 mal so stark ist.

Wegen der linearen Zunahme der Rauschleistung im Gebiet des Quantenrauschens und der Beziehung (95) wird das Signal-Rauschverhältnis beim Empfänger eines Übertragungsweges proportional zu  $f$  zunehmen, wenn Aperturdurchmesser und Signalleistung konstant gehalten werden. Das Rauschen beeinträchtigt jedoch die Informationskapazität eines Übertragungskanals. Nach Shannon ist die Informationsrate

$$C = \Delta f \log_2 (1 + S/N) \quad (97)$$

in bit/s. Für das Gebiet des Quantenrauschens wird das Signal-Rauschverhältnis beim Empfänger

$$\frac{S}{N} = \frac{P_E}{h f \Delta f} = 2 \frac{\bar{W}_E}{h f} 2 n \quad (98)$$

worin  $\bar{W}_E$  die mittlere Energie und  $n$  die mittlere Quantenzahl je empfangenem Impuls sind. Für ein bestimmtes  $S/N$  muss also die Quantenzahl je Impuls konstant gehalten oder bei Erhöhung der Frequenz die Energie je Impuls erhöht werden. Dem Empfänger muss für den zuverlässigen Empfang einer bestimmten Informationsrate  $C$  eine minimale Leistung  $P_{Emin}$  angeboten werden, die aus (97) und (98) folgt zu

$$P_{Emin} = n_{min} C h f \quad (99)$$

worin  $n_{min}$  die minimale nötige Anzahl Lichtquanten ist, die im Detektor einen unterscheidbaren Impuls hervorruft. Es lässt sich nun der maximale Abstand für die Übertragung einer bestimmten Informationsrate anschreiben. Nehmen wir den Proportionalitätsfaktor in (98) gleich  $4\pi$  [30], so wird mit (95), (96) und (99) dieser maximale Abstand

$$R_{max} = \varrho_E \sqrt{\frac{\pi}{\vartheta_H} \frac{P_s}{C h f n_{min}}} \quad (100)$$

In Figur 13 ist  $R_{max}$  als Funktion der Informationsrate aufgetragen für die folgende Wahl der übrigen Parameter:  $f = 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $P_s = 10 \text{ W}$ ,  $n_{min} = 100$ ,  $\varrho_E = 5 \text{ cm}$ ,  $\vartheta_{HS} = 1''$ .

Für neuere, zum Teil sehr ausführliche Studien über die Möglichkeiten und technische Realisierung von Nachrichtenübermittlung mit Laserstrahleung sei auf einige Publikationen verwiesen [35, 36, 37, 38].

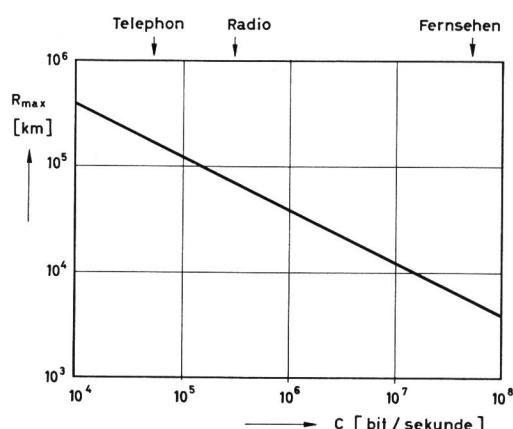


Fig. 13

Die Reichweite einer Laser-Nachrichtenverbindung als Funktion der übertragenen Informationsrate  $C$  für die speziellen Parameter  $f = 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  ( $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ), Senderleistung 10 Watt, Radius der Empfängerapertur  $\varrho_E = 5 \text{ cm}$ , Halbwertsbreite der Senderapertur 2 Bogensekunden und minimal 100 Photonen je Impuls

## Literatur

- [1] L. Brillouin. Wave Propagation in periodic Structures. McGraw Hill, New York, 1946.
- [2] N. W. McLachlan. Theory and Application of Mathieu Functions. University Press, Oxford 1947.
- [3] J. W. Gewartowski, H. A. Watson. Principles of electron Tubes. Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [4] E. T. Whittaker, G. N. Watson. A Course of modern Analysis. 4. ed., University Press, Cambridge, 1927.
- [5] P. A. Lindsay. Introduction to Quantum Mechanics for electrical Engineers. McGraw Hill, London, 1967.
- [6] J. L. Altmann. Microwave Circuits. Van Nostrand, Princeton, 1964.
- [7] R. M. Bevensee. Electromagnetic Slow Wave Structures. J. Wiley, New York, 1964.
- [8] M. Chodorov, C. Susskind. Fundamentals of Microwave Electronics. McGraw Hill, New York, 1964.
- [9] J. R. Pierce. Travelling-wave Tubes. Van Nostrand, Princeton, 1950.
- [10] W. Kleen. Mikrowellenelektronik I. Grundlagen. S. Hirzel, Stuttgart 1952.
- [11] W. Kleen, K. Pöschl. Mikrowellenelektronik II. Lauffeldröhren. S. Hirzel, Stuttgart 1958.
- [12] E. Schanda. Die Elektrizitätslehre und die Maxwellsche Theorie, Techn. Mitt. PTT 45 (1967), S. 512...521.
- [13] L. A. Blackwell, K. L. Kotzebue. Semiconductor-Diode Parametric Amplifiers. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1961.
- [14] H. Mahr. Parametrische Verstärker. Der Fernmelde-Ingenieur 17 (1963), Nr. 6, S. 1...28.
- [15] M. Fukada, Study of Wide-band parametric Amplifiers and Converters. Dissertation 64-13.001 University of California, Berkely, 1964.
- [16] K. K. N. Chang. Parametric and Tunnel Diodes. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [17] K. H. Steiner, L. Pungs. Parametrische Systeme. S. Hirzel Stuttgart, 1965.
- [18] C. V. Bell, G. Wade. Circuit Considerations in Travelling-wave Parametric Amplifiers. IRE WESCON Convention Record, 1959, pt. 2, p. 75...82.
- [19] E. Schanda. Oberflächenwellen. Techn. Mitt. PTT 45 (1967) S. 610...621.
- [20] H. H. Klinger. Laser. Franckh'sche Verlagshandlung, Stuttgart, 1964.
- [21] H. P. Brändli, R. Dändliker, J. Hatz. Laserphysik. Techn. Rundschau, Blaue Reihe, Hallwag, Bern, 1966.
- [22] G. Troup. Maser and Lasers. Methuen, London 1959.

- [23] *J. R. Singer*. Maser. J. Wiley, New York, 1960.
- [24] *E. Mollwo, W. Kaule*. Maser und Laser. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966.
- [25] *H. G. Unger*. Quantenelektronik. F. Vieweg, Braunschweig, 1968.
- [26] *D. Röss*. Lichtverstärker und -oszillatoren. Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1966.
- [27] *E. O. Schulz-Du Bois*. The three level solid state Maser. Progress in Cryogenics, Heywood & Co., London, 1960.
- [28] *A. E. Siegman*. Microwave solid state Masers. Mc Graw Hill, New York, 1964.
- [29] *F. S. Chen*. The Comb-Type Slow Wave Structure for TWM Applications. Bell Syst. Techn. J. 43 (1964), p. 1035...1066.
- [30] *D. Sette*. Laser Applications to Communication. Proceedings of the international Symposium on Laser-Physics and Application. Bern 12.-15. 10. 1964, Zeitschr. Ang. Math. Phys. 16 (1965), S. 156...169.
- [31] *E. Schanda*. Antennenstrahlung. Techn. Mitt. PTT 46 (1968), S. 222...232.
- [32] *D. W. Berreman*. A Lens or Light Guide using Convectively distorted thermal gradients in Gases. Bell Syst. Techn. J. 43 (1964), p. 1469...1475.
- [33] *E. A. J. Marcatili, R. A. Schmeltzer*. Hollow metallic and dielectric Waveguides for long Distance optical Transmission and Lasers. Bell Syst. Techn. J. 43 (1964), p. 1783...1810.
- [34] *H. G. Unger*. Light Beam Propagation in curved Schlieren Guides, Arch. El. Uebertr. 19 (1965), p. 189...198.
- [35] *F. Kalil*. Optical and Microwave Communications – A Comparison. NASA Technical Note D-3984, 1967.
- [36] *M. Ross*. Laser Receivers. J. Wiley, New York, 1966.
- [37] *M. E. Wall, T. G. Kuhn*. Wide-band Data Transmission: Which Medium is best? Microwaves 5 (1966), Nr. 4, p. 18...25.
- [38] *M. Ito, T. Uchida*. Development of a Laser Communication System I. und II. NEC Res. Dev., No. 8, (Oct. 1966), p. 75...83 and 84...88.

## Hinweise auf eingegangene Bücher

**Mende H.G. UKW-FM-Rundfunk-Praktikum.** = Radio-Praktiker-Bücherei Nr. 3/5. 6., neu bearbeitete Auflage. München, Franzis-Verlag, 1968. 172 S., 82 Abb., 13 Tabellen. Preis Fr. 9.05.

Dieses Buch gibt eine umfassende Darstellung der modernen UKW-Empfangstechnik. Die Grundlagen werden einleitend ohne Formeln, aber technisch genau beschrieben. Im zweiten Teil diskutiert der Autor ausführlich die einzelnen Stufen und Bausteine eines UKW-Empfängers. Der Leser lernt HF-, ZF- und Demodulatorstufen kennen und wird in Spezialschaltungen, wie Rauschsperrer, eingeführt. Erläuterungen der Bauelemente runden die Darstellung der Empfängerprobleme ab. Der dritte Teil bringt für den Praktiker wertvolle Hinweise für Dimensionierung, Aufbau und Abgleich von UKW-Empfängern sowie die Grundlagen der Stereotechnik. – Weitere Kapitel beschäftigen sich mit Zusatzgeräten für Monoempfang, mit der Hi-Fi-Tech-

nik und mit Beispielen für AM/FM-Mehrbereichsempfänger. R.

**Diefenbach. W. Transistor-Handfunk-sprechgeräte für KW und UKW.** Theoretische Grundlagen, Konstruktionsprinzipien und ausführliche Bauanleitungen. = Deutsche Radio-Bücherei, Band 109. Berlin, Jakob-Schneider-Verlag, 1968. 128 S., 87 Abb. Preis Fr. 13.60.

In diesem Buch behandelt der Verfasser nach grundsätzlichen Ausführungen über Senderschaltungen, Modulationsverfahren, NF-Verstärker (Modulatoren), Empfängerschaltungen und Antennen Fragen der Stromversorgung und empfehlenswerte Spezialbauteile. Ein ausführliches Kapitel unterrichtet über die Technik bewährter Handfunk-Sprechgeräte der Industrie. Die folgenden Beschreibungen von Transistor-Handfunk-sprechgeräten für KW und UKW sind gründlich und enthalten sämtliche für den Nachbau wichtigen Angaben, wie Kon-

struktionsspläne, Spulentabellen, Abgleichshinweise usw. Ein Kapitel über die Messtechnik erleichtert Bau und Betrieb der beschriebenen Konstruktionen. R.

**Diefenbach. W. Tonband-Hobby** – Praktikum für Tonbandfreunde. 9. Auflage. Berlin, Jakob-Schneider-Verlag, 1968. 184 S., 161 Abb., 18 Tabellen. Preis Fr. 14.75.

Dieses Buch bringt alles, was der Tonbandfreund von der Praxis des Tonbandgerätes wissen muss, und zählt zu den bewährten Standardwerken. Es berücksichtigt die letzten Fortschritte der Aufnahme- und Wiedergabetechnik, einschliesslich Nachhallerzeugung, Vertonen von Dias und Schmalfilmen, Tricktechnik mit Playback und Multi-Playback sowie der immer interessanter werdenden Stereophonie. Das Werk ist Berater und Nachschlagewerk zugleich. Als Hobby-Buch bringt es auch Bauanleitungen. R.