

<b>Zeitschrift:</b>	Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe
<b>Band:</b>	46 (1968)
<b>Heft:</b>	4
<b>Artikel:</b>	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in anisotropen Medien
<b>Autor:</b>	Schanda, Erwin
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-875645">https://doi.org/10.5169/seals-875645</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in anisotropen Medien<sup>1</sup>

Erwin SCHANDA, Bern

538.566

Zusammenfassung. Für anisotrope Medien muss die Verknüpfung zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  durch einen Tensor zweiter Stufe beschrieben werden. Dieser Tensor tritt in der Wellengleichung an die Stelle der skalaren Dielektrizitätskonstanten oder Permeabilität isotroper Medien. Ionisiertes Gas (Plasma) in einem Magnetfeld verhält sich anisotrop gegenüber elektromagnetischen Wellen, weil die Permittivität zu einem Tensor wird. Bei Ferriten in einem statischen Magnetfeld nimmt die Permeabilität einen tensoriellen Charakter an. Aus der Wechselwirkung zwischen Materie und Wellen resultiert ein disper- siver Charakter dieser Medien, der in Reso- nanz, Nullstellen und imaginären Werten des Brechungsindex zum Ausdruck kommt. Die Übertragungseigenschaften dieser Me- dien werden ausführlich diskutiert und im besonderen einige technische Anwendun- gen der Ferrite für nichtreziproke Netz- werke besprochen.

## Propagation d'ondes électromagnéti- ques dans des milieux anisotropes

Résumé. Il s'agit ici de décrire, pour des milieux anisotropes, la liaison entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  ainsi qu'entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  par un tenseur de second degré. Dans l'équation des ondes, ce tenseur apparaît à la place des constantes diélectriques scalaires ou perméabilité de milieux anisotropes. Le gaz ionisé (plasma) se comporte, dans un champ magnétique, de manière anisotrope par rapport aux ondes électromagnétiques, du fait que la permittivité devient un tenseur. Pour les ferrites placées dans un champ magnétique statique, la perméabilité prend un caractère tensoriel. De l'effet alternatif entre la matière et les ondes résulte un caractère disper- sif de ces milieux, qui s'exprime en résonances, positions zéro et valeurs ima- ginaires de l'indice de réfraction. Les caracté- ristiques de transmission de ces milieux sont discutées à fond, en particulier quel- ques applications techniques des ferrites pour des réseaux non réciproques.

## Propagazione delle onde elettroma- gnetiche nei mezzi anisotropi

Riassunto. Per i mezzi anisotropi il colle- gamento tra  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  rispettivamente tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  va descritto tramite un tensore di secondo grado. Nell'equazione del moto ondulatorio questo tensore subentra alle costanti dielettriche scalari o alla permeabilità di mezzi isotropi. Gas ionizzato (plasma) in un campo magnetico si com- porta in maniera anisotropa rispetto alle onde elettromagnetiche, perché la per- mittività diventa un tensore. Presso i ferriti in un campo magnetico statico la permeabilità assume un carattere tensoriale. Dall'azione reciproca tra la materia e le onde risulta un carattere dispersivo di questi mezzi, che si esprime in risonanze, in posizioni nulle e in valori immaginari dell'in- dice di rifrazione. Le caratteristiche di trasmissione di questi mezzi vengono ampiamente discussi e si descrivono alcune applicazioni tecniche dei ferriti per reti non reciproche.

## 1. Anisotrope Medien

Ein Medium nennt man elektrisch anisotrop, wenn für ver- schiedene Richtungen einer bestimmten elektrischen Feld- stärke die elektrische Erregung in ihm verschiedene Werte annimmt und im allgemeinen die Vektoren  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  nicht mehr dieselbe Richtung haben. Wenn wir uns hier auf lineares Verhalten des Mediums beschränken, dann können wir die drei räumlichen Komponenten der elektrischen Erregung  $\mathbf{D}$  als Linearkombination der drei Komponenten von  $\mathbf{E}$  darstellen [1]

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z \\ D_y &= \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z \\ D_z &= \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z \end{aligned} \quad (1)$$

Da die neun Werte  $\varepsilon_{ij}$  eine räumliche Verknüpfung der beiden Vektoren  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  darstellen, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, nennt man dieses System von neun Zahlen einen Tensor [2]. Das Medium wird also nicht durch eine skalare, sondern durch eine tensorielle Permittivität  $\varepsilon_T$  charakterisiert.

$$\varepsilon_T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dieses Schema von neun (eventuell komplexen) Zahlen kann für eine andere Schreibweise von (1) verwendet werden

<sup>1</sup> Nach einem Vortrag, gehalten anlässlich des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Instituten für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern

$$\mathbf{D} = \varepsilon_T \mathbf{E} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

In gleicher Weise wird ein Medium als magnetisch aniso- trop bezeichnet, wenn die magnetische Induktion für ver- schiedene Richtungen einer bestimmten Magnetfeldstärke verschiedene Werte annimmt und in einer allgemeinen räum- lichen Anordnung die Richtungen von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  nicht über- einstimmen. Die Verknüpfung zwischen Induktion und Feld- stärke

$$\mathbf{B} = \mu_T \mathbf{H} \quad (3)$$

wird durch die tensorielle Permeabilität

$$\mu_T = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

vermittelt.

In anisotropen Medien gibt es immer ausgezeichnete Rich- tungen, die Hauptachsen, für die der Tensor besonders ein- fach wird. Insbesondere sind bei einer speziellen Gruppe anisotroper Medien für diese Richtungen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  parallel zuein- ander, jedoch ist ihr Verhältnis verschieden.

Als besonders einfaches Beispiel gelte in der x-y-Ebene für die Hauptachsen

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x \\ D_y &= \varepsilon_{22} E_y \end{aligned}$$

Der Tensor ist also gegeben durch

$$\varepsilon_T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Wir drehen nun die Feldrichtungen um einen Winkel  $\varphi$  relativ zu den Hauptachsen des Mediums, so dass die ursprünglichen Feldrichtungen aus den neuen  $\bar{E}_x$  und  $\bar{E}_y$  darzustellen sind wie folgt

$$\begin{aligned} E_x &= \bar{E}_x \cos \varphi - \bar{E}_y \sin \varphi \\ E_y &= \bar{E}_x \sin \varphi + \bar{E}_y \cos \varphi \end{aligned}$$

Berechnen wir nun  $\bar{D}$ , wofür dieselbe Koordinatendrehung anzuwenden ist, als Funktion von  $\bar{E}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{D}_x &= (\epsilon_{11} \cos^2 \varphi + \epsilon_{22} \sin^2 \varphi) \bar{E}_x - (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin \varphi \cos \varphi \bar{E}_y \\ \bar{D}_y &= -(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin \varphi \cos \varphi \bar{E}_x + (\epsilon_{11} \sin^2 \varphi + \epsilon_{22} \cos^2 \varphi) \bar{E}_y \end{aligned} \quad (6)$$

Die Glieder in der Nebendiagonale von (6) werden nur für die Hauptachsen ( $\varphi = 0, \varphi = 90^\circ$ ) und den Fall  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$  (Isotropie) null. Der neue Tensor ist symmetrisch um die Hauptdiagonale. Symmetrische Tensoren, wie man sie in der Kristalloptik [3] kennt, lassen sich immer auf die Form (5) zurückführen [2], bei der alle Elemente außer denen der Hauptdiagonale verschwinden. Diese Operation nennt man Diagonalisieren des Tensors. Selbstverständlich gilt dies alles auch für drei Dimensionen.

Wir werden uns im Folgenden hauptsächlich mit Tensoren befassen, die nicht symmetrisch um die Hauptdiagonale sind und sich nicht auf die Form (5) zurückführen lassen. Wie wir sehen werden, ist für das Auftreten solcher unsymmetrischen Tensoren die Anwesenheit eines statischen Magnetfeldes charakteristisch.

In den Maxwell-Gleichungen tritt an die Stelle der skalaren Dielektrizitätskonstante, Permeabilität oder Leitfähigkeit ein entsprechender Tensor.

## 2. Wellenausbreitung in einem kalten, homogenen Plasma [4, 5]

Plasma ist ein ionisiertes Gas, das jedoch nach außen elektrisch neutral erscheint, weil gleichviele positive wie negative Ladungsträger anwesend sind. Die Leitfähigkeit eines Plasmas ist wegen der freien Ladungsträger verhältnismäßig gross. Die elektrische Stromdichte  $j$  ist gegeben durch die elektrische Ladungsdichte  $ne$ , die mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegt, also

$$j = nev \quad (7)$$

wobei  $e$  die Elementarladung und  $n$  die Zahl der Ladungsträger je Volumeneinheit sind. Wir interessieren uns hier nur für hochfrequente Wechselfelder und berücksichtigen nur den Beitrag der Elektronen am Wechselstrom  $j$ , weil derjenige der Ionen wegen der viel grösseren Trägheit vernachlässigt werden darf. Der Zusammenhang zwischen Teilchengeschwindigkeit  $v$  und elektrischem Feld  $E$  wird durch das Kraftgesetz

$$m \frac{dv}{dt} = eE \quad (8)$$

geliefert. Es ist  $m$  die Elektronenmasse. Die Kraft auf geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern ist durch die Lorentz-Formel

$$m \frac{dv}{dt} = e [E' + (v \times B)] \quad (8a)$$

gegeben. Zur Vereinfachung der Rechnung sei hier  $E' + (v \times B) = E$  gesetzt. Wir wollen nur harmonische Schwingungen betrachten und für  $d/dt = i\omega$  schreiben, worin  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $i$  die Einheit der imaginären Zahlen sind. Die Geschwindigkeit wird also

$$v = -\frac{i e}{\omega m} E \quad (9)$$

Wir wollen an dieser Stelle eine weitere Einschränkung anbringen: Wir setzen voraus, dass die Teilchengeschwindigkeit zufolge der thermischen Bewegung vernachlässigt werden darf gegen (9). Ist diese Bedingung erfüllt, so haben wir es mit einem kalten Plasma zu tun. Die Stromdichte wird mit diesen Voraussetzungen

$$j = -\frac{i n e^2}{\omega m} E \quad (10)$$

und daraus die Leitfähigkeit

$$\sigma = -\frac{i n e^2}{\omega m} \quad (11)$$

Die elektrische Polarisation des Gases ist meistens sehr gering, so dass wir die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r \approx 1$  setzen dürfen. Die für die Wellengleichung benötigte komplexe Dielektrizitätskonstante [6] wird mit (11)

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_o \left( 1 - \frac{ne^2}{m \epsilon_o \omega^2} \right) = \epsilon_o \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (12)$$

wo zur Abkürzung

$$\omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_o} \quad (13)$$

eingeführt wurde. Man nennt  $\omega_p$  die Plasmafrequenz. Für das homogene Plasma ist die Dielektrizitätskonstante noch ein Skalar.

Die komplexe Dielektrizitätskonstante (12) in die Wellengleichung ([7] Formel (64)) für die elektrische Feldstärke eingesetzt, gibt

$$\text{rot rot } E = \omega^2 \epsilon_o \mu_o \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) E \quad (14)$$

Wir wollen nun den elektrischen Feldvektor  $E$  zerlegt denken in die zur Wellenfortpflanzung parallele Komponente  $E_{||}$  und die dazu transversale Komponente  $E_{\perp}$ .

Bei der Rotor-Operation verschwindet der Anteil der Parallelkomponente, so dass dafür gilt

$$(\omega^2 - \omega_p^2) E_{\parallel} = 0 \quad (15)$$

Für die transversale Feldkomponente bedeutet die zweimalige Rotoroperation dasselbe wie eine Multiplikation mit  $-\gamma^2$ , wenn die Wellenfortpflanzung durch den Faktor  $\exp[i\omega t - \gamma z]$  mit der komplexen Fortpflanzungskonstanten  $\gamma = \alpha + i\beta$  ausgedrückt wird. Aus (14) wird somit für die Transversalkomponente

$$-\gamma^2 E_{\perp} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) E_{\perp} \quad (16)$$

so dass  $\gamma$  gegeben ist durch

$$\gamma = i\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (17)$$

Die Lösung (15) für die Longitudinalkomponente bedeutet, dass sich eine Schwingung parallel zur Richtung des elektrischen Feldes nicht ausbreiten kann. Es kommt nur zu einer am Ort verbleibenden Oszillation, die man auch Plasma-Oszillation oder Elektrostatische Welle nennt. Sie kann nur in einer einzigen Frequenz, nämlich der durch die Elektronendichte vorgegebenen Plasmafrequenz, auftreten.

Die Transversalkomponente dagegen kann sich im Raum ausbreiten, allerdings, wie (17) zeigt, nur für  $\omega > \omega_p$  ungedämpft. Für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz wird eine Welle aperiodisch abklingen. Plasma zeigt also einen Hochpass-Charakter wie Hohlleiter. Figur 1 zeigt den Zusammenhang  $\omega^2 = \omega_p^2 + \beta^2/\epsilon_0 \mu_0$  zwischen Frequenz und Phasenkonstante  $\beta$  für ungedämpfte Wellenausbreitung.

Die Ionosphäre der Erde mit einer mittleren Elektronendichte von etwa  $10^{12}$  je Kubikmeter ( $\omega_p \approx 6 \cdot 10^7$  1/sec) ist für Frequenzen unterhalb etwa 10 MHz undurchlässig. Die Wellen mit zu tiefer Frequenz werden an ihr reflektiert. Die Zunahme der Plasmadichte zur Ionosphäre hin erfolgt mehr oder weniger kontinuierlich, daher sind die Schichten, bei denen die Reflexionen erfolgen, für verschiedene Frequenzen verschieden weit entfernt. Der Vorgang dieser «Reflexion» ist noch eine kurze strahlenoptische Erklärung wert. Setzen wir eine kontinuierliche Elektronendichtezunahme voraus, dann heisst dies für eine nach oben gestrahlte Welle (Fig. 2), dass der Bre-

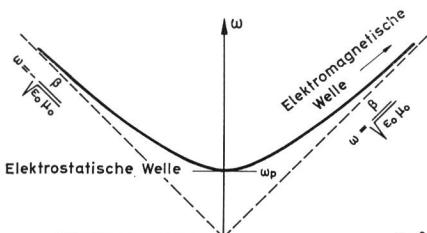


Fig. 1  
Das  $\omega$ - $\beta$ -Diagramm für kaltes homogenes Plasma

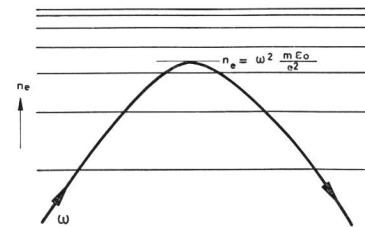


Fig. 2

Zur strahlenoptischen Erklärung der Reflexion einer Welle in einem Plasma mit zunehmender Dichte  $n_e$ , das heisst abnehmendem Brechungsindex. Die Umkehr erfolgt in der Tiefe, bei der der Brechungsindex null ist

chungsindex des Medium kontinuierlich abnimmt, also der Strahl, der die Wellenausbreitungsrichtung darstellen soll, vom Lot weggebogen wird, um schliesslich bei der Schicht mit Brechungsindex null ( $\omega_p = \omega$ ) umzukehren.

Bei höheren Gasdichten kann die dämpfende Wirkung von den Teilchenstößen in der Bewegungsgleichung nicht mehr vernachlässigt werden. Die bremsende Kraft ist durch den Teilchenimpuls  $mv$  mal Anzahl der Zusammenstöße  $v$  je Zeiteinheit gegeben, und sie wirkt der beschleunigenden Kraft des elektrischen Feldes entgegen.

Die Kraftgleichung lautet daher

$$m \frac{dv}{dt} = e \mathbf{E} - mv \cdot \nu \quad (18)$$

Für harmonische Schwingungen ( $d/dt = i\omega$ ) wird

$$\nu = -i \frac{e}{\omega m (1 - i\nu/\omega)} \mathbf{E} \quad (19)$$

Die Zusammenstöße der Teilchen wirken sich wie eine Veränderung ihrer Masse aus.

Durch Einsetzen von (19) in (7) erhält man die Leitfähigkeit  $\sigma$ , mit der die komplexe Dielektrizitätskonstante wird

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 - i\nu/\omega)} \right] \quad (20)$$

Die Fortpflanzungskonstante  $\gamma$  kann aus (17) berechnet werden, wenn dort statt  $\omega_p^2$  eingesetzt wird  $\omega_p^2 / (1 - i\nu/\omega)$ . Die exakte Berechnung der Dämpfungskonstanten  $\alpha$  und der Phasenkonstanten  $\beta$  liefert komplizierte Ausdrücke; begnügt man sich mit einer Näherung für den Fall, dass die Signalfrequenz genügend grösser ist als die Plasma- und die Stossfrequenz, dann darf die Dämpfungskonstante näherungsweise

$$\alpha \approx \nu \frac{\omega_p^2 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{2} \quad (21)$$

gesetzt werden, während für die Phasenkonstante näherungsweise (17) gilt. Die Dämpfung nimmt nach höheren Signal-

frequenzen sehr rasch ab. Für die Longitudinalwelle (Plasma-Oszillation) erhält man als Lösung

$$\omega = \frac{i\nu}{2} \pm \sqrt{\omega_p^2 - \nu^2/4} \quad (22)$$

worin der Wurzelausdruck die neue Eigenfrequenz angibt und der Imaginärteil die reziproke Abklingzeit darstellt.

### 3. Der Effekt eines Magnetfeldes in Plasma

Es soll für diesen Fall der Einfluss von Teilchenstößen wieder vernachlässigt werden. Die Kraftgleichung für einen bewegten Ladungsträger in einem elektromagnetischen Wechselfeld und einem statischen Magnetfeld lautet

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (23)$$

Die statische Induktion  $\mathbf{B}$  liege in der Richtung der z-Achse eines Koordinatensystems. Das beschleunigende elektrische Feld  $\mathbf{E}$  sei ein Wechselfeld mit der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Die Vektorgleichung (23) in Komponenten zerlegt, lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x &+ i \frac{eB}{m\omega} \mathbf{v}_y + \mathbf{O} = -i \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_x \\ -i \frac{e}{m\omega} \mathbf{B} \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y &+ \mathbf{O} = -i \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_y \\ \mathbf{O} &+ \mathbf{O} + \mathbf{v}_z = -i \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}_z \end{aligned} \quad (24)$$

wobei alle Glieder mit Geschwindigkeitskomponenten auf eine Seite gebracht und geeignet normiert sind.

Wir führen hier zur Abkürzung

$$\frac{eB}{m} = \omega_g \quad (25)$$

die Zyklotron- oder Gyrofrequenz ein.

Aus dem linearen Gleichungssystem (24) können die Geschwindigkeitskomponenten als Funktion der elektrischen Feldstärke ausgerechnet und mit (7) kann die Leitfähigkeit bestimmt werden. Wir schreiben den Strom in Matrixform

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = -i \frac{n e^2}{\omega m} \begin{pmatrix} 1 & -i \frac{\omega_g}{\omega} & 0 \\ i \frac{\omega_g}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega_g^2/\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (26)$$

Der Faktor vor der Matrix ist allen Elementen der Matrix gemeinsam. Es sind  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{E}$  Vektoren, und sie werden durch den Leitfähigkeits-Tensor  $\sigma_T$  miteinander verknüpft. Für die Wellengleichung benötigen wir eine der Dielektrizitätskonstanten entsprechende Grösse. Wir erhalten durch

$$\epsilon_T = \epsilon_o \left( 1_T - \frac{i}{\omega \epsilon_o} \sigma_T \right) \quad (27)$$

den Dielektrizitäts-Tensor.

Es ist dabei der Einheitstensor durch

$$1_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

definiert. Der Dielektrizitäts-Tensor lautet ausgeschrieben

$$\epsilon_T = \epsilon_o \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2 & i \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega (\omega^2 - \omega_g^2)} & 0 \\ -i \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega (\omega^2 - \omega_g^2)} & \omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Unter dem Einfluss des statischen Magnetfeldes ist das Plasma gegenüber elektromagnetischen Wellen anisotrop geworden. Der Dielektrizitäts-Tensor ist unsymmetrisch um die Hauptdiagonale und lässt sich nicht diagonalisieren. Man erkennt aus (29), dass die Anisotropie ausschliesslich auf das Magnetfeld zurückzuführen ist, weil der Übergang zu  $\omega_g \rightarrow 0$  die Isotropie wieder herstellt. Für sehr hohe Felder ( $\omega_g \rightarrow \infty$ ) bleibt das Plasma anisotrop, jedoch verschwindet die Asymmetrie des Tensors

$$\lim_{\omega_g \rightarrow \infty} \epsilon_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Praktisch heisst dies, dass sich die Elektronen nicht mehr senkrecht zum Magnetfeld bewegen, weil sie durch dieses in seine Richtung gezwungen werden.

Betrachten wir eine Wellenfortpflanzung senkrecht zum Magnetfeld, das in die Richtung der z-Achse eines Koordinatensystems weist; die Fortpflanzungsrichtung der Welle sei die x-Richtung, so dass für alle Feldgrössen gilt  $\partial/\partial x = -\gamma, \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ .

Aus der Wellengleichung (linke Seite wie in (14)) findet man mit den gemachten Voraussetzungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma^2 E_y \\ -\gamma^2 E_z \end{pmatrix} = \omega^2 \mu_o \epsilon_T \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (31)$$

Man erhält also ein System von drei homogenen Gleichungen für die drei Komponenten des elektrischen Feldes. Nichttriviale Lösungen solcher Gleichungen gibt es nur dann, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet, also

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \epsilon_o \mu_o \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_g^2} & i \omega^2 \epsilon_o \mu_o \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega (\omega^2 - \omega_g^2)} & 0 \\ -i \omega^2 \epsilon_o \mu_o \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega (\omega^2 - \omega_g^2)} & \gamma^2 + \omega^2 \epsilon_o \mu_o \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_g^2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 + \omega^2 \epsilon_o \mu_o \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

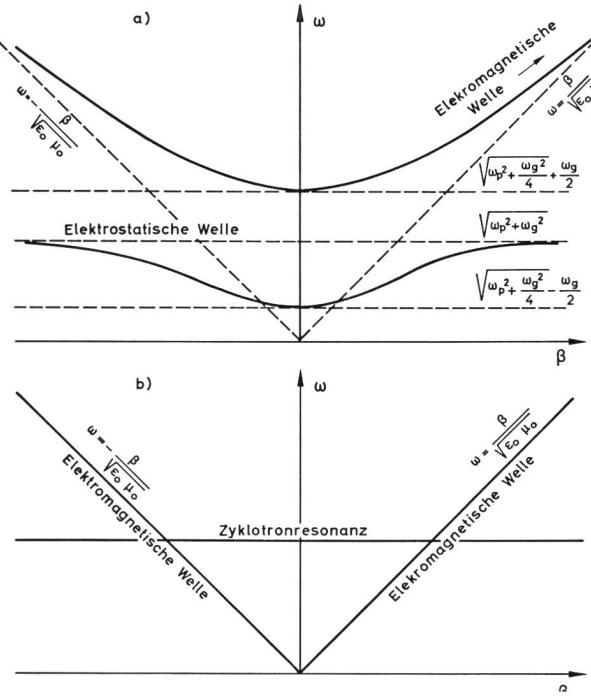


Fig. 3

a)  $\omega$ - $\beta$ -Diagramm für Wellenausbreitung in einem magnetisierten Plasma senkrecht zum Magnetfeld. Horizontale Tangente bei  $\beta = 0$  bedeutet verschwindende Gruppengeschwindigkeit für unendliche Phasengeschwindigkeit. Für den Grenzfall der elektrostatischen Welle verschwindet die Gruppen- und die Phasengeschwindigkeit  
b) Das  $\omega$ - $\beta$ -Diagramm für den Grenzfall verschwindender Plasmafrequenz

Wir betrachten zwei Spezialfälle. Für  $E_x = E_y = 0$ , also lineare Polarisation des elektrischen Feldvektors in Richtung des statischen Magnetfeldes, bleibt von der Determinante nur mehr das Element

$$\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} = 0$$

Übrig. Dies ist aber identisch mit (17), das heißt, dass auch die Ausbreitungseigenschaften dieselben sind, wie sie in Figur 1 dargestellt wurden.

Wählt man  $E_x \neq 0$ ,  $E_y \neq 0$  und nur  $E_z = 0$ , also die Polarisation des elektrischen Feldes transversal zum statischen Magnetfeld, so bleibt die Unterdeterminante aus den vier Elementen bestehen, die durch Streichung der letzten Zeile und der letzten Spalte von (32) übrigbleiben. Ihre Auswertung liefert

$$\gamma^2 = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 - \omega_g^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2} \quad (33)$$

und ist in Figur 3a als  $\omega$ - $\beta$ -Diagramm graphisch dargestellt. Die strichliert gezeichneten Geraden stellen die Asymptoten dar. Für den Grenzfall  $\omega_g \rightarrow 0$  geht Figur 3a über in Figur 1. Der Grenzfall  $\omega_p \rightarrow 0$  ist in Figur 3b dargestellt.

Aus der Gleichung (31) kann man durch Einsetzen der einzelnen Elemente des  $\epsilon$ -Tensors und (33) noch finden, dass das elektrische Feld eine elliptische Polarisation aufweisen muss, nämlich

$$E_y/E_x = -i \frac{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2}{\omega_p^2 \omega_g} \cdot \omega \quad (34)$$

Für sehr hohe Frequenzen wird daraus eine lineare Polarisation in der  $y$ -Richtung, das heißt transversal zur Fortpflanzungsrichtung. Dagegen wird für  $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_g^2$  der andere Grenzfall, nämlich die elektrostatische Plasma-Oszillation, auftreten.

Wählen wir die Fortpflanzungsrichtung der Welle parallel zum statischen Magnetfeld ( $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ ,  $\partial/\partial z = -\gamma$ ), so liefert die Wellengleichung

$$\begin{pmatrix} -\gamma^2 E_x \\ -\gamma^2 E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (35)$$

und in der zugehörigen Determinante erscheint ein  $\gamma^2$  im Ausdruck links oben als Summand und verschwindet dafür aus dem Term rechts unten (zum Vergleich (32)). Das Magnetfeld hat nun keinen Einfluss mehr auf die Plasma-Oszillation ( $\omega = \omega_p$ ). Aus dem Nullsetzen der Determinante folgt für die Fortpflanzungskonstante

$$\gamma^2 = -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega \pm \omega_g)} \right] \quad (36)$$

Für die transversalen Komponenten  $E_x$  und  $E_y$  gibt es nun als Eigenlösungen positive und negative Zirkularpolarisation

$$E_y/E_x = \pm i \quad (37)$$

wie man aus (35) unter Verwendung von  $\gamma$  aus (36) leicht findet.

In Figur 4 ist der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Phasenkonstante der ungedämpften Wellenausbreitung parallel zum statischen Magnetfeld für  $\omega_p > \omega_g$  dargestellt. Die

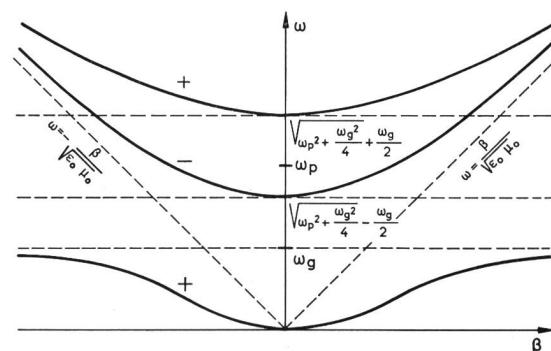


Fig. 4

Das  $\omega$ - $\beta$ -Diagramm für Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld im Plasma. Die ordentliche Welle ist mit  $-$ , die ausserordentliche mit  $+$  gekennzeichnet

positiv beziehungsweise negativ zirkular polarisierten Wellen werden auch ausserordentliche und ordentliche Welle genannt, die zu ihnen gehörigen Kurven sind mit + oder - markiert. Ist  $\omega_p < \omega_g$ , dann rückt ein Teil der mittleren Kurve unterhalb von  $\omega_g$ , dann gibt es auch für  $\omega < \omega_g$  in beiden Ausbreitungsrichtungen zu jeder Frequenz eine ordentliche und eine ausserordentliche Welle mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten.

Die ausserordentliche Welle hat für  $\omega = \omega_g$  eine Resonanz. Es stimmt dann die Frequenz mit der Zyklotronfrequenz und ausserdem der Drehsinn der Zirkularpolarisation mit der Bewegungsrichtung der Ladungsträger im Magnetfeld überein. Wir haben mit (37) gefunden, dass sich parallel zum Magnetfeld nur zirkularpolarisierte Wellen ausbreiten können. Eine linearpolarisierte Welle kann sich also nur wegen der beiden entgegengesetzt zirkularpolarisierten Wellen, aus denen sie zusammengesetzt ist, ausbreiten. Aus Figur 4 und Formel (36) geht hervor, dass diese beiden Wellen verschiedene Phasengeschwindigkeiten haben. Unter der Voraussetzung  $\omega \gg \omega_g$  und  $\omega \gg \omega_p$  ist

$$\beta_- - \beta_+ \approx \omega / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{2 \omega_g / \omega}{1 - \omega_g^2 / \omega^2} \quad (38)$$

Setzt man nach einer Strecke  $l$  die beiden Teilwellen wieder zusammen, so findet man die linear polarisierte Welle um den Winkel

$$\Theta = \frac{1}{2} (\beta_- - \beta_+) l \quad (39)$$

gegenüber der ursprünglichen Polarisationsebene verdreht. Man nennt diesen Effekt die Faraday-Rotation der Polarisationsebene.

In Tabelle I sind für die Ionosphäre und den interplanetaren Raum typische Werte für die Charakterisierung des Plasmas angegeben.

Tabelle I

	Elektronendichte [1/m³]	$\omega_p$ [1/s]	Induktion [Vs/m²]	$\omega_g$ [1/s]
Ionosphäre	$10^{12}$	$6 \cdot 10^7$	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$10^7$
Interplanetarer Raum	$10^7$	$2 \cdot 10^5$	$0,5 \cdot 10^{-8}$	$10^3$

#### 4. Das eingefrorene Magnetfeld

Wir betrachten einen Raum, der von Plasma erfüllt und in dem ein statisches Magnetfeld anwesend ist, und untersuchen, wie das Magnetfeld ändert, wenn sich das Plasma bewegt. Der magnetische Fluss durch eine Fläche  $F$  (Fig. 5) ist

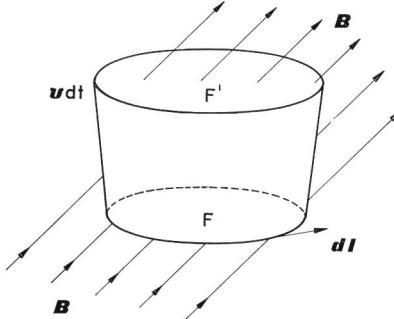


Fig. 5

Die Fläche  $F$  bewegt sich mit dem magnetisierten Plasma mit der Geschwindigkeit  $v$

$$\Phi = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} \quad (40)$$

und er kann sich ändern, wenn sich entweder  $B$  oder  $F$  mit der Zeit ändert, also

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} + \int_M \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \quad (41)$$

Das zweite Integral gibt die Veränderung von  $\Phi$  an, die durch Verschieben und Deformieren der Fläche  $F$  in eine Fläche  $F'$  mit der Geschwindigkeit  $v$  entsteht (Fig. 5) und ist nichts anderes als der netto Fluss durch die Mantelfläche  $M$ , die durch das Verschieben der Randkurve von  $F$  entsteht. Das Element der Randkurve sei  $d\mathbf{l}$ .

Die Kraft auf einen Ladungsträger im elektromagnetischen Feld ist durch die Lorentz-Formel (8a) gegeben. Der Rotor der Stromdichte ist

$$\text{rot } \mathbf{j} = \sigma \text{ rot } \mathbf{E}' + \sigma \text{ rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Aus der zweiten Maxwellgleichung folgt

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\text{rot } \mathbf{E}' = \text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \text{rot } \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \quad (42)$$

Anwendung des Stokesschen Integralsatzes auf das zweite Integral in (41) und Einsetzen von (42) in das erste Integral gibt

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_F \text{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{F} \quad (43)$$

Die Änderung des magnetischen Flusses durch einen Querschnitt im Plasma wird durch die Leitfähigkeit gebremst, die hier wie die Viskosität einer Flüssigkeit wirkt. Für genügend grosse Leitfähigkeit wird die rechte Seite von (43) verschwindend klein im Verhältnis zur Geschwindigkeit, mit der sich das Plasma bewegt und deformiert. Die Magnetfeldlinien müssen dann alle lokalen Bewegungen und Deformationen des Plasmas mitmachen, sie sind im Plasma «eingefroren».

Zum Thema elektromagnetische Wellen im Plasma sind ausser [4] und [5] noch einige der wichtigsten Monographien [8, 9, 10, 11] im Literaturverzeichnis angegeben.

## 5. Anisotropes Verhalten von Ferrit

Unter dem Namen Ferrit sind eine Reihe magnetischer Metalloxyde in Verwendung, die sich unter bestimmten Voraussetzungen gegenüber elektromagnetischen Wellen anisotrop verhalten. Bekanntlich röhren die magnetischen Eigenchaften ferromagnetischer Stoffe von den permanent vorhandenen magnetischen Momenten unkompenzierter Spins von Elektronen der Atomhülle her. Die sogenannte Austausch-Wechselwirkung zwischen benachbarten Atomen ist die Ursache dafür, dass sich grössere Gebiete (bis zu 0,1 mm), die Weissschen Bezirke, innerhalb des Kristallgitters dieser Stoffe ausbilden, in denen alle Spins parallel gerichtet sind. Bei den anti-ferromagnetischen Stoffen ist die Austausch-Wechselwirkung gerade so geartet, dass die Spins benachbarter Atome entgegengesetzt gerichtet sind, so dass diese Elemente nach aussen hin unmagnetisch erscheinen. Es bestehen somit im Kristallgitter zwei Untergitter mit entgegengesetzt orientierten Magnetisierungen. Bei den ferrimagnetischen Substanzen (Ferrite) gibt es ebenfalls zwei Subgitter mit antiparalleler Spineinstellung, jedoch sind ihre magnetischen Momente verschieden gross, so dass eine makroskopische Magnetisierbarkeit übrigbleibt, die allerdings viel geringer ist als die der ferromagnetischen Metalle.

Die am häufigsten verwendeten Ferrite haben die chemische Formel  $Me^{II} Fe^{III} O_4$ , wobei  $Me^{II}$  irgend ein zweiwertiges Metall bedeutet, während mit  $Fe^{III}$  das dreiwertige Eisen gemeint ist. Die am meisten verwendeten zweiwertigen Elemente sind  $Mn$ ,  $Ni$ ,  $Zn$ ,  $Cu$  und Kombinationen daraus. Oft wird auch ein Teil des  $Fe^{III}$  durch ein anderes dreiwertiges Metall, zum Beispiel  $Al^{III}$  oder  $Cr^{III}$ , ersetzt. Diese Verbindungen kristallisieren mit einem kubischen Gitter (dem Spinell-Gitter) aus (12).

Ein sehr wichtiger Aspekt der Ferrite – er erlaubt erst die technische Anwendung des anisotropen Verhaltens – ist ihr hoher spezifischer Widerstand. Im Gegensatz zu den üblichen Ferromagnetika ( $\sigma \approx 10^7 \frac{1}{\Omega m}$ ) sind die ferrimagnetischen Metalloxyde Halbleiter, und ihre Leitfähigkeit kann bei sorgfältiger Technologie bis zu  $10^{-5} \frac{1}{\Omega m}$  und noch tiefer gebracht werden. Daher ist die Eindringtiefe eines Wellenfeldes bei einigen Gigahertz noch mehrere Meter, während sie für Eisen und seine Legierungen nur noch mehrere Mikron beträgt. In Ferrit kann also hochfrequentes Wechselfeld eindringen und mit dem Spin der Elektronen wechselwirken.

Diese Wechselwirkung soll nun anhand eines einfachen klassischen Modells erläutert werden [13]. Das spinnende Elektron stelle man sich als einen Kreisel vor, der – solange keine äussere Kraft auf ihn einwirkt – sich um seine Achse dreht. Sein Drehimpuls sei  $\mathbf{p}$ , und weil das Elektron eine negative elektrische Ladung hat, wird es antiparallel zu  $\mathbf{p}$  ein ma-

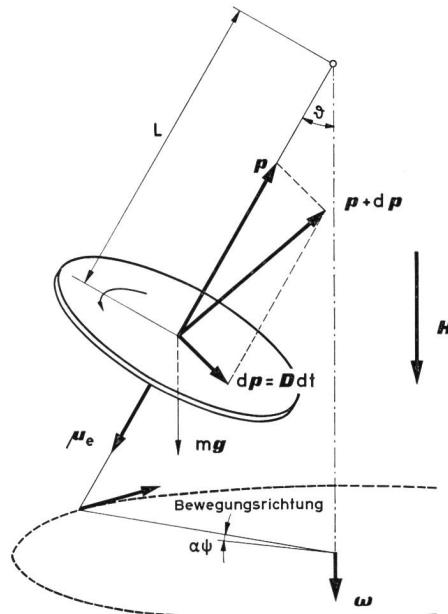


Fig. 6  
Kreiselmodell zur Erklärung der Präzessionsfrequenz

gnetisches Moment  $\vec{\mu}_e$  geben (Figur 6). Durch das Anlegen eines Magnetfeldes  $H$  wird eine Kraft auf das magnetische Moment ausgeübt, die es in Richtung des magnetischen Feldes bewegen will. Diese Kraft wirkt auf das spinnende Elektron genauso – um beim mechanischen Modell zu bleiben – wie die Schwerkraft  $mg$  auf einen Kreisel, der an seinem oberen Ende reibungslos und frei drehbar gelagert ist und dessen unteres Ende man loslässt, nachdem man ihn unter dem Winkel  $\vartheta$  gegen die Lotrechte in Drehung versetzt hat (Fig. 6). Bekanntlich fällt der Kreisel nicht in die Lage parallel zur Schwerkraft, sondern präzessiert um eine Achse parallel zu ihr. Das Elektron präzessiert um eine Achse parallel zum Magnetfeld. Das von der Gravitation verursachte Drehmoment auf den Kreisel ist  $\mathbf{D} = m(\mathbf{L} \times \mathbf{g})$ . Dadurch wird der Drehimpuls  $\mathbf{p}$  während der Zeit  $dt$  um  $d\mathbf{p} = \mathbf{D}dt$  verändert. Die Frequenz, mit der die Präzession stattfindet, ist  $\omega = d\psi/dt$ ;  $d\psi$  ist aber gegeben durch das Verhältnis von  $arc\ dp \approx dp$  (bezogen auf die Präzessionsachse) und die senkrecht zur Präzessionsachse liegende Komponente des Drehimpulsvektors, also  $d\psi = \frac{dp}{p \sin \vartheta}$ .

In vektorieller Schreibweise kann daher die Beziehung zwischen Frequenz und Drehimpuls geschrieben werden wie

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{p} \quad (44)$$

Es ist dies die Bewegungsgleichung für den Kreisel. Für ein bestimmtes geladenes Teilchen ist das Verhältnis aus magnetischem Moment und Drehimpuls konstant und wird das

gyromagnetische Verhältnis dieses Teilchens genannt. Für das Elektron ist es

$$\Gamma = \frac{\mu_e}{p} = \mu_o \cdot \frac{e}{2m} \cdot g = 1,1 \cdot g \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{AS}} E \quad (45)$$

wobei  $g \approx 2$  der Ladefaktor ist.

An die Stelle des mechanischen Drehmoments  $\mathbf{D}$  tritt ein «magnetisches Drehmoment»

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mu_e \times \mathbf{H} \quad (46)$$

Die notwendige Gleichwertigkeit von (44) und (46) und Einsetzen von (45) ergibt

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Gamma(\mathbf{p} \times \mathbf{H}) = (\vec{\omega} \times \mathbf{p}) \quad (47)$$

woraus die Proportionalität zwischen Präzessionsfrequenz eines Elektrons und dem angelegten Magnetfeld folgt

$$\omega = -\Gamma H \quad (48)$$

Wenn  $N$  unkomponierte Spins je Volumeneinheit in einem Medium vorhanden sind, dann ist bei Parallelstellung aller Spins die Magnetisierung je Volumeneinheit  $M = N\mu_e$ , und mit (45) und (46) wird die Gleichung für die Magnetisierung

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \Gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (49)$$

Es ist dabei vorausgesetzt, dass die gegenseitige Wechselwirkung der Spins vernachlässigt werden darf.

Lässt man nun ausser dem statischen Magnetfeld  $H_o$  in  $z$ -Richtung noch das hochfrequente Magnetfeld einer elektromagnetischen Welle  $\mathbf{H}_1 e^{i\omega t}$  auf das Medium einwirken, so bewirkt dieses eine der statischen überlagerte hochfrequente Magnetisierung. Die Magnetfeld- und Magnetisierungsvektoren in Komponentenschreibweise lauten dann bis auf einen Phasenwinkel

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (H_{1x} e^{i\omega t}, H_{1y} e^{i\omega t}, H_o + H_{1z} e^{i\omega t}) \\ \mathbf{M} &= (M_{1x} e^{i\omega t}, M_{1y} e^{i\omega t}, M_o + M_{1z} e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (50)$$

Wir setzen (50) in (49) ein und nehmen an, dass die hochfrequente Feldstärke viel kleiner als die statische sei, so dass wir sie bei der Summenbildung gegen die letztere vernachlässigen dürfen. Dasselbe gilt dann für die Magnetisierungen, solange sie lineare Funktionen des Magnetfeldes sind. Man darf dann aber auch Produkte der hochfrequenten Amplituden vernachlässigen gegen lineare Glieder. Aus (49) folgt somit

$$i\omega \begin{pmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} M_{1y} H_o - H_{1y} M_o \\ H_{1x} M_o - M_{1x} H_o \\ 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Lösen wir dies nach den Komponenten der hochfrequenten Magnetisierung auf

$$\begin{aligned} M_{1x} &= \frac{\Gamma^2 H_o M_o H_{1x} - i\omega \Gamma M_o H_{1y}}{\Gamma^2 H_o^2 - \omega^2} = \chi_{xx} H_{1x} + \chi_{xy} H_{1y} \\ M_{1y} &= \frac{i\omega \Gamma M_o H_{1x} + \Gamma^2 H_o M_o H_{1y}}{\Gamma^2 H_o^2 - \omega^2} = -\chi_{xy} H_{1x} + \chi_{xx} H_{1y} \end{aligned} \quad (52)$$

so erhalten wir einen tensoriellen Zusammenhang zwischen hochfrequenter Magnetisierung und Magnetfeldstärke.

Der Zusammenhang zwischen Induktion, Magnetisierung und Feldstärke

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M} = (1_T + \chi_T) \mathbf{H} = \mu_T \mathbf{H} \quad (53)$$

liefert die tensorielle Permeabilität in der Polderschen Schreibweise [14].

$$\mu_T = \mu_o \begin{pmatrix} \mu & -iK & 0 \\ iK & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

wo  $\mu = 1 + \chi_{xx}$  und  $iK = -\chi_{xy}$  bedeuten. Aus (52) erkennt man, dass es bei  $\omega = |\Gamma H|$  eine Resonanz gibt.

Die bisherige Ableitung ist gemacht, ohne Verluste zu berücksichtigen. Tatsächlich sind wegen des Verlustmechanismus [15] die Elemente des Tensors  $\mu = \mu' - i\mu''$  und  $K = K' - iK''$  komplex [16]. Ihr Verlauf als Funktion des statischen Magnetfeldes bei festgehaltener Frequenz ist in Figur 7 dargestellt.

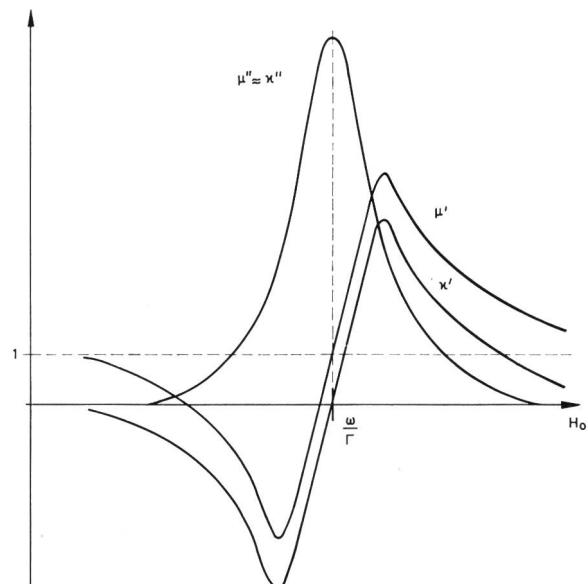


Fig. 7

Typischer Verlauf der Real- ( $\mu'$ ,  $K'$ ) und Imaginärteile ( $\mu''$ ,  $K''$ ) der Elemente des Permeabilitätstensors als Funktion des angelegten statischen Magnetfeldes. Gyromagnetische Resonanz tritt auf bei  $\omega = \Gamma H_o$ . Für grosse Magnetfelder geht  $\mu'$  asymptotisch nach eins und  $\chi'$  nach null

Weil in der klassischen Beschreibung – wie wir sie soeben gemacht haben – das Verhalten des Elektronenspin im elektromagnetischen Feld verglichen wird mit dem Verhalten eines Kreisels, der periodisch (Frequenz  $\omega$ ) in seiner natürlichen Präzession gestört wird und eine Resonanz zeigt, wenn diese Frequenz mit der Präzessionsfrequenz ( $|I' H|$ ) übereinstimmt, nennt man ein Medium, bei dem dieser Effekt ausgenützt werden kann, ein gyromagnetisches Medium.

## 6. Wellen im gyromagnetischen Medium

Wir verwenden nun die tensorielle Permeabilität in der Wellengleichung für das hochfrequente Magnetfeld

$$\text{rot rot } \mathbf{H}_1 = \omega^2 \epsilon \mu_T \mathbf{H}_1 \quad (55)$$

und setzen das gyromagnetische Medium als räumlich unbegrenzt voraus. Die Wellenausbreitung erfolge in der Richtung eines Einheitsvektors  $\mathbf{n}$ , der einen beliebigen Winkel zur z-Achse (Richtung des statischen Magnetfeldes) einschliesst, und es sei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor [17]. Für eine vollständige Beschreibung der hochfrequenten Feldstärke müssen ihre Komponenten in (50) mit dem Faktor  $\exp(-\gamma n \cdot \mathbf{r})$  multipliziert werden, wo  $\gamma = \alpha + i\beta$  wieder die komplexe Fortpflanzungskonstante bedeutet.

Bekanntlich gilt [18] für die Vektoroperation auf der linken Seite von (55) die Identität  $\text{rot rot } \mathbf{H}_1 = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H}_1) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H}_1$ , ausgedrückt mit dem Nabla-Operator, der in unserem Fall bedeutet  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = -\gamma \mathbf{n}$ . Angewendet auf (55) wird dies zu

$$\gamma^2 [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1] - n^2 \mathbf{H}_1 = \omega^2 \epsilon \mu_T \mathbf{H}_1 \quad (56)$$

Legen wir nun die Richtung der Wellenausbreitung ( $\mathbf{n}$ ) in die x-z-Ebene und lassen sie mit der z-Richtung den Winkel  $\delta$  einschliessen, so dass  $n_x = \sin \delta$ ,  $n_y = 0$ ,  $n_z = \cos \delta$  werden. Setzt man noch (54) für  $\mu_T$  ein, so erhalten wir aus (56) drei homogene, lineare Gleichungen in den drei Komponenten des Magnetfeldes. Nichttriviale Lösungen gibt es nur dann, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet.

$$\begin{vmatrix} -\gamma^2 \cos^2 \delta - \omega^2 \epsilon \mu_o \mu & i \omega^2 \epsilon \mu_o K & \gamma^2 \sin \delta \cos \delta \\ -i \omega^2 \epsilon \mu_o K & -\gamma^2 - \omega^2 \epsilon \mu_o \mu & 0 \\ \gamma^2 \sin \delta \cos \delta & 0 & -\gamma^2 \sin^2 \delta - \omega^2 \epsilon \mu_o \end{vmatrix} = 0 \quad (57)$$

Aus (57) erhält man eine Gleichung vierten Grades für die unbekannte Fortpflanzungskonstante  $\gamma$ . Wir wollen hier nur zwei Spezialfälle, nämlich longitudinales statisches Magnetfeld ( $\delta = 0$ ) und transversales Feld ( $\delta = 90^\circ$ ) diskutieren. Stimmen die Richtungen des statischen Magnetfeldes und der Wellenfortpflanzung überein ( $\delta = 0$  oder  $\delta = \pi$ ), so vereinfacht sich (57) stark, und man erhält für die Fortpflanzungskonstante die beiden Lösungen

$$\gamma_{\pm} = i \omega \sqrt{\epsilon \mu_o (\mu \pm K)} \quad (58)$$

Aus (52) schliessen wir, dass eine Umkehr der Magnetisierungsrichtung die beiden Lösungen (58) bewirkt.

Eine andere Eigenschaft der Wellenausbreitung im longitudinalen statischen Magnetfeld finden wir aus der folgenden Überlegung: Nehmen wir an, das hochfrequente Magnetfeld hätte keine Longitudinalkomponente (Transversalmagnetischer Wellentyp), dann ist  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) = 0$  und (56) liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -\gamma^2 H_{1x} &= \omega^2 \epsilon \mu_o (\mu H_{1x} - i K H_{1y}) \\ -\gamma^2 H_{1y} &= \omega^2 \epsilon \mu_o (i K H_{1x} + \mu H_{1y}) \end{aligned} \quad (59)$$

Das Verhältnis dieser beiden Gleichungen ist

$$\frac{H_{1x}}{H_{1y}} = \frac{\mu \frac{H_{1x}}{H_{1y}} - i K}{\mu + i K \frac{H_{1x}}{H_{1y}}} \quad (60)$$

Es kann (60) nur richtig sein, wenn  $H_{1x} = \pm i H_{1y}$  ist, das heisst, das Magnetfeld der Welle zirkularpolarisiert ist. Die Wellengleichung für diesen Spezialfall (59) liefert als Lösung zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen, deren Fortpflanzungskonstanten durch (58) gegeben sind. Wir finden hier die gleichen Verhältnisse wie beim Plasma: Eine linear polarisierte, transversale Welle kann sich in Richtung des Magnetfeldes nur fortpflanzen, weil sie in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen gleicher Amplitude zerlegt werden kann. Diese beiden Teilwellen finden jedoch nach (58) verschiedene Phasenkonstanten  $\beta_+$  und  $\beta_-$  vor, und wie beim Plasma ergeben sie nach einer Strecke  $l$  wieder zusammengesetzt eine linear polarisierte Welle, deren Polarisationsrichtung gegenüber der ursprünglichen um den Winkel der Faraday-Rotation

$$\Theta = \frac{l}{2} (\beta_+ - \beta_-) = \frac{l}{2} \omega \sqrt{\epsilon \mu_o} [\sqrt{\mu - K} - \sqrt{\mu + K}] \quad (61)$$

verdreht ist.

Ist die Richtung des statischen Magnetfeldes transversal zur Fortpflanzungsrichtung ( $\delta = 90^\circ$ ), so lauten die beiden Lösungen der Determinante (57)

$$\gamma_+ = i \omega \sqrt{\epsilon \mu_o} \sqrt{\frac{\mu^2 - K^2}{\mu}}, \quad \gamma_- = i \omega \sqrt{\epsilon \mu_o} \quad (62)$$

Für die Lösung der Wellengleichung wollen wir die Wellenausbreitungsrichtung in die x-Richtung legen,  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ , dann wird aus (56)

$$\begin{aligned} \omega^2 \epsilon \mu_o (\mu H_{1x} - i K H_{1y}) &= 0 \\ \omega^2 \epsilon \mu_o (i K H_{1x} + \mu H_{1y}) &= -\gamma^2 H_{1y} \\ \omega^2 \epsilon \mu_o H_{1z} &= -\gamma^2 H_{1z} \end{aligned} \quad (63)$$

Daraus erkennt man, dass es zwei linear polarisierte Wellen als Eigenvektoren dieser Gleichungen gibt. Es kann das hochfrequente Magnetfeld linear polarisiert in Richtung des statischen Magnetfeldes sein, die zugehörige Fort-

pflanzungskonstante  $\gamma_-$  ist unabhängig von der Magnetisierung, das Medium wirkt wie ein Dielektrikum. Gibt es eine Feldkomponente senkrecht zum statischen Feld, z.B.  $H_{1y}$  so ist damit notwendigerweise die Existenz einer Komponente  $H_{1x} = \frac{iK}{\mu} H_{1y}$  in Fortpflanzungsrichtung verknüpft. Der dazugehörige Eigenwert ist die Fortpflanzungskonstante  $\gamma_+$  mit der effektiven Permeabilität  $\mu_o \frac{\mu^2 - K^2}{\mu}$ .

Bei der technischen Anwendung dieses Verhaltens von gyromagnetischen Substanzen sind die Abmessungen des Medium vergleichbar mit der Wellenlänge oder kleiner als sie, während für die obige Darstellung davon ausgegangen wurde, dass das Medium unbegrenzt sei. Im nächsten Abschnitt werden in einem Beispiel die Auswirkungen der endlichen Abmessungen diskutiert.

Vorerst sollen einige Anwendungen der gyromagnetischen Eigenschaften von Ferriten qualitativ besprochen werden [13, 16, 17].

Die Faraday-Drehung der Polarisation kann leicht in einem zylindrischen Hohlleiter erzielt werden, wenn in der Achse desselben ein Ferritstäbchen plaziert und in axialer Richtung magnetisiert wird. Eine Welle des TE<sub>11</sub>-Typs hat in der Umgebung der Hohlleiterachse linear polarisiertes Magnetfeld, und zwar senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung [19]. Die Drehung der Polarisationsebene ist nur von der Orientierung des statischen Magnetfeldes und nicht von der Richtung der Wellenausbreitung abhängig, das heisst, bei festem Magnetfeld ist die Drehung für beide Fortpflanzungsrichtungen in die gleiche Richtung vom Magnetfeld aus betrachtet. Das Gebilde aus einem runden Hohlleiter mit einem magnetisierten Ferritstäbchen und vier Ausgängen mit rechteckigen Hohlleitern (Fig. 8) ist ein Zirkulator, wenn die Drehung der Polarisationsebene 45° beträgt. Ein Zirkulator ist ein Netzwerk mit  $n$ -Ausgängen (Toren) und mit der Eigenschaft, dass ein Signal, das beim  $i$ -ten Tor eintritt, beim  $(i+1)$ -ten Tor austritt, und ein Signal, das beim  $(i+1)$ -ten Tor eintritt, nicht beim  $i$ -ten, sondern beim  $(i+2)$ -ten austritt. Mit der Numerierung von Figur 8 ist die Reihenfolge 1–2–3–4–1 usw.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten sind gegeben durch die Anordnung von dünnen Ferritplättchen im Rechteckhohlleiter (TE<sub>10</sub>-Mode) entlang einer Ebene zirkularer Polarisation [19] und die statische Magnetisierung senkrecht auf die Ebene der hochfrequenten Magnetfeldlinien. Aus Figur 7 erkennt man, dass zwischen  $\mu' + K'$  und  $\mu' - K'$  ein grosser Unterschied besteht. Bleibt man mit der statischen Magnetfeldstärke ausserhalb des Resonanzbereichs, um Dämpfungsverluste zu vermeiden, so erhält man unterschiedliche Phasenverschiebung für vor- oder rückwärtslaufende Wellen. Ist der Unterschied in der Phasenverschiebung gerade 180°, so nennt man dieses Netzwerkelement einen Gyrorator. Mit

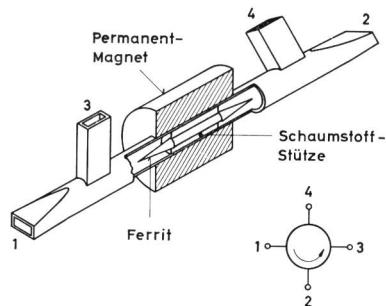


Fig. 8

Schematische Darstellung eines Vier-Tor-Zirkulators, dessen Wirkung auf der Faraday-Drehung der Polarisationsebene einer TE<sub>11</sub> Mode im zylindrischen Hohlleiter beruht. Der Ferritstab ist in der Achse dieses Hohlleiters angebracht, durch Styropor gestützt und durch einen Permanentmagneten in Achsrichtung magnetisiert. Die vier Rechteck-Hohlleiter-Ausgänge sind in der Reihenfolge der Zirkulationswirkung nummeriert

solchen differentiellen Phasenschiebern als Basislementen kann man durch Zusammenschalten mit anderen Netzwerken (Kopplern, Hybriden) ebenfalls Zirkulatoren herstellen [17].

Wählt man bei der gleichen geometrischen Anordnung das Magnetfeld so, dass man in den Bereich gyromagnetischer Resonanz (Fig. 7) kommt, dann wird für die Wellenfortpflanzung der Unterschied zwischen  $\mu'' + K''$  und  $\mu'' - K''$  entscheidend. Wie man aus Figur 7 erkennt, wird die Welle, für die  $\mu'' + K''$  gilt, sehr stark gedämpft, während für eine Welle in der entgegengesetzten Richtung der Drehsinn der zirkularen Polarisation umkehrt und wegen  $\mu'' - K''$  nur eine sehr geringe Abschwächung auftritt. Einen solchen Vierpol nennt man Resonanzisolator<sup>2</sup>.

Auf eine sehr elegante, jedoch nicht mehr so elementar verständliche Weise lässt sich ein Zirkulator nach dem Prinzip des «junction-circulators» aufbauen. Es werden dabei zum Beispiel vier Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt in einer Ebene (parallel zur Breitseite der Hohlleiter) unter gleichen Winkeln (90°) miteinander verbunden. In der Mittelachse dieses Kreuzes wird ein geeignetes Stück Ferrit plaziert und senkrecht zur gemeinsamen Ebene der Hohlleiter magnetisiert. Sind Frequenz der Welle, Ferriteigenschaften und Abmessungen und das statische Magnetfeld richtig gewählt, so wird eine Welle von einem Tor zu einem benachbarten durchgekoppelt, ohne dass von dort eine Welle derselben Frequenz zurück zum ersten Tor gelangen könnte. Die benachbarten Tore sind wieder in zyklischer Reihenfolge miteinander gekoppelt. Die Wirkungsweise dieses Zirkulatortyps wurde hauptsächlich am Beispiel des Dreitor-Zirkulators in Streifenleitung studiert

<sup>2</sup> Das englische «isolate» heisst absondern oder entkoppeln (insulate heisst isolieren). Ein besserer deutscher Ausdruck könnte «Einwegabschwächer» sein.

[20, 21]. Man ging von folgender Überlegung aus: Regt man eine nicht magnetisierte Ferritscheibe von geeignetem Durchmesser mit einer Welle aus der Leitung 1 an (Fig. 9a), so kann sich eine Resonanz in der dort eingezeichneten Dipolmode aufbauen. Wird senkrecht zur Scheibe beziehungsweise zur Ebene der hochfrequenten Magnetfeldlinien ein statisches Magnetfeld angelegt, erfolgt wegen der gyromagnetischen Eigenschaften des Ferritmediums eine Drehung dieser Dipolmode. Ist diese Drehung gerade  $30^\circ$  (Fig. 9b), ist Tor 3 entkoppelt und Tor 2 gleichwertig wie Tor 1 an die Mode gekoppelt. Ist die Impedanz noch geeignet gewählt, läuft die Welle ungehindert von Tor 1 nach Tor 2. Wird dagegen von Tor 2 her eingespeist, erfolgt mit den gleichen Überlegungen eine Durchkopplung nach Tor 3.

Für Zirkulatoren dieses Typs mit vier Toren werden die Bedingungen etwas komplizierter, aber ihre Verwirklichung ist ebenfalls möglich. Es wurden auch Zirkulatoren vom «junction»-Typ gebaut, bei denen die Hohlleiterverbindung in der Ebene parallel zu den Schmalseiten der Hohlleiter ausgeführt wurde.

Da die Wirkungsweise dieser Zirkulatortypen auf einer Resonanz bestimmter Wellentypen im Ferritkörper und den notwendigen Anpasstelementen beruht, kann man durch Verwendung höherer Wellentypen als der einfachen Dipolmode ein Umklappen der Zirkulatorwirkung von der Reihen-

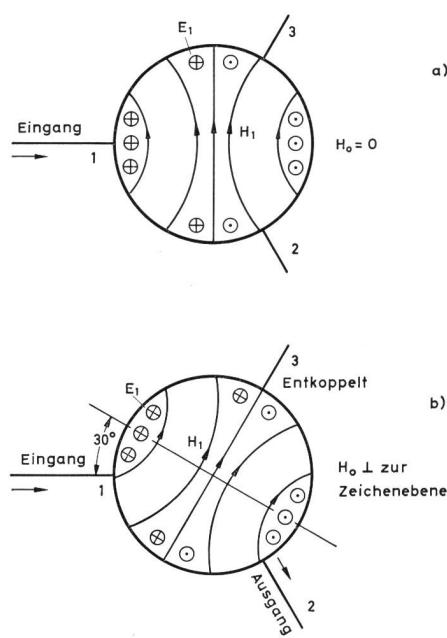


Fig. 9

Dreitor-Zirkulator vom «Junction»-Typ

- a) Die unmagnetisierte Ferritscheibe mit der Dipolmode, die vom Eingang (1) angeregt wird
- b) Durch das statische Magnetfeld  $H_0$  senkrecht zur Ferritscheibe wird die Dipolmode gedreht, so dass Eingang (1) und Ausgang (2) gleichwertig angekoppelt sind, während Tor (3) entkoppelt ist

folge 1–2–3–4 auf 1–4–3–2 für zwei nicht allzuweit voneinander entfernte Frequenzen erzielen. Man erhält dann ein Netzwerk, das grundsätzlich die Eigenschaften eines Quadruplexers in der Telekommunikationstechnik aufweist [22]. Diese Beispiele von Netzwerkelementen mit Ferrit zeigen, dass das Reziprozitätsgesetz für passive, lineare Vierpole durch die Verwendung anisotroper Medien verletzt wird.

## 7. Entmagnetisierende Effekte

Die entmagnetisierende Wirkung der Grenzflächen von magnetischen Körpern in einem äusseren Feld  $H^e$  berücksichtigt man durch ein zusätzliches Magnetfeld  $H^i$ , dem inneren Entmagnetisierungsfeld, von dem angenommen wird, dass es von fiktiven magnetischen Polen an den Endflächen ausgeht und im Magnetikum dem erzeugenden Feld  $H^e$  entgegenwirkt [12]. Die Stärke des entmagnetisierenden Feldes ist der Magnetisierung proportional, so dass das innere Magnetfeld durch

$$\mathbf{H}^i = \mathbf{H}^e - N_T \mathbf{M} \quad (64)$$

beschrieben werden kann. Der Entmagnetisierungskoeffizient  $N_T$  ist ein symmetrischer Tensor.

$$N_T = \begin{pmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{pmatrix} \quad (65)$$

dessen Spur (Summe der Diagonalelemente) eins ist. Für Ellipsoide nehmen die Entmagnetisierungskoeffizienten in den Achsenhauptrichtungen Werte an, die für den ganzen Körper gelten. Wenn das äussere Feld homogen ist, ist es auch das innere, allerdings sind die Richtungen der beiden nur in den Hauptachsenrichtungen gleich. Wir wollen uns hier nur mit Ellipsoiden befassen. Die Suszeptibilität  $\chi$  ist nun das Verhältnis aus Magnetisierung und innerem Feld

$$\mathbf{M} = \chi_T \mathbf{H}^i \quad (66)$$

Aus der Gleichheit der Normalkomponenten der Induktion in einer Hauptachsenrichtung an der Oberfläche

$$\mu_0 [H^e - N M + \chi (H^e - N M)] = \mu_0 (H^e + H^{De}) \quad (67)$$

wo nun  $N$  der Entmagnetisierungsfaktor in dieser Richtung ist, folgt, dass die fiktiven Magnetpole auch außerhalb des Magnetikums ein zusätzliches Feld

$$H^{De} = (1 - N) M$$

verursachen, das auf der Oberfläche in Richtung des erzeugenden Feldes  $H^e$  wirkt, jedoch auf kürzestem Weg die beiden «Pole» verbindet, so dass schon auf geringem Abstand seine Wirkung auf das äussere Feld  $H^e$  klein ist. Einsetzen von (64) und (66) in (67) ergibt das innere Feld als Funktion des angelegten in der Form

$$H^i = \frac{H^e}{1 + \chi N}$$

und das äussere unmittelbar an der Oberfläche in Richtung des angelegten Feldes

$$H_{\text{Oberfläche}}^e = \frac{H^e(1+\chi)}{1+\chi N}$$

Für die Berechnung des Einflusses der Entmagnetisierung auf das gyromagnetische Verhalten von Ferrit wollen wir die  $z$ -Achse als Richtung der Wellenfortpflanzung beibehalten und abweichend von Abschnitt 6 das statische Magnetfeld in der  $y$ -Richtung annehmen. Ausserdem führen wir zur besseren Übersichtlichkeit folgende Abkürzungen ein

$$h = \frac{\Gamma H_o}{\omega} \quad m = \frac{\Gamma M_o}{\omega} \quad (68)$$

Die beiden Elemente des Suszeptibilitätstensors werden dann mit Berücksichtigung der Entmagnetisierung aus (52) und (54)

$$\bar{\mu} - 1 = \frac{m(h - N_y m)}{(h - N_y m)^2 - 1} \quad \bar{K} = \frac{m}{(h - N_y m)^2 - 1} \quad (69)$$

Setzt man (64) in (66) mit den Abkürzungen (68) ein, erhält man für die beiden Komponenten des hochfrequenten Magnetisierungsvektors als Funktion des äusseren hochfrequenten Magnetfeldes

$$\begin{aligned} M_{1x} &= m \frac{[h + m(N_z - N_y)] H_{1x}^e - i H_{1z}^e}{[h + m(N_x - N_y)] [h + m(N_z - N_y)] - 1} \\ M_{1z} &= m \frac{i H_{1x}^e + [h + m(N_x - N_y)] H_{1z}^e}{[h + m(N_x - N_y)] [h + m(N_z - N_y)] - 1} \end{aligned} \quad (70)$$

Die Polarisation des Magnetisierungsvektors folgt aus (70)

$$i \frac{M_{1x}}{M_{1z}} = \frac{h + m(N_z - N_y) - i \frac{H_{1z}^e}{H_{1x}^e}}{1 - i \frac{H_{1z}^e}{H_{1x}^e} [h + m(N_x - N_y)]} \quad (71)$$

wobei noch in Zähler und Nenner durch  $H_{1x}^e$  dividiert wurde. Wählt man speziell

$$i \frac{H_{1x}^e}{H_{1z}^e} = \pm \frac{h + m(N_x - N_y)}{h + m(N_z - N_y)} \quad (72)$$

so erhält man für

$$i \frac{M_x}{M_z} = \pm \frac{h + m(N_z - N_y)}{h + m(N_x - N_y)} \quad (73)$$

Das heisst, ein elliptisch polarisiertes Feld mit dem Achsenverhältnis (72) ergibt eine elliptische Polarisation des Magnetisierungsvektors mit reziprokem Achsenverhältnis,

Die gyromagnetische Resonanzfrequenz ist nun nicht mehr durch (48) (Nullstelle des Nenners in (52)) gegeben,

sondern durch das Nullwerden des Nenners in (70). Mit (68) erhält man dafür

$$\omega = \Gamma \sqrt{[H + (N_x - N_y) M] [H + (N_z - N_y) M]} \quad (74)$$

die *Kittel'sche Formel* [23] für die gyromagnetische Resonanz.

Der Resonanzisolator beruht – wie schon im vorigen Abschnitt gesagt wurde – auf der Ausnutzung dieser gyromagnetischen Resonanz. Es muss dabei die Polarisierung des Magnetfeldvektors für zum Beispiel die vorwärtslaufende Welle so geartet sein (dort musste sie zirkular sein), dass die tensorielle Permeabilität zu einem Skalar  $\mu'' - K''$  degeneriert, der keine Verluste verursacht (Durchlassrichtung), jedoch für die entgegengesetzt laufende Welle die entgegengesetzte Zirkularpolarisation annimmt, so dass wegen  $\mu'' + K''$  die Dämpfung sehr gross wird (Sperrichtung). Hat das gyromagnetische Medium endliche Abmessungen, benötigt man wegen der entmagnetisierenden Effekte elliptische Polarisierung. Im rechteckigen Hohlleiter lässt sich jede elliptische Polarisierung entlang einer Ebene parallel zur  $y$ - $z$ -Ebene (Fig. 10), ausgezogene Linien) erzielen [19]. Wir

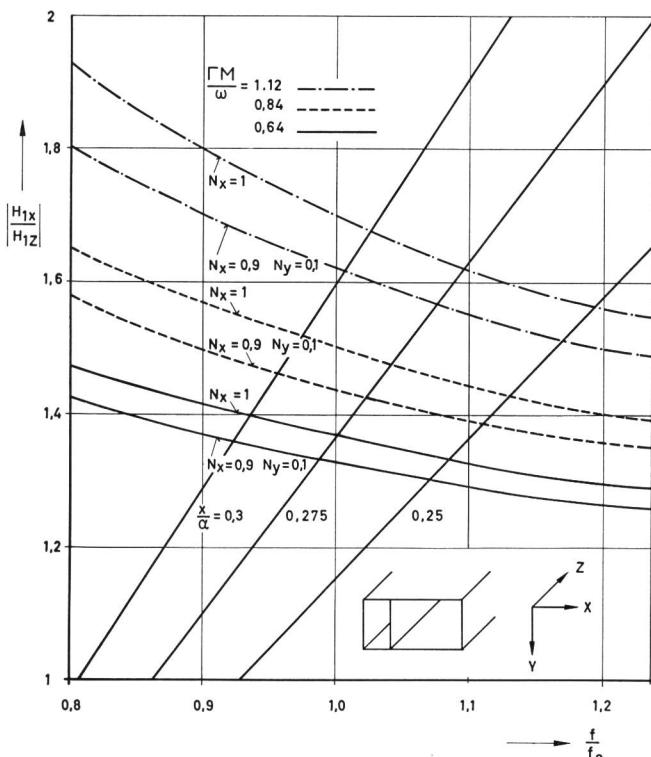


Fig. 10

Die elliptische Polarisierung des Magnetfeldes der  $TE_{10}$ -Mode in einem leeren Hohlleiter mit Rechteck-Querschnitt bei verschiedenen Abständen von der Hohlleiterwand (ausgezogene Geraden) und für geringe Durchlassdämpfung nach Formel (78) erwünschte Elliptizität der Polarisierung bei verschiedenen Ferriten und Entmagnetisierungsfaktoren

können uns nun die Frage vorlegen, welches Achsenverhältnis  $H_{1x}^e/H_{1z}^e$  einer elliptischen Polarisation benötigen wir für ein Ferritplättchen sehr geringer Dicke (in  $x$ -Richtung), das aber die ganze Höhe des Hohlleiters ausfüllt und auch in  $z$ -Richtung lang sei. Bei dieser Konfiguration sind die Entmagnetisierungsfaktoren  $N_y$  und  $N_z$  sehr klein, aber  $N_x$  beinahe eins.

Allgemein können wir sagen: um in der Umgebung der gyromagnetischen Resonanz eine kleine Durchlassdämpfung zu erzielen, muss für die Durchlass-Richtung die elliptische Polarisation des Magnetfeldvektors ein Achsenverhältnis  $H_{1x}^e/H_{1z}^e$  haben, so dass der Magnetisierungsvektor nicht aus seiner Ruhelage (die er wegen des statischen Feldes angenommen hat) ausgelenkt wird. Also die Magnetisierung in  $x$ - und  $z$ -Richtung muss null bleiben, wodurch sich das Medium wie ein Dielektrikum verhält. Diese Bedingung kann formuliert werden als

$$M_{1x} + i p M_{1z} = 0 \quad (75)$$

worin  $p$  das Achsenverhältnis der Polarisation der Magnetisierung sei [24]. Aus der Resonanzformel (74) folgt

$$h + m(N_x - N_y) = \frac{1}{h + m(N_z - N_y)} \quad (76)$$

Setzen wir (70) in (75) ein und verwenden (76), so erhält man für  $-p$

$$-i \frac{M_{1x}}{M_{1z}} = h + m(N_z - N_y) \quad (77)$$

Um für die Durchlassrichtung die Magnetisierungen (70) nicht über alle Grenzen wachsen zu lassen, muss die elliptische Polarisation des hochfrequenten Magnetfeldes gegeben sein durch

$$-i \frac{H_{1x}^e}{H_{1z}^e} = h + m(N_x - N_y) \quad (78)$$

was der Reziprokwert von (77) ist. Das für eine kleine Durchlassdämpfung erforderliche Achsenverhältnis der Polarisationsellipse des Feldvektors (78) ist in Figur 10 für verschiedene Entmagnetisierungskoeffizienten eingetragen. Man erkennt, dass die richtige Polarisation nur bei einer Frequenz auftritt, wenn Ferritsorte ( $m$ ) und Form ( $N_x, N_y, N_z$ ) festgelegt sind. Geringe Durchlassdämpfung wird also nur in einem sehr engen Frequenzband möglich sein.

Gelingt es dagegen, die beiden Kurvenscharen (erwünschte und realisierbare Polarisation) in annähernde Übereinstimmung zu bringen, können über eine grosse Bandbreite geringe Durchlassdämpfungen erwartet werden. Es wurde bereits gesagt, dass das gyromagnetische Medium bei richtiger Polarisation in Durchlassrichtung wie ein Dielektrikum wirkt ( $\mu' - K' \approx 1$  und  $\mu'' - K'' \approx 0$  in Figur 7). Die Dielektrizitätskonstante ist für diese Ferrite etwa 9...11. Es soll nun kurz gezeigt werden, dass es möglich ist, über eine

große Bandbreite an den Ferritoberflächen eine günstige Polarisation herzustellen [24]. Ein Streifen eines Dielektrikums sei im Hohlleiter angebracht wie in Figur 11 im Querschnitt gezeigt. Der Hohlleiter besteht nun aus drei Abschnitten, in denen folgende Ansätze für die elektrische Feldstärke gelten sollen (der Ferritstreifen wird nun zum Dielektrikum gezählt)

$$\begin{aligned} E_x &= i A \sin \tau x e^{-i \beta z} & E_{xx} &= B [e^{i \varrho x} + C e^{-i \varrho x}] e^{-i \beta z} \\ E_{xz} &= i D \sin \tau (a - x) e^{-i \beta z} \end{aligned} \quad (79)$$

worin  $\tau$  und  $\varrho$  die transversalen Phasenkonstanten in den Luft- beziehungsweise Dielektrikumsabschnitten sind. Mit Hilfe der zweiten Maxwellgleichung  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d \mathbf{B}}{dt}$  lassen sich die Achsenverhältnisse der elliptischen Polarisation an den beiden Luft-Dielektrikums-Begrenzungsfächen (bei  $x = x_1$  und  $x = x_3$ )

$$\begin{aligned} i \left( \frac{H_{1x}^e}{H_{1z}^e} \right)_{x_1} &= \frac{\beta}{\tau} \tan \tau x_1 \\ i \left( \frac{H_{1x}^e}{H_{1z}^e} \right)_{x_3} &= -\frac{\beta}{\tau} \tan \tau x_3 \end{aligned} \quad (80)$$

und innerhalb des Dielektrikums

$$\frac{H_{1x}^e}{H_{1z}^e} = -\frac{\beta e^{i \varrho x_2} + C e^{-i \varrho x_2}}{\varrho e^{i \varrho x_2} - C e^{-i \varrho x_2}} \quad (81)$$

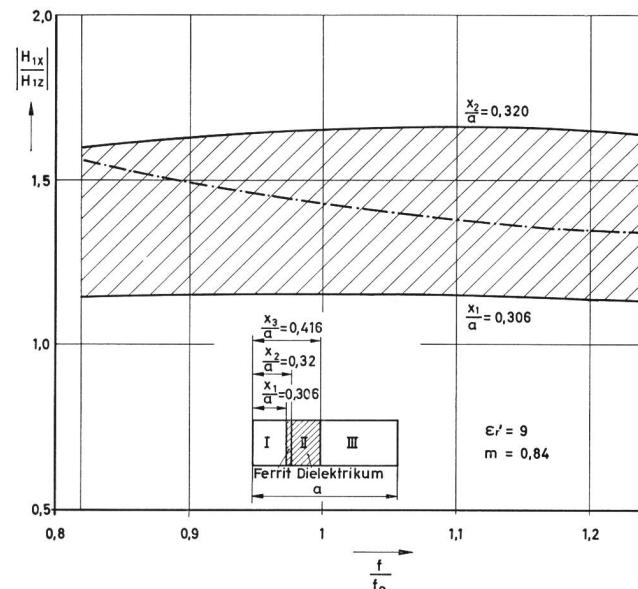


Fig. 11

Bereich der Elliptizität der Polarisation des Magnetfeldes zwischen  $x_1/a = 0,306$  und  $x_2/a = 0,320$  im Dielektrikum und die benötigte Elliptizität für geringe Durchlassdämpfung eines Ferritstreifens zwischen  $x_1/a$  und  $x_2/a$  neben dem verbleibenden Dielektrikum (—·—·—)

berechnen. Die Konstanten A,B,C und D in (79) können aus den Randbedingungen bestimmt werden und die Phasenkonstanten aus den Wellengleichungen für die Luftabschnitte

$$\tau^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2 \quad (82)$$

und den Dielektrikumsabschnitt

$$\varrho^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r - \beta^2 \quad (83)$$

In Figur 11 sind für eine Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r = 9$  die Achsverhältnisse der Polarisationsellipse an der Oberfläche ( $x_1$ ) und einer geringen Tiefe im Dielektrikum ( $x_2$ ) als die Begrenzungslinien einer schraffiert gezeichneten Fläche eingetragen. Im Dielektrikumsabschnitt zwischen  $x_1$  und  $x_2$  kommen alle Polarisationen des schraffierten Bereiches in Figur 11 vor. Ein Streifen Ferrit der Dicke  $x_2 - x_1$  und dem Wert  $m = \frac{IM_o}{\omega} = 0,84$  benötigt zur Erfüllung der Bedingung (78) eine Polarisation, wie sie durch die strichpunktisierte Linie dargestellt ist, die innerhalb der schraffierten Fläche liegt. Wählt man eine Anordnung, deren Querschnitt in Figur 11 skizziert ist, so kann man über eine grosse Bandbreite kleine Durchlassdämpfungen erwarten. Für die Realisierung eines breitbandigen Resonanzisolators muss dann allerdings noch das äussere Magnetfeld über die Länge des Hohlleiters so viel variiert werden, dass auch eine hohe Sperrdämpfung über die gleiche Bandbreite resultiert. Tatsächlich werden mit diesem Aufbau kommerzielle Einwegabschwächer verwirklicht, die über die Bandbreite 1,5:1 eine Sperrdämpfung von mehr als 30 dB bei Durchlassverlusten von weniger als einem halben dB aufweisen.

In diesem ganzen Beitrag war stets nur die Rede von den passiven Eigenschaften der anisotropen Medien. Jedes Medium, das absorbiert, strahlt aber auch elektromagnetische Wellen zufolge seiner thermischen Energie ab. Allerdings sind dies inkohärente Wellenzüge mit einer spektralen Gleichverteilung ihrer Energie, das heisst weisses Rauschen. Es kann gezeigt werden, dass ein anisotropes Medium, zum Beispiel magnetisiertes Ferrit, sich bei der Emission dieser thermischen Strahlung ebenfalls anisotrop verhält und ausserdem nur im engbegrenzten Gebiet der gyromagnetischen Resonanz strahlt [25, 26].

## Literatur

- [1] J.A. Stratton. Electromagnetic Theory. McGraw Hill, New York, 1941.
- [2] A. Duschek, A. Hochrainer. Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Springer, Wien, 1948.
- [3] M. Born. Optik. Springer, Berlin, 1965.
- [4] P. A. Sturrock. Waves in Plasmas. Proc. of the Internat. School of Physics «Enrico Fermi», Course on Plasma Astrophysics, 1966. Academic Press, New York 1967, p. 24...45.
- [5] T. H. Stix. The Theory of Plasma Waves. Mc Graw Hill, New York 1962.
- [6] E. Schanda. Oberflächenwellen, Techn. Mitt. PTT 45 (1967) Nr. 11, S. 610...621.
- [7] E. Schanda. Die Elektrizitätslehre und die Maxwellsche Theorie. Techn. Mitt. PTT 45 (1967) Nr. 9, S. 512...521.
- [8] L. Spitzer. Physics of fully ionized gases. Interscience Publishers, New York, 1956.
- [9] S. Chandrasekhar. Plasma Physics. University of Chicago Press, 1960
- [10] V.C.A. Ferraro, C. Plumpton. Magneto Fluid Mechanics. Oxford University Press, 1966.
- [11] R. Jancel, Th. Kahan. Electrodynamics of Plasma. J. Wiley, London, 1966.
- [12] J. Smit, H.P.J. Wijn. Ferrite. Philips Technische Bibliothek, Eindhoven, 1962.
- [13] A.G. Fox, S.E. Miller, M.T. Weiss. Behavior and Application of Ferrites in the Microwave Region. Bell. Syst. T. J. 34 (1955), p. 5...103.
- [14] D. Polder. On the theory of ferromagnetic resonance. Phil. Mag. 40 (1949), p. 99...115.
- [15] L. Landau, E. Lifshitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. Phys. Z. Soviet Union 8, 1935, 153...169.
- [16] C. L. Hogan. The Elements of Nonreciprocal Microwave Devices. Proc. IRE 44 (1956), p. 1345...1368.
- [17] B. Lax, K.J. Button. Microwave Ferrites and Ferrimagnetics. McGraw Hill, New York, 1962.
- [18] H. Carnal. Elemente der Vektoranalysis, Techn. Mitt. PTT 45 (1967) Nr. 6, S. 309-314.
- [19] E. Schanda. Hohlleiter und Hohlraum-Resonatoren. Techn. Mitt. PTT 46 (1968) Nr. 3, S. 135...147.
- [20] H. Bosma. On Stripline Y-Circulation at UHF. IEEE Trans. MTT-12 (1964), p. 61...72.
- [21] C. E. Fay, R. L. Comstock. Operation of Ferrite Junction Circulator. IEEE Trans. MTT-13, (1965), p. 15...27.
- [22] L.v.d. Kint, E. Schanda. A Microwave Quadruplexer. IEEE Trans. MTT-11 (1963), p. 90...92.
- [23] C. Kittel. On the Theory of Ferromagnetic Resonance Absorption, Phys. Rev. 73 (1948), p. 155...161.
- [24] E. Schanda. Untersuchung des Breitband-Resonanz-Isolators. Diskussionstagung «Ferrite für hohe Frequenzen» der deutschen Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus, Weinheim, 13. u. 14. April 1964.
- [25] I. A. Deryugin, N. I. Lyashenko. Noise in magnetized ferrite. Soviet Physics – Solid State, 5 (1963), p. 816...821.
- [26] E. Schanda. Messung des Emissionsvermögens mit einem Mikrowellen-Radiometer, A.E.Ü. 22, (1968)

Adresse des Autors: Dr. E. Schanda, c/o Institut für angewandte Physik der Universität Bern, Sidlerstr. 5, CH-3000 Bern.