Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 45 (1967)

Heft: 1

Artikel: Berechnung von Weitspannungen für Telephonkabel

Autor: Gnehm, Bruno

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874846

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Berechnung von Weitspannungen für Telephonkabel

Bruno GNEHM, Bern

621.315.243.001.24

Zusammenfassung. *Die allgemeine Theorie der Durchhangslinie wurde bereits in vielen Artikeln behandelt. In der vorliegenden Arbeit jedoch liegt das Hauptgewicht auf der Berechnung von selbsttragenden Telephonkabeln mit Spannweiten bis 1200 m, deren besondere Eigenschaften untersucht werden. An einem Beispiel wird gezeigt, wie man mit den üblichen Mitteln und verhältnismässig grossem Zeitaufwand zu nützlichen Resultaten gelangt. Im letzten Abschnitt wird auf die Berechnung mit Hilfe eines Computers näher eingetreten, der absolute Sicherheit gewährt und in kürzester Zeit optimale Lösungen zur Verfügung stellt.*

Calcul des longues portées pour câbles téléphoniques

Résumé. *La théorie générale de la flèche à donner aux lignes aériennes a déjà fait l'objet de nombreux articles. Dans le travail qui suit, il est cependant question, principalement, des calculs se rapportant aux câbles téléphoniques autoportants avec portées jusqu'à 1200 m et de leurs caractéristiques particulières. On montre par un exemple que des résultats utilisables peuvent être obtenus par les moyens usuels, mais au prix d'un temps assez long. Le dernier chapitre traite plus en détail du calcul au moyen d'un ordinateur électronique, qui présente une sécurité absolue et donne en un temps très bref des solutions optimales.*

Calcolo delle campate lunghe per cavi telefonici

Riassunto. *La teoria generale della catenaria e già stata trattata in numerosi articoli. Nel presente lavoro si esaminano specialmente il calcolo e le particolarità di cavi telefonici autoportanti con campate fino a 1200 metri. Sulla scorta di un esempio si chiarisce come l'impiego di mezzi convenzionali permetta di conseguire risultati utili solo con un notevole sacrificio di tempo. Nell'ultima parte si descrive la procedura di calcolo con un elaboratore elettronico, che garantisce una sicurezza assoluta, mettendo a disposizione delle soluzioni ottimali in brevissimo tempo.*

1. Einführung

Die Projektierung von Kabelanlagen und im besonderen die Wahl der Trassen in unserer gebirgigen Alpenzone stellt uns oft vor Probleme, die, mit der üblichen Verlegung der Telephonkabel in den Boden, nicht oder nur mit sehr grossem Kostenaufwand gelöst werden können. Im offenen Gelände können Bäche und kleine Flüsse verhältnismässig einfach unterführt, auf Brücken oder mit selbsttragenden Konstruktionen überquert werden. Anders liegen die Verhältnisse im Gebirge, den Voralpen und der Jurazone. In diesen Gebieten steht man nur zu oft vor der Aufgabe, eine Schlucht, einen Wildbach, ein Rutschgebiet oder einen Stausee überqueren zu müssen. Für solche Fälle erweist sich eine Weitspannung mit selbsttragendem Kabel in der Regel als die wirtschaftlichste, wenn nicht sogar als die einzig mögliche Lösung.

Die Berechnung von Weitspannungen für Hochspannungsleitungen und Seilbahnen ist in der Fachliteratur wie auch in Fachzeitschriften schon öfters ausführlich behandelt worden. Wenn wir das Problem trotzdem erneut aufgreifen, so wegen des grundsätzlichen Unterschiedes zwischen einem Leiterseil einer Hochspannungsleitung oder dem Tragseil einer Seilbahn und einem selbsttragenden Telephonkabel.

Während sich bei einem Leiter- oder Tragseil der Querschnitt aus einzelnen verseilten Stahl- oder Aluminiumdrähten zusammensetzt, die gemeinsam die Zugkräfte übernehmen, werden beim Telephonweitspannkabel die resultierenden Kräfte nur von einer besonderen äusseren Armatur übernommen. Das eigentliche Telephonkabel dagegen bleibt vollständig zugentlastet.

Der Aufbau des Telephonkabels richtet sich immer nach dessen Verwendung. Je nach Art der Anlage kommen Papierluftraumkabel in Stern- oder DM-Verseilung, aber auch Koaxialkabel in Frage. In jedem Fall ist es unbedingt erforderlich, dass die Leiter während der Montage und im Betriebszustand zugentlastet sind. Das gleiche gilt für die Umhüllung des Aderbündels, die aus einem Blei-, Stahl- beziehungsweise Kupfer-Wellmantel bestehen kann. Wellmäntel haben ein sehr geringes Gewicht und eignen sich deshalb besonders für grosse Spannweiten.

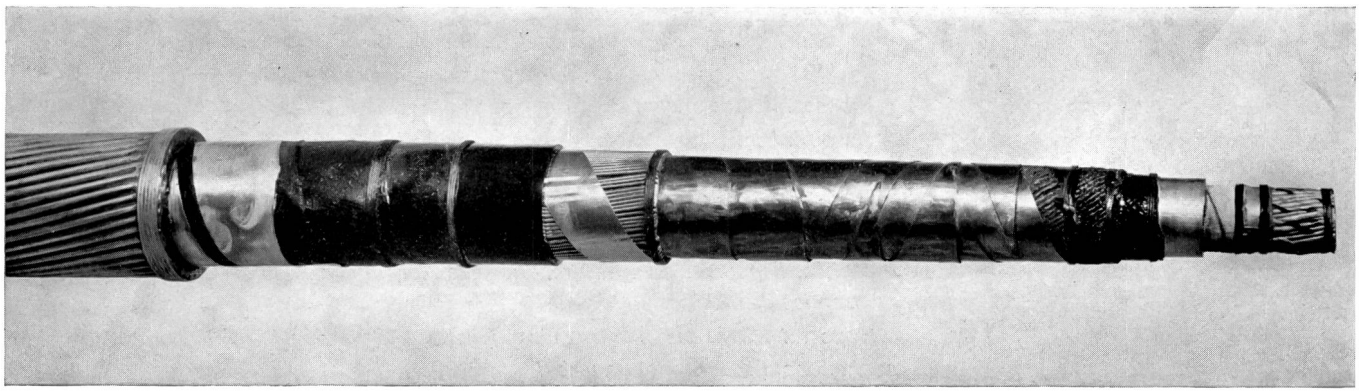


Fig. 1

Bleimäntel werden gegen Ermüdungserscheinungen mit 0,7% Antimon legiert. Um den Mantel wird ein den Verhältnissen angepasster Korrosionsschutz aufgetragen. Dieser kann aus Kunststoffolien und teergetränkter Jute oder einer PVC-Hülle aufgebaut sein. Eine Eisenbandarmatur empfiehlt sich als Stütze des Bleimantels, um die Festigkeit im Querschnitt zu erhalten. Darüber wird die Tragarmatur aus verzinkten hochwertigen Stahldrähten angebracht.

Die *Figuren 1 und 2* zeigen den Aufbau eines selbsttragenden Kabels 60×2×0,8 mm, das zusätzlich für eine erhöhte Blitzsicherheit ausgerüstet ist. Sein Aufbau über dem Bleimantel ist folgender:

- Korrosionsschutz und teerimprägnierte Jute
- 6 überlappende Eisenbänder 0,25 mm
- eine Lage blanke Kupferdrähte
- PVC-Mantel
- 1 nicht überlappendes Eisenband
- Tragarmatur aus feuerverzinktem Stahldraht

Solche Kabel kommen in besonders blitzgefährdeten Gebieten zum Einsatz.

Die Vielfältigkeit des Kabelaufbaues und der Kabelgrössen ergibt praktisch für jeden Fall verschiedene Kabeldurchmesser und Gewichte.

Das Anbringen der Tragarmatur stellt für die Fabrikation gewisse Probleme, da der Drahtzahl sowie dem Drahtdurchmesser bei den vorhandenen Wickelmaschinen gewisse Grenzen gesetzt sind. Im Gegensatz zu den Hochspannungsfreileitungen ist daher die Normierung bei Telephonweitspannkabeln nur begrenzt möglich.

Normalisiert sind jedoch die Masttypen für 5, 10 und 20 t Zugkraft.

Die möglichen Varianten erschweren die Berechnung, denn jeder Fall muss einzeln behandelt werden. Wie später gezeigt wird, ist dabei die zeitraubende «Handrechnung» vom Computer abgelöst worden.

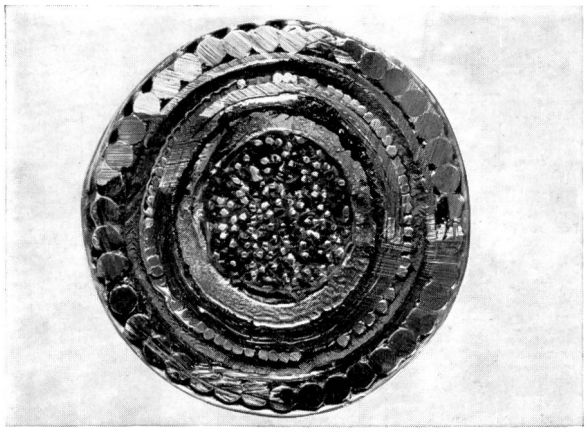


Fig. 2

2. Berechnung

Für die zulässigen maximalen Beanspruchungen sind die Bedingungen der Schwachstrom- und Starkstromverordnung massgebend.

Die Berechnung einer Kabelweitspannung umfasst die physikalischen und geometrischen Zusammenhänge, die ein zwischen zwei Punkten aufgehängtes Kabel charakterisieren.

Das Ziel der Berechnung ist verschieden und kann wie folgt unterteilt werden:

- Einhalten der minimalen Sicherheiten nach den Vorschriften
- Errechnen der maximalen Kräfte in den Aufhängepunkten (Mastkonstruktion)
- Errechnen der effektiven Kabellänge
- Durchhänge des Kabels an verschiedenen Stellen, um minimal zulässige Durchgangshöhen zu garantieren.

Die Durchhangslinie wird als Kettenlinie bezeichnet, vorausgesetzt, dass der Querschnitt und das spezifische Gewicht des Kabels auf der ganzen Länge konstant sind. Die Steifigkeit des Kabels kann für die in der Praxis vorkommenden, verhältnismässig grossen Spannweiten vernachlässigt werden. Zusatzlasten sind ebenfalls als gleichmässig über die ganze Länge verteilt zu betrachten.

Die Kettenlinie, eine Hyperbelfunktion, ergibt komplizierte Gleichungen. Es werden daher Vereinfachungen eingeführt, die aber die Gültigkeit begrenzen. Nach *E. Maurer* können für die Vereinfachungen folgende Grenzfälle festgelegt werden:

a) Spannweiten bis etwa 500 m und Neigungswinkel bis rund 30°,
b) Spannweiten bis 1200 m und beliebige Neigungen.

Für die Gruppe a) kann an Stelle der Kettenlinie die Parabel mit den dadurch möglichen Vereinfachungen eingesetzt werden.

Die nachfolgenden Ableitungen und Erläuterungen sollen zeigen, wie man zu den allgemein üblichen Formeln gelangt. Besonders die vorerwähnten Annäherungen werden hervorgehoben, um die Gruppeneinteilung zu erklären.

Spannweiten von 1200 m sind für Telephonkabel als maximal zu betrachten, da das Gewicht des Kabels ohne Tragarmatur den grössten Teil des Gesamtgewichtes ausmacht.

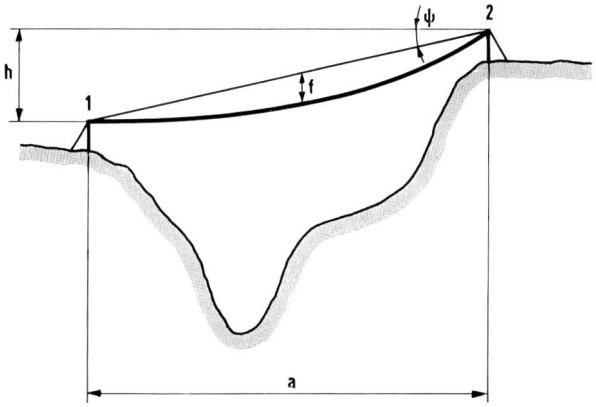
Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

- Behandlung und Ableitung der Kettenlinie auf Grund der Hyperbelfunktion
- Umwandlung der Hyperbelfunktionen mit Hilfe der Reihen in Exponentialfunktionen
- Vereinfachungen
- Zustandsgleichung

- Zusammenstellung der Formeln
- Beispiel (Handrechnung)
- Berechnung mit Hilfe eines Computers

3. Bezeichnungen und Symbole

Allgemeine Form einer Weitspannung.



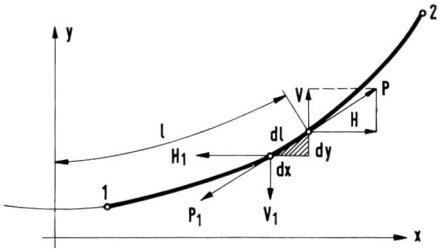
Die Bezeichnungen sind zum grössten Teil aus der Abhandlung von E. Maurer im SEV-Bulletin Nr. 2 und 3 1936 übernommen.

a (A)	= Horizontale Spannweite	in cm
h (H)	= Höhendifferenz der Aufhängepunkte	in cm
ψ (PSI)	= Neigungswinkel der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte mit der Horizontalen	in °
x_1 (x1) x_2 (x2)	= Abszissen der horizontalen Spannweiten	in cm
f_x (F)	= Durchhang im Abstand x vom Scheitel der Kettenlinie oder der Parabel	in cm
f_{max} (FMAX)	= Maximaler Durchhang	in cm
γ (GAM)	= Gewicht des Kabels, bezogen auf 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt bei einer Temperatur *t*	in kg/cm³
γ_o (GAMO)	= Gewicht des Kabels, bezogen auf 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt bei *0°* C	in kg/cm³
p (P)	= Zugspannung am Scheitelpunkt des unbelasteten Kabels bei einer Temperatur *t*	in kg/cm²
p_o (PNUL)	= Zugspannung am Scheitelpunkt des belasteten Kabels bei einer Temperatur von *0°* C	in kg/cm²
p_x (P)	= Zugspannung im Punkt P_x bei einer Temperatur *t*	in kg/cm²
p_1	= Zugspannung am untern Aufhängepunkt bei einer Temperatur *t*	in kg/cm²
p_2 (PZ)	= Zugspannung am obern Aufhängepunkt bei einer Temperatur *t*	in kg/cm²
p_{o1}	= Zugspannung am untern Aufhängepunkt bei einer Temperatur von *0°* C und Zusatzlast	in kg/cm²
p_{o2} (PZ)	= Zugspannung am obern Aufhängepunkt bei einer Temperatur von *0°* C und Zusatzlast	in kg/cm²
P_1	= Zugkraft am untern Aufhängepunkt bei einer Temperatur *t*	in kg
P_2 (PKZ)	= Zugkraft am obern Aufhängepunkt bei einer Temperatur *t*	in kg
P_{o1}	= Zugkraft am untern Aufhängepunkt bei *0°* C und Zusatzlast	in kg
P_{o2} (PKZ)	= Zugkraft am obern Aufhängepunkt bei *0°* C und Zusatzlast	in kg
F (F)	= Querschnitt der tragenden Armaturdrähte	in cm²
E (E)	= Elastizitätsmodul des Materials der Armaturdrähte	in kg/cm²
α (ALF)	= Wärmeausdehnungskoeffizient des Materials der Armaturdrähte bezogen auf 1 cm Kabel und 1° C Temperaturänderung	in cm/° C
σ_z (PZUG)	= Bruchspannung der Armaturdrähte	in kg/cm²
s (S)	= Sicherheit	–
l (L)	= Länge des Kabels ohne Zusatzlast bei einer Temperatur *t*	in cm
l_o	= Länge des belasteten Kabels bei einer Temperatur *0°* C	in cm
α_1	= Tangentenwinkel an das Kabel am untern Aufhängepunkt	in °
α_2	= Tangentenwinkel an das Kabel am obern Aufhängepunkt	in °
G_K (GK)	= Kabelgewicht	in kg/m
G_z (GZ)	= Gewicht der Zusatzlast	in kg/m
z (FS)	= Höhendifferenz des Scheitels mit dem untern Aufhängepunkt	in cm
x (X1X)	= Hindernisabstand	in cm

Die Ausdrücke in ( ) sind die Bezeichnungen, die im Computerprogramm verwendet werden.

3.1 *Die Gleichung der Kettenlinie*

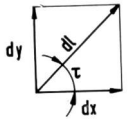
Das Kabel ist an den starren Punkten 1 und 2 gelenkig aufgehängt.



Wir greifen das Seilelement dl heraus.

Wenn dx und dy die Komponenten von dl sind, können wir schreiben

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$



oder

$$\frac{dl^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$$

und

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (1)$$

Jedes Seilelement unterliegt den obigen Bedingungen. Die Formel ① stellt somit eine Differentialgleichung der Kettenlinie dar.

3.1.1 *Die Vertikalkomponente V*

V ist die in vertikaler Richtung wirkende Komponente von P

$V = g \cdot l$ wobei l = Länge des Bogens vom Scheitel aus gemessen

und

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{V}{H} = \frac{g \cdot l}{H} \quad ②$$

g = Gewicht des Kabels je Längeneinheit

3.1.2 *Der Proportionalitätsfaktor c*

Der Proportionalitätsfaktor c wird als Parameter der Kettenlinie bezeichnet.

Der Gleichung ② können wir entnehmen, dass die Form der Kettenlinie nicht ändert, sofern V und H beziehungsweise g und H zueinander proportional bleiben.

Wir setzen also

$$H = c \cdot g$$

und aus ② wird

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{l}{c}$$

τ ist der Tangentenwinkel an die Kurve

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{l}{c} = \frac{dy}{dx} \quad \text{und umgeformt}$$

$$l = c \cdot y' \quad ③$$

Die Länge des Seilelementes ist also gleich dem Parameter c, multipliziert mit der 1. Ableitung der Kurve.

Die Ableitung des Seilelements nach dx ergibt

$$\frac{dl}{dx} = c \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = c \cdot y'' \text{ und Gleichung ① } \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Wir erhalten damit eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$c \cdot y'' = \sqrt{1 + y'^2} \quad ④$$

Wenn aber $y' = z$ gesetzt wird, lautet der Ausdruck

$$c \cdot z' = \sqrt{1 + z^2} \quad ⑤$$

$$\text{es ist } z' = \frac{dz}{dx}$$

Umgeformt und integriert

$$\frac{x}{c} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} \quad \text{oder aufgelöst}$$

$$x = c \cdot \ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) + c \cdot k \quad ⑥$$

Im Scheitelpunkt ist die Tangente horizontal. Mit der Randbedingung $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = z = o$ bei $x = o$ wird die Integrationskonstante $k = O$, und somit nimmt die Gleichung ⑥ folgende Form an

$$x = c \cdot \ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)$$

In einer Kurvengleichung interessieren wir uns nicht für x, sondern für y.

Wir greifen deshalb zur Umkehrfunktion, die lautet

$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \operatorname{arsinh} z$$

demnach

$$x = c \cdot \operatorname{arsinh} z$$

Wir nehmen z aus der Areafunktion

$$z = \sinh \frac{x}{c} \quad \text{ferner haben wir früher definiert}$$

$$z = y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{oder}$$

$$dy = z \cdot dx$$

In obiger Gleichung eingesetzt, wird

$$dy = \sinh \frac{x}{c}\, dx \quad ⑥a$$

und das Integral lautet

$$y = \int \sinh \frac{x}{c}\, dx$$

Durch Integration ergibt sich

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} + k$$

Da aber, wie früher gezeigt, die y-Achse die Symmetrieachse der Kurve bildet, wird $k = o$,
und wir erhalten die endgültige Formel der Kettenlinie

$$\boxed{y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}} \quad ⑦$$

Diese Form kann auch durch eine e-Potenzfunktion ausgedrückt werden.

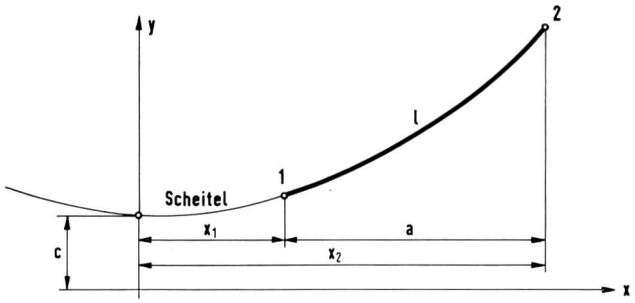
Die hyperbolische Kosinusfunktion lautet allgemein

$$\cosh \psi = \frac{1}{2}\left(e^{\psi} + e^{-\psi}\right)$$

Womit die Gleichung ⑦ übergeht in

$$\boxed{y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)} \quad ⑧$$

3.2 *Die Länge der Kettenlinie*



Definitionen: $a = x_2 - x_1$ l = Länge des Bogens zwischen 1 und 2

Wir gehen von der Differentialgleichung ④ aus, die lautet

$$c \cdot y'' = \sqrt{1 + y'^2} = \frac{dl}{dx}$$

und multiplizieren

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad ⑨$$

Die Formel ⑥a haben wir im Abschnitt 1 abgeleitet

$$dy = \sinh \frac{x}{c}\, dx$$

somit ist

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{c} = y'$$

und

$$y'^2 = \sinh^2 \left(\frac{x}{c}\right)$$

Wir setzen den Ausdruck in Gleichung ⑨ ein

$$dl = \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{x}{c}\right)}\, dx \qquad ⑩$$

Es ist aber

$$\cosh^2 \left(\frac{x}{c}\right) - \sinh^2 \left(\frac{x}{c}\right) = 1$$

deshalb lautet die Gleichung ⑩ nun

$$dl = \sqrt{\cosh^2 \left(\frac{x}{c}\right)}\, dx$$

oder

$$dl = \cosh \frac{x}{c}\, dx$$

Die Länge des Bogens von 1 bis 2 erhalten wir durch Integration in den Grenzen x_1 bis x_2

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \cosh \frac{x}{c}\, dx$$

und die Länge wird

$$l = c \left(\sinh \frac{x_2}{c} - \sinh \frac{x_1}{c}\right) \qquad ⑪$$

Durch trigonometrische Umformung der Gleichung ⑪ ergibt

$$l = 2 \cdot c \cdot \cosh \left(\frac{x_2 + x_1}{2c}\right) \cdot \sinh \left(\frac{x_2 - x_1}{2c}\right)$$

es ist aber

$x_2 - x_1 = a$, so dass

$$\boxed{l = 2 \cdot c \cdot \cosh \left(\frac{x_2 + x_1}{2c}\right) \cdot \sinh \frac{a}{2c}} \quad \text{wird.} \qquad ⑫$$

Die Kettenlinie zwischen den Punkten 1 und 2 hat die Länge nach Gleichung ⑫, wobei diese Form keinerlei Vereinfachungen einschliesst.

3.3 *Bestimmung der Höhe h*

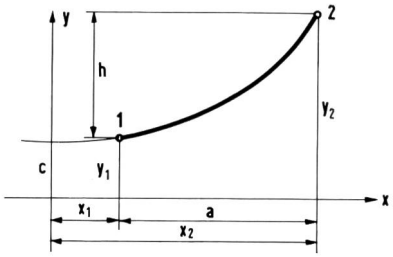
Die Höhe h ist in der Regel gegeben, wie wir später aber sehen, dient die Gleichung der Höhe zur Bestimmung der Abszissen x_1 und x_2.

Aus den Scheitelkoordinaten lässt sich der Höhenunterschied der Aufhängepunkte wie folgt errechnen:

Unter Berücksichtigung der allgemeinen Kettenliniengleichung

$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$ und der Definition

$h = y_2 - y_1$ können wir weitere Beziehungen aufstellen



$$h = c \cdot \cosh \frac{x_2}{c} - c \cdot \cosh \frac{x_1}{c}$$

oder

$$h = c \left(\cosh \frac{x_2}{c} - \cosh \frac{x_1}{c}\right)$$

Trigonometrisch umgeformt lautet die Gleichung

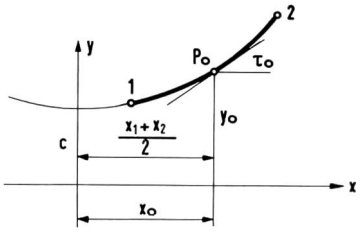
$$h = 2c \left[\sinh \left(\frac{x_2 + x_1}{2c}\right) \cdot \sinh \left(\frac{x_2 - x_1}{2c}\right)\right]$$

Ferner ist $x_2 - x_1 = a$, womit die Gleichung ihre endgültige Form annimmt.

$$\boxed{h = 2c \left[\sinh \left(\frac{x_2 + x_1}{2c}\right) \cdot \sinh \left(\frac{a}{2c}\right)\right]} \qquad ⑬$$

3.4 *Vereinfachung der Längenformel*

Wir suchen nun nach einer Vereinfachung der Gleichung, in der möglichst wenig hyperbolische Funktionen auftreten sollten. Es führen verschiedene Ableitungen zum Ziel, es sei hier die Methode nach *G. Hunziker* erläutert.



Wir nehmen den Punkt P_o so an, dass

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = x_o \quad \text{ist.}$$

y_o wird nach der allgemeinen Kettenformel

$$y_o = c \cdot \cosh \frac{x_o}{c} \qquad (14)$$

Der Tangentenwinkel zur Abszisse im Punkte P_o sei

$$\operatorname{tg} \tau_o = \frac{dy_o}{dx} = \frac{d\left(\cosh \frac{x_o}{c}\right)}{dx} = \sinh \frac{x_o}{c} \qquad (14)\text{a}$$

Wir können weiter schreiben, dass

$$\cosh^2\left(\frac{x_o}{c}\right) = 1 + \sinh^2\left(\frac{x_o}{c}\right)$$

oder

$$\cosh\left(\frac{x_o}{c}\right) = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x_o}{c}\right)}$$

Da aber

$$\operatorname{tg} \tau_o = \sinh\left(\frac{x_o}{c}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2 \tau_o = \sinh^2\left(\frac{x_o}{c}\right)$$

$$\text{wird} \quad \cosh\left(\frac{x_o}{c}\right) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau_o}$$

und trigonometrisch umgeformt mit

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau_o}} = \cos \tau_o$$

erhalten wir

$$\cosh\left(\frac{x_o}{c}\right) = \frac{1}{\cos \tau_o}$$

Die Gleichung (14) geht unter Berücksichtigung der eben abgeleiteten Beziehung in die Form über

$$y_o = \frac{c}{\cos \tau_o} \qquad (15)$$

3.4.1 *Vergleich der Winkel τ_o und ψ*

Mit analytischen Mitteln soll gezeigt werden, dass der Tangentenwinkel τ_o mit der Abszisse annähernd dem Winkel zwischen der Verbindungsgeraden von 1 und 2 und der Horizontalen entspricht.

In Gleichung (13) ersetzen wir den Ausdruck $\frac{x_2 + x_1}{2}$ durch x_o, so dass

$$h = 2\,c\left[\sinh\left(\frac{x_o}{c}\right) \cdot \sinh\left(\frac{a}{2\,c}\right)\right]$$

und

$$\sinh\left(\frac{x_o}{c}\right) = \frac{h}{\sinh\left(\frac{a}{2\,c}\right) 2 \cdot c} \quad \text{wird.}$$

Daraus ergibt sich

$$x_o = c \cdot \operatorname{arsinh} \frac{h}{2\,c \cdot \sinh\left(\frac{a}{2\,c}\right)} \qquad (16)$$

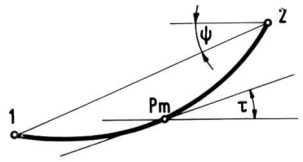
Der Wert von $\frac{a}{2\,c}$ liegt bei normalen Kabeln und Spannweiten in der Grössenordnung von 10^{-1} bis 10^{-2}. Für derart kleine Zahlen ist die hyperbolische Sinusfunktion ungefähr gleich dem Argument, und wir können mit sehr grosser Annäherung schreiben

$$2\,c \cdot \sinh \frac{a}{2\,c} \cong \frac{2\,c \cdot a}{2\,c} = a$$

In Gleichung (16) übertragen, lautet die Annäherung somit

$$x_o \cong c \cdot \operatorname{arsinh} \frac{h}{a} \qquad (17)$$

Wir betrachten den Punkt Pm näher, in dem die Tangente der Kettenlinie parallel der Sehne 1—2 verläuft



$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{a}$$

Für den Punkt Pm mit den Koordinaten xm und ym gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(c \cdot \cosh \frac{xm}{c}\right) = \sinh \frac{xm}{c} = \operatorname{tg} \tau$$

Nach Voraussetzung ist $\psi = \tau$, so dass

$$\sinh \frac{xm}{c} = \frac{h}{a}$$

Wir lösen nach xm auf

$$xm = c \cdot \operatorname{arsinh} \frac{h}{a} \qquad (18)$$

Betrachten wir nun die Gleichungen ⑰ und ⑱, so stellen wir fest, dass ihre Resultate übereinstimmen. Wir können daher sagen, dass mit guter Annäherung

$$xm = x_o \quad \text{ist}$$

oder auch

$$x_1 + x_2 = 2\,x_o \simeq 2\,x\,m \qquad ⑲$$

Die Ordinate des Punktes Pm, in der die Tangente parallel zur Sehne verläuft, liegt praktisch in der Mitte der Spannweite.

Wir haben damit eine sehr wichtige Aussage festgehalten, die uns im Verlaufe der weitern Ableitungen willkommene Dienste leisten wird. Auch bei der zeichnerischen Darstellung der Durchhangslinie benützen wir diese Erkenntnis, indem der grösste Durchhang in der Mitte der Spannweite abgetragen werden kann.

Diese Vereinfachung nehmen wir in Gleichung ⑫ auf. Sie lautet

$$l = 2\,c\left[\cosh\left(\frac{x_2 + x_1}{2\,c}\right) \cdot \sinh\left(\frac{a}{2\,c}\right)\right]$$

Dabei wird das erste Glied der Formel

$$\cosh\left(\frac{x_2 + x_1}{2\,c}\right) = \cosh\frac{x_o}{c} = \frac{1}{\cos\tau_o} = \frac{1}{\cos\psi} \qquad ⑳$$

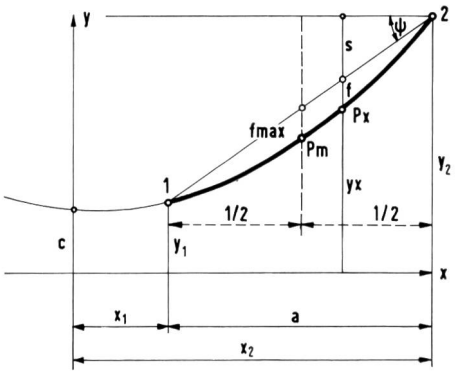
und eingesetzt

$$\boxed{l = \frac{2\,c}{\cos\psi} \cdot \sinh\frac{a}{2\,c}} \qquad ㉑$$

Damit ist die Näherungsformel der Länge einer Kettenlinie abgeleitet.

3.5 *Durchhang f*

3.5.1 *Allgemeines*



Wir betrachten den Punkt Px im Abstand x vom Scheitel $f_x = y_2 - s - y_x$

Die einzelnen Glieder können durch Umformen wie folgt ausgedrückt werden:

$$y_2 = c \cdot \cosh\frac{x_2}{c}$$

$$y_x = c \cdot \cosh\frac{x}{c}$$

$$s = (x_2 - x)\,\mathrm{tg}\,\psi = (x_2 - x)\,\frac{h}{a}$$

Der Durchhang im Punkte Px wird

$$\boxed{f_x = c\left(\cosh\frac{x_2}{c} - \cosh\frac{x}{c}\right) - (x_2 - x)\,\frac{h}{a}} \qquad ㉒$$

3.5.2 *Der maximale Durchhang*

Der maximale Durchhang f_{max} tritt im Punkt Pm auf, wo die Tangente an die Kettenlinie parallel zur Sehne 1—2 verläuft.

Der Sehnenwinkel ist

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{h}{a}$$

und der Winkel der Tangente

$$\mathrm{tg}\,\tau = ym' = \frac{d}{dx}\left(c \cdot \cosh\frac{xm}{c}\right) = \sinh\frac{xm}{c}$$

Es ist somit

$$\frac{h}{a} = \sinh\frac{xm}{c}$$

Wie bereits in den Gleichungen ⑰, ⑱, ⑲ gezeigt, gilt:

$$x_1 + x_2 = 2\,xm$$

Weiter ist

$$x_2 = 2\,xm - x_1 = 2\,xm - (x_2 - a)$$

$$x_2 = \frac{a}{2} + xm$$

Greifen wir auf die Gleichung ㉒ zurück und ersetzen x_2 durch den vorstehenden Wert, so können wir schreiben:

$$f_{max} = c\left[\cosh\left(\frac{xm + \frac{a}{2}}{c}\right) - \cosh\frac{xm}{c}\right] - \underbrace{\left(xm + \frac{a}{2} - xm\right)\frac{h}{a}}_{\frac{h}{2}}$$

Der Ausdruck $\cosh\left(\frac{xm + \frac{a}{2}}{c}\right)$ lässt sich folgendermassen auflösen:

$$\cosh\left(\frac{xm + \frac{a}{2}}{c}\right) = \cosh\frac{xm}{c} \cdot \cosh\frac{a}{2\,c} + \sinh\frac{xm}{c} \cdot \sinh\frac{a}{2\,c}$$

Ferner entnehmen wir der Gleichung ⑳

$$\cosh \frac{xm}{c} = \frac{1}{\cos \psi}$$

$$\sinh \frac{xm}{c} = \frac{h}{a}$$

so wird

$$\cosh \left(\frac{xm + \frac{a}{2}}{c} \right) = \frac{1}{\cos \psi} \cdot \cosh \frac{a}{2c} + \frac{h}{a} \cdot \sinh \frac{a}{2c} \quad \text{und}$$

$$f_{max} = c \left[\frac{1}{\cos \psi} \cdot \cosh \frac{a}{2c} + \frac{h}{a} \cdot \sinh \frac{a}{2c} - \frac{1}{\cos \psi} \right] - \frac{h}{2}$$

$$= \frac{c}{\cos \psi} \left[\cosh \frac{a}{2c} - 1 \right] + \frac{h}{a} \cdot c \cdot \sinh \frac{a}{2c} - \frac{h}{2}$$

Nun ist aber

$$c \cdot \sinh \frac{a}{2c} \cong \frac{a}{2} \quad \text{oder}$$

$$f_{max} = \frac{c}{\cos \psi} \left[\cosh \frac{a}{2c} - 1 \right] + \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{2} - \frac{h}{2}$$

und somit

$$\boxed{f_{max} = \frac{c}{\cos \psi} \left(\cosh \frac{a}{2c} - 1 \right)} \quad ㉓$$

4. Reihenentwicklung der Exponential-Funktionen

Wir benützen die Reihen von *Maclaurin*.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f''''(0)$$

Wir setzen ein	dabei werden die Werte für
$f(x) = \cosh x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \sinh x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = \cosh x$	$f''(0) = 1$
$f'''(x) = \sinh x$	$f'''(0) = 0$
usw.	

In der Gleichung von Maclaurin übernommen

$$f(x) = \cosh(x) = 1 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!} \cdot 1 + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \frac{x^4}{4!} 1 + \ldots$$

oder zusammengefasst

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \ldots$$

Bei sinh x gehen wir den gleichen Weg; es ist somit

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

4.1 *Gleichung der Kettenlinie*

Aus $y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$ wird

$$\boxed{y = c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3} + \frac{x^6}{720c^5} + \ldots} \quad ㉔$$

4.2 *Gleichung der Höhe*

Nach ⑬ ist

$$h = c \left(\cosh \frac{x_2}{c} - \cosh \frac{x_1}{c} \right)$$

$$c \cdot \cosh \frac{x_2}{c} = c + \frac{x_2^2}{2c} + \frac{x_2^4}{24c^3} + \frac{x_2^6}{720c^5}$$

ebenso

$$c \cdot \cosh \frac{x_1}{c} = c + \frac{x_1^2}{2c} + \frac{x_1^4}{24c^3} + \frac{x_1^6}{720c^5}$$

Durch Umformen der einzelnen Glieder und Zusammenfassen wird

$$h = c - c + \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2c} + \frac{x_2^4 - x_1^4}{24c^3} + \frac{x_2^6 - x_1^6}{720c^5} \right)$$

Vernachlässigen wir das letzte Glied, so erhalten wir

$$h = \frac{1}{2c} \left[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2)}{12c^2} \right]$$

und schreiben

$$\boxed{h = \frac{a}{2c} (x_2 + x_1) \left[1 + \frac{x_2^2 + x_1^2}{12c^2} \right]} \quad ㉕$$

4.3 *Gleichung der Länge*

Unter Gleichung ㉑ finden wir die vereinfachte Längenformel

$$l = \frac{2c}{\cos \psi} \cdot \sinh \frac{a}{2c}$$

Reihenentwicklung des Faktors $\sinh \frac{a}{2c}$

$$\sinh \frac{a}{2c} = \frac{a}{2c} + \frac{\left(\frac{a}{2c}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{a}{2c}\right)^5}{120} + \ldots$$

und eingesetzt

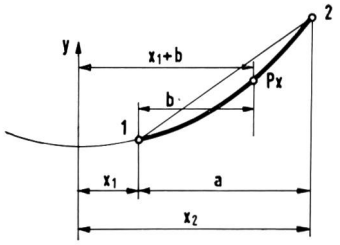
$$l = \left(\frac{2c}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{2c} \right) \left[a + \frac{a^3}{24 \cdot c^2} + \frac{a^5}{1920c^4} \right]$$

somit lautet die vereinfachte Form wie folgt

$$\boxed{l = \frac{a}{\cos \psi} \left(1 + \frac{a^2}{24c^2} + \frac{a^4}{1920c^4} \right)} \quad ㉖$$

4.4 *Gleichung des Durchhangs*

4.4.1 *Allgemeines*



Die Distanz des Punktes Px vom untern Aufhängepunkt 1 sei b, darnach beträgt die Distanz vom Scheitel
$x = x_1 + b$

Wir nehmen die allgemeine Durchhangsgleichung (22) und setzen ein

$$f_x = c\left[\cosh\frac{x_2}{c} - \cosh\left(\frac{x_1+b}{c}\right)\right] - [x_2 - (x_1+b)]\frac{h}{a}$$

$$f_x = c\left[\cosh\frac{x_2}{c} - \cosh\left(\frac{x_1+b}{c}\right)\right] - (a-b)\frac{h}{a}$$

Nun gehen wir zur Reihenentwicklung über:

$$f_x = c\left\{\left[1 + \frac{\left(\frac{x_2}{c}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x_2}{c}\right)^4}{24}\right] - \left[1 + \frac{\left(\frac{x_1+b}{c}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x_1+b}{c}\right)^4}{24}\right]\right\} - (a-b)\frac{h}{a}$$

Wir nehmen $\frac{1}{2c^2}$ vor die Klammer

$$f_x = \frac{1}{2c}\left[x_2^2 - (x_1+b)^2 + \frac{x_2^4 - (x_1+b)^4}{12c^2}\right] - (a-b)\frac{h}{a}$$

oder, wenn die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden, gilt

$$\boxed{f_x = \frac{1}{2c}[x_2^2 - (x_1+b)^2] - (a-b)\frac{h}{a}} \qquad (27)$$

4.4.2 *Der maximale Durchhang*

Wir basieren auf der Gleichung (23)

$$f_{max} = \frac{c}{\cos\psi}\left[\cosh\frac{a}{2c} - 1\right]$$

und entwickeln mit Hilfe der Reihe

$$f_{max} = \frac{c}{\cos\psi}\left[1 + \frac{\left(\frac{a}{2c}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{a}{2c}\right)^4}{24} + \frac{\left(\frac{a}{2c}\right)^6}{720} - 1\right]$$

$$\boxed{f_{max} = \frac{a^2}{8\cdot c\cdot\cos\psi}\left(1 + \frac{a^2}{48\cdot c^2}\right)} \qquad (28)$$

5. Ableitung der Zustandsgleichung

Ein zwischen zwei Punkten aufgehängtes, vollständig elastisches Seil erfährt durch die Temperaturschwankungen eine Längenänderung und durch die zusätzlichen Kräfte, hervorgerufen durch Schnee, Wind und Rauhreif, eine Formänderung.

Die Zustandsgleichung erfasst die neuen geometrischen und physikalischen Zustände gegenüber den ursprünglich angenommenen. Die Form der Kurve bleibt immer eine Kettenlinie.

Der Parameter c ist, wie früher gezeigt, bestimmt durch

$$c = \frac{H}{g}$$

Wir dividieren die Horizontalkomponente H durch den Querschnitt q, was der spezifischen Spannung p entspricht

$$\frac{H}{q} = p$$

Das Gewicht des Kabels je Längeneinheit g, dividiert durch den Querschnitt q, gibt das spezifische Gewicht

$$\frac{g}{q} = \gamma$$

so dass wir folgende Gleichung erhalten

$$c = \frac{p}{\gamma}$$

Die Änderung des Eigengewichtes zufolge der thermischen und elastischen Längenänderung ist so klein, dass wir ihr nicht Rechnung tragen. Die Eigengewichte sind in jedem Fall auf die ungedehnte Kabellänge bezogen. Wir betrachten die Länge im belasteten und unbelasteten Zustand und setzen die Differenz gleich der linearen Ausdehnung, die zur elastischen Dehnung gezählt wird.

Längendifferenz

$$\triangle l = l_o - l$$

Thermische Dehnung

$$\triangle l_T = \alpha\cdot\triangle t\cdot l$$

Elastische Dehnung

$$\triangle l_E = \frac{(\overline{p}_o - \overline{p})\,l}{E}$$

Die Längendifferenz wird demnach

$$\triangle l = \triangle l_E + \triangle l_T = l_o - l$$

Wir untersuchen zuerst die Längenänderung. Die Gleichung (12) der Kurvenlänge lautet

$$l = 2c\left[\cosh\left(\frac{x_2 + x_1}{2c}\right) \cdot \sinh\frac{a}{2c}\right]$$

wobei $c = \frac{p}{\gamma}$

somit

$$l = \frac{2p}{\gamma}\left[\cosh\left(\frac{(x_2 + x_1)\gamma}{2p}\right) \cdot \sinh\frac{a \cdot \gamma}{2p}\right] \qquad (29)$$

Wir suchen eine Vereinfachung des Wertes $\frac{x_2 + x_1}{2}$ damit die Gleichungen für weitere Berechnungen weniger Schwierigkeiten bieten.

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = xm = x_o$$

$$h = y_2 - y_1$$

Nun gilt es, eine Beziehung zwischen x und y zu finden.

Nach Gleichung (24) ist

$$y = c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3} + \frac{x^6}{720c^5} + \ldots$$

Wir vernachlässigen die Glieder höherer Ordnung. Es ist somit

$$y = c\left(1 + \frac{x^2}{2c^2}\right)$$

Dieser Ausdruck stellt die Parabelgleichung dar. Es ist aber

$$h = y_2 - y_1 = c\left(1 + \frac{x_2^2}{2c^2}\right) - c\left(1 + \frac{x_1^2}{2c^2}\right)$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2c}$$

oder

$$\frac{(x_2 - x_1)\ (x_2 + x_1)}{2c} \qquad \text{wobei } x_2 - x_1 = a$$

und daher

$$h = \frac{a\,(x_2 + x_1)}{2c} \qquad \text{oder umgeformt}$$

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{h \cdot c}{a} = \frac{h \cdot p}{a \cdot \gamma}$$

Eine einfache Beziehung, die wir in Gleichung (29) verwenden,

$$l = \frac{2p}{\gamma}\left[\cosh\left(\frac{h \cdot p \cdot \gamma}{a \cdot \gamma \cdot p}\right) \cdot \sinh\frac{a \cdot \gamma}{2p}\right]$$

wird durch Reihenentwicklung

$$l = \frac{2p}{\gamma}\left[\left(1 + \frac{h^2}{2a^2} + \frac{h^4}{24a^4} + \ldots\right)\left(\frac{a \cdot \gamma}{2p} + \frac{a^3 \cdot \gamma^3}{48p^3} + \frac{a^5 \cdot \gamma^5}{2^5 \cdot 120 \cdot p^5}\right)\right]$$

Auch hier vernachlässigen wir die Glieder höherer Ordnung und schreiben

$$l = \frac{2p}{\gamma}\left[\left(1 + \frac{h^2}{2a^2}\right)\left(\frac{a \cdot \gamma}{2p} + \frac{a^3 \cdot \gamma^3}{48p^3}\right)\right]$$

Multipliziert ergibt dies:

$$l = \frac{2p}{\gamma}\left[\frac{a \cdot \gamma}{2p} + \frac{a^3 \cdot \gamma^3}{48p^3} + \frac{h^2 \cdot \gamma}{4a \cdot p} + \frac{a \cdot h^2 \cdot \gamma^3}{96p^3}\right]$$

Vereinfacht und nach Potenzreihen geordnet ist

$$l = a + \frac{h^2}{2a} + \frac{a^3 \cdot \gamma^2}{24p^2} + \frac{a \cdot h^2 \cdot \gamma^2}{48p^2} \qquad (30)$$

Im soeben erhaltenen Wert entspricht l dem unbelasteten Zustand.

Die Zusatzlast können wir analog ausdrücken

$$l_o = a + \frac{h^2}{2a} + \frac{a^3 \cdot \gamma_o^2}{24p_o^2} + \frac{a \cdot h^2 \cdot \gamma_o^2}{48p_o^2}$$

somit wird die Längendifferenz

$$\Delta l = l_o - l$$

$$= \left(a + \frac{h^2}{2a} + \frac{a^3 \cdot \gamma_o^2}{24p_o^2} + \frac{a \cdot h^2 \cdot \gamma_o^2}{48p_o^2}\right) - \left(a + \frac{h^2}{2a} + \frac{a^3 \cdot \gamma^2}{24p^2} + \frac{a h^2 \cdot \gamma^2}{48p^2}\right)$$

$$= \frac{a^3}{24}\left(\frac{\gamma_o^2}{p_o^2} - \frac{\gamma^2}{p^2}\right) + \frac{a \cdot h^2}{48}\left(\frac{\gamma_o^2}{p_o^2} - \frac{\gamma^2}{p^2}\right)$$

$$\Delta l = \frac{2a^3 + a h^2}{48}\left[\left(\frac{\gamma_o}{p_o}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{p}\right)^2\right] \qquad (31)$$

Es bleibt weiter zu untersuchen, ob die rechte Seite der Gleichung $\Delta l = \Delta l_E + \Delta l_T$ vereinfacht werden kann.

Bis anhin wurde die Tangentialspannung als konstant angenommen, in Wirklichkeit ändert sie aber von Punkt zu Punkt. Sie ist im Scheitel am kleinsten und erreicht im obern Aufhängepunkt ihr Maximum.

5.1 *Die mittlere Kabelspannung*

Wir überlegen uns, ob die mittlere Kabelspannung sich als genügend genau erweist.

Wir greifen zurück auf Gleichung (15)

$y_o = \frac{c}{\cos\tau_o}$ allgemein $y = \frac{c}{\cos\tau}$ und ersetzen c durch $\frac{p}{\gamma}$

somit ist

$$y = \frac{p}{\gamma \cdot \cos\tau}$$

oder

$$p = y \cdot \gamma \cdot \cos\tau$$

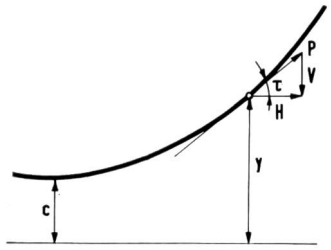
Der Horizontalzug ist deshalb $H = p \cdot q$

Eingesetzt

$$H = y \cdot \gamma \cdot \cos\tau \cdot q$$

und umgeformt

$$\frac{H}{\cos\tau} = y \cdot \gamma \cdot q$$



Aus dem Kräftedreieck wird:

$$\frac{H}{\cos \tau} = P$$

und

$$P = q \cdot p$$

so dass wir folgende Gleichung aufstellen können

$$\frac{H}{\cos \tau} = p \cdot q = y \cdot \gamma \cdot q$$

oder

$$p = \gamma \cdot y$$

In Worten ausgedrückt: die Kabelspannung ist gleich dem virtuellen spezifischen Gewicht γ des Kabels, multipliziert mit der Ordinate y.

Die mittlere Kabelspannung $\bar{p}$ wäre definitionsgemäss durch Integration der variablen Spannung p längs der Kettenlinie zu bestimmen. Es ist jedoch nach *G. Hunziker* auch für die extremsten Fälle zulässig, den Mittelwert durch Integration über die horizontale Spannweite a zu ermitteln.

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \gamma \cdot dx \qquad (32)$$

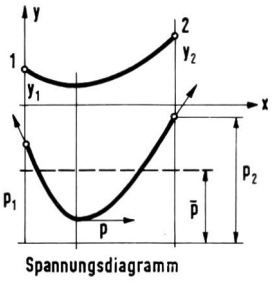
y ist aber $\frac{p}{\gamma} \cdot \cosh\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)$

und wir erhalten

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p}{\gamma} \cdot \cosh\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right) \cdot \gamma \cdot dx$$

Wir integrieren

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \cdot p \cdot \frac{p}{\gamma} \left[\sinh\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)\right]$$



Spannungsdiagramm

Die Kurvenlänge aus Gleichung (11) ist aber

$$l = \frac{p}{\gamma} \left[\sinh\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)\right]$$

somit können wir den Klammerausdruck durch l ersetzen, was folgendes Resultat ergibt

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \cdot p \cdot l \qquad (33)$$

(wobei p = Scheitelspannung)

Das erste Ziel ist erreicht, wir haben eine willkommene Vereinfachung der mittleren Spannung gefunden.

Nun kommen wir auf die ursprüngliche Gleichung $\Delta l = \Delta l_E + \Delta l_T$ zurück, die nun lautet

$$\frac{2a^3 + a \cdot h^2}{48} \left[\left(\frac{\gamma_o}{p_o}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{p}\right)^2\right] = \Delta t \cdot \alpha \cdot l + \frac{l}{E} (\bar{p}_o - \bar{p}) \qquad (34)$$

Die rechte Seite dieser Formel, die elastische und thermische Dehnung, kann noch vereinfacht werden

$$\bar{p} = \frac{p}{a} \cdot l \quad \text{und} \quad \bar{p}_o = \frac{p_o}{a} \cdot l_o$$

Die Werte von l_o und l kennen wir schon und setzen ein:

$$\bar{p}_o = \frac{p_o}{a} \left(a + \frac{h^2}{2a} + \frac{a^3 \cdot \gamma_o^2}{24\, p_o^2} + \frac{a \cdot h^2 \cdot \gamma_o^2}{48\, p_o^2}\right)$$

für $\bar{p}$ analog

$$\bar{p} = \frac{p}{a} \left(a + \frac{h^2}{2a} + \frac{a^3 \cdot \gamma^2}{24\, p^2} + \frac{a \cdot h^2 \cdot \gamma^2}{48\, p^2}\right)$$

durch Subtrahieren und Zusammenziehen wird

$$\bar{p}_o - \bar{p} = (p_o - p)\left(1 + \frac{h^2}{2a^2}\right) + \left(\frac{2a^2 + h^2}{48}\right)\left(\frac{\gamma_o^2}{p_o} - \frac{\gamma^2}{p}\right)$$

und Gleichung (34) wird nun

$$a\left(\frac{2a^2 + h^2}{48}\right)\left[\left(\frac{\gamma_o}{p_o}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{p}\right)^2\right] = \Delta t \cdot \alpha \cdot l + \frac{l}{E}\left[(p_o - p)\left(1 + \frac{h^2}{2a^2}\right) + \left(\frac{2a^2 + h^2}{48}\right)\left(\frac{\gamma_o^2}{p_o} - \frac{\gamma^2}{p}\right)\right]$$

Wir dividieren durch

$$\frac{2a^2 + h^2}{48}$$

$$a\left[\left(\frac{\gamma_o}{p_o}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{p}\right)^2\right] = \frac{\Delta t \cdot \alpha \cdot l \cdot 48}{2a^2 + h^2} + \frac{l}{E}\left[(p_o - p)\frac{48}{2a^2} + \left(\frac{\gamma_o^2}{p_o} - \frac{\gamma^2}{p}\right)\right]$$

Mit der Zustandsgleichung suchen wir eine mathematische Beziehung zwischen den belasteten und unbelasteten Zuständen. Eine Gruppierung nach p kann vorgenommen werden, indem wir die Gleichung ausmultiplizieren

$$\frac{a \cdot \gamma_o^2}{p_o^2} - \frac{a \cdot \gamma^2}{p^2} = \frac{\Delta t \cdot \alpha \cdot l \cdot 48}{2a^2 + h^2} + \frac{l}{E}\frac{48}{2a^2} p_o - \frac{l}{E}\frac{48}{2a^2} \cdot p + \frac{l}{E} \cdot \frac{\gamma_o^2}{p_o} - \frac{l}{E} \cdot \frac{\gamma^2}{p}$$

Wir supprimieren die p-Werte in den Nennern, indem wir mit p^2 multiplizieren und zugleich nach Potenzen ordnen

$$\frac{l \cdot 24\, p^3}{E \cdot a^2} - p^2 \left[\frac{\Delta t \cdot \alpha \cdot l \cdot 48}{2\,a^2 + h^2} - \frac{a \cdot \gamma_o^2}{p_o^2} + \frac{l \cdot 24 \cdot p_o}{E \cdot a^2} + \frac{l \cdot \gamma_o^2}{E \cdot p_o} \right] + \frac{l \cdot \gamma^2 \cdot p}{E} = a \cdot \gamma^2$$

P-Werte höherer Ordnung versuchen wir zu separieren, indem wir durch den Ausdruck $\frac{l \cdot 24}{E \cdot a^2}$ dividieren und nun folgende Gleichung aufstellen.

$$p^3 - p^2 \left[\frac{\Delta t \cdot \alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2a^2}} - \frac{\gamma_o^2 \cdot a^3 \cdot E}{p_o^2 \cdot 24 \cdot l} + p_o + \frac{\gamma_o^2 \cdot a^2}{24 \cdot p_o} \right] + \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot p}{24} = \frac{a^3 \cdot \gamma^2 \cdot E}{24 \cdot l}$$

oder

$$p^3 + p^2 \left[\frac{\gamma_o^2 \cdot a^3 \cdot E}{p_o^2 \cdot 24 \cdot l} - \frac{\Delta t \cdot \alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2\,a^2}} - p_o - \frac{\gamma_o^2 \cdot a^2}{24 \cdot p_o} \right] + \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot p}{24} = \frac{a^3 \cdot \gamma^2 \cdot E}{24 \cdot l} \qquad (35)$$

In der obigen Formel finden wir noch zwei Glieder, die den störenden Faktor l enthalten; l soll durch eine einfache Beziehung mit a, h, oder ψ ersetzt werden. Wir greifen auf die Gleichung (26) zurück

$$l = \frac{a}{\cos \psi} \left(1 + \frac{a^2}{24\,c^2} + \frac{a^4}{1920\,c^4} \right)$$

oder wenn $c = \frac{p}{\gamma}$

$$l = \frac{a}{\cos \psi} \left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma^2}{24\,p^2} + \frac{a^4 \cdot \gamma^4}{1920\,p^4} \right)$$

Wie schon öfters im Verlaufe der Ableitung der Zustandsgleichung vernachlässigen wir die Glieder höherer Ordnung

$$l \cong \frac{a}{\cos \psi}$$

In Gleichung (35) übernommen wird

$$p^3 + p^2 \left[\frac{\gamma_o^2 \cdot a^2 \;\; E \cdot \cos \psi}{p_o^2 \cdot 24} - \frac{\Delta t \cdot \alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2a^2}} - p_o - \frac{\gamma_o^2 \cdot a^2}{24 \cdot p_o} \right] + \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot p}{24} = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos \psi}{24} \qquad (36)$$

Wir basierten stets auf den o-Zuständen

$\Delta l = l_o - l$
$\Delta p = p_o - p$
$\Delta t = t_o - t$

oder umgekehrt

$-\Delta t = t - t_o$

damit wird t positiv und die Gleichung (36) nimmt folgende Form an

$$p^3 + p^2 \left[\frac{\gamma_o^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos \psi}{p_o^2 \cdot 24} + \frac{(t - t_o)\, \alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2\,a^2}} - p_o - \frac{\gamma_o^2 \cdot a^2}{24 \cdot p_o} \right] + \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot p}{24} = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos \psi}{24} \qquad (37)$$

Die komplizierte Zustandsgleichung ist durch allmähliche Vereinfachung in die vorstehende Form gebracht worden. Die Konzessionen legen der Anwendung gewisse Grenzen, indem die maximalen Spannweiten 1200 m nicht überschreiten sollten.

Betrachten wir ein Telephonkabel dessen Gewichtanteil an nicht tragendem Material sehr gross ist, so verstehen wir dessen verhältnismässig niedrige maximal zulässige Spannweite.

Wir fassen die eingeführten Vereinfachungen nochmals zusammen:

1. der Wert $\frac{x_2 - x_1}{2}$ wird $\frac{h \cdot p}{a \cdot \gamma}$

2. Die Längenformel

$$l = \frac{a}{\cos \psi} \left(1 + \frac{a^2}{24\,c^2} + \frac{a^4}{1920\,c^4} \right) \text{ wird } \cong \frac{a}{\cos \psi}$$

3. Die mittlere Spannung ist

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \cdot p \cdot l$$

In der Literatur finden wir die Zustandsgleichung in mehreren Formen. Der Unterschied lässt sich auf die verschieden angenommenen Vereinfachungen zurückführen. Je einfacher die Zustandsgleichung ist, desto grössere Einschränkungen müssen wir in Bezug auf Spannweite und Geländewinkel in Kauf nehmen. In der hier gezeigten Methode wird besonderer Wert auf die schrittweise Ableitung der Zustandsgleichung gelegt.

Wir betrachten nochmals die Gleichung (37)

Der Ausdruck $\frac{\gamma_o^2 \cdot a^2}{24\,p_o}$ in der Klammer ist gegenüber den andern Gliedern um etwa 10^6mal kleiner und wird weggelassen. Das gleiche gilt für $\frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot p}{24}$

Die endgültige Formel der Zustände, gültig für Spannweiten bis 1200 m und beliebige Geländewinkel, wird somit

$$\boxed{p^3 + p^2 \left[\frac{a^2 \cdot \gamma_o^2 \cdot E \cdot \cos\psi}{24 \cdot p_o^2} + \frac{(t - t_o)\,\alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2\,a^2}} - p_o \right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos\psi}{24}} \quad (38)$$

oder bei horizontalen Spannweiten

$$p^3 + p^2 \left[\frac{a^2 \cdot \gamma_o^2 \cdot E}{24 \cdot p_o^2} + (t - t_o)\,\alpha \cdot E - p_o \right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E}{24} \quad (39)$$

6. Spannungen im Scheitel und an den Aufhängepunkten

Wir haben gesehen, dass die Spannung in irgendeinem Punkt des Kabels gleich dem Produkt aus γ und der zum Punkt gehörenden Ordinate y ist.

$$p_x = \gamma \cdot y_x$$

In die Kettengleichung eingesetzt

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$$

$$p_x = \gamma \cdot c \cdot \cosh \frac{x}{c}$$

Nach der Reihenentwicklung wird

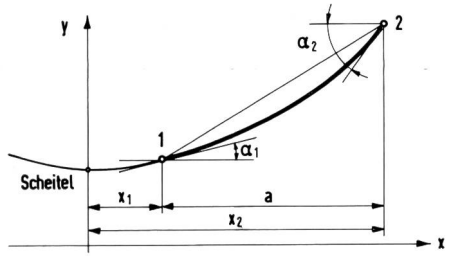
$$p_x = \gamma \cdot c \left(1 + \frac{x^2}{2\,c^2} + \frac{x^4}{24\,c^4} + \ldots \right) \quad \text{oder}$$

$$p_x = p \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x \cdot \gamma}{p} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{x \cdot \gamma}{p} \right)^4 + \frac{1}{720} \left(\frac{x \cdot \gamma}{p} \right)^6 \right.$$

Für die beiden Aufhängepunkte mit den Abszissen x_1 und x_2 wird deshalb

$$\boxed{\begin{aligned} p_{x2} &= p \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p} \right)^4 + \frac{1}{720} \left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p} \right)^6 \right] \\ p_{x1} &= p \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p} \right)^4 + \frac{1}{720} \left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p} \right)^6 \right] \end{aligned}} \quad (40)$$

7. Die Tangente an die Kurve im Aufhängepunkt



Die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt Px lautet analog Formel (14) a

$$\operatorname{tg} \alpha = \sinh \frac{x}{c}$$

Auf die Punkte 1 und 2 angewendet gilt demnach

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \sinh \frac{x_2}{c} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sinh \frac{x_1}{c}$$

Mit Hilfe der Potenzreihe umgeformt wird:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{x_2 \cdot \gamma}{p} + \frac{1}{6} \left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p} \right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p} \right)^5 \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{x_1 \cdot \gamma}{p} + \frac{1}{6} \left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p} \right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p} \right)^5 \end{aligned}} \quad (41)$$

8. Die Parabel

Auf den vorhergehenden Seiten betrachteten wir die Kettenlinie als Berechnungsgrundlage von Weitspannungen. Bei Spannweiten bis zu 500 m und Neigungswinkeln bis 30° ist die Parabel eine gute und brauchbare Annäherung an die theoretische Seilkurve. Die Parabel hat den bedeutenden Vorteil, dass nur Gleichungen zweiten Grades entstehen und somit einfacher zu lösen sind.

Der Vergleich der Formeln zeigt den Zusammenhang der beiden Kurven

Kettenlinie	Parabel
$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$	$y = c + \frac{x^2}{2\,c}$

oder

$$y = c \left(1 + \frac{x^2}{2\,c^2} + \frac{x^4}{24\,c^4} + \ldots \right)$$

Die Parabel setzt sich aus den ersten zwei Gliedern der Kettenlinie zusammen.

Das Hauptgewicht in diesem Artikel wird auf die Kettenlinie gelegt; wir sehen daher von den Ableitungen der Parabelgleichungen ab. Zusammenstellungen der Formeln finden sich jedoch in den *Tabellen I* und *II*.

9. Zugkräfte an den Aufhängepunkten

Bisher sprachen wir von Spannungen; die Zugkraft ist das Produkt aus Querschnitt der tragenden Adern der Armierungsdrähte und Spannung

$$P_{1,2} = p_{1,2} \cdot F \quad (42)$$

10. Sicherheit

Die Schwach- und Starkstromvorschriften verlangen bei Weitspannungen eine minimale Sicherheit von 2 bei 0° C und Zusatzlast.

$$\boxed{S = \frac{\sigma_z}{p_{1,2}} \geqq 2} \quad (43)$$

Tabelle I

Zusammenstellung der Formeln «Kettenlinie»

Berechnung	Hyperbelfunktionen	Exponentialfunktionen
Kurvengleichung	$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$ $y = \frac{p}{\gamma} \cdot \cosh \left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)$	$y = \frac{p}{\gamma} + \frac{x^2 \cdot \gamma}{2\,p} + \frac{x^4 \cdot \gamma^3}{24\,p^3} + \frac{x^6 \cdot \gamma^5}{720\,p^5}$ $y = \frac{p}{2\,\gamma}\left(e^{\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)} + e^{-\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)}\right)$
Länge der Kurve	$l = \frac{2\,p}{\gamma}\left\{\cosh\left[\frac{(x_2 + x_1)\,\gamma}{2\,p}\right] \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \gamma}{2\,p}\right)\right\}$ vereinfacht $l = \frac{2\,p}{\gamma \cdot \cos\psi} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \gamma}{2\,p}\right)$	$l = \frac{a}{\cos\psi}\left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma^2}{24\,p^2} + \frac{a^4 \cdot \gamma^4}{1920\,p^4}\right)$
Durchhang	$f_x = \frac{p}{\gamma}\left\{\cosh\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right) - \cosh\left[\frac{\gamma\,(x_1 + b)}{p}\right]\right\} - \frac{(a-b)\,h}{a}$ $f_{max} = \frac{p}{\gamma \cdot \cos\psi}\left[\cosh\left(\frac{a \cdot \gamma}{2\,p}\right) - 1\right]$	$f_x = \frac{\gamma}{2\,p}\left[x_2^2 - (x_1 + b)^2\right] - (a-b)\,\frac{h}{a}$ $f_{max} = \frac{a^2 \cdot \gamma}{8\,p \cdot \cos\psi}\left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma^2}{48\,p^2}\right)$
Spannungen	$p_x = p \cdot \cosh\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)$ $p_2 = p \cdot \cosh\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right)$ $p_1 = p \cdot \cosh\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)$	$p_x = p\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{x \cdot \gamma}{p}\right)^6\right]$ $p_2 = p\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right)^6\right]$ $p_1 = p\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)^6\right]$
Höhe	$h = \frac{p}{\gamma}\left[\cosh\left(\frac{x_2 \cdot \gamma}{p}\right) - \cosh\left(\frac{x_1 \cdot \gamma}{p}\right)\right]$ oder $h = \frac{2\,p}{\gamma}\left\{\sinh\left[\frac{(x_2 + x_1)\,\gamma}{2\,p}\right] \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \gamma}{2\,p}\right)\right\}$	$h = \frac{a \cdot \gamma}{2\,p}\,(x_2 + x_1)\left[1 + \frac{(x_2^2 + x_1^2)\,\gamma^2}{12\,p^2}\right]$
Zustandsgleichung	$p^3 + p^2\left[\frac{\gamma_o^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos\psi}{24\,p_o^2} + \frac{(t - t_o)\,\alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2\,a^2}} - p_o - \frac{\gamma_o^2 \cdot a^2}{24\,p_o}\right] + \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot p}{24} = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos\psi}{24}$	

Tabelle II

Zusammenstellung der Formeln «Parabel»

Berechnung	Horizontale Spannweiten	Schiefe Spannweiten
Kurvengleichung	$y = \frac{x^2 \cdot \gamma}{2\,p}$	$y = \frac{x^2 \cdot \gamma}{2\,p}$
Länge der Parabellinie	$l = a \left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma^2}{24\,p^2}\right)$	$l = \frac{a}{\cos \psi} \left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma^2}{24\,p^2}\right)$
Durchhang	$f_x = \frac{\gamma \cdot b}{2\,p}(a - b)$ $f_{max} = \frac{a^2 \cdot \gamma}{8\,p}$	$f_x = \frac{\gamma \cdot b}{4\,p}(a - 2\,b) + h\left(1 - \frac{3\,b}{2\,a}\right)$ $f_{max} = \frac{a^2 \cdot \gamma}{8 \cdot p \cdot \cos \psi}$
Spannungen	$p_x = p + \frac{x^2 \cdot \gamma^2}{2\,p}$ $p_2 = p + \gamma \cdot f_{max}$ $p_1 = p + \gamma \cdot f_{max}$	$p_x = p + \frac{x^2 \cdot \gamma^2}{2\,p}$ $p_2 = \frac{p}{\cos \psi} + \gamma\left(f_{max} + \frac{h}{2}\right)$ $p_1 = \frac{p}{\cos \psi} + \gamma\left(f_{max} - \frac{h}{2}\right)$
Höhe	$h = o$	$h = \frac{\gamma \cdot a}{2\,p}(x_2 + x_1)$
Zustandsgleichung	$p^3 + p^2\left[\frac{\gamma_o^2 \cdot a^2 \cdot E}{24\,p_o^2} + (t - to)\,\alpha \cdot E - p_o\right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E}{24}$	$p^3 + p^2\left[\frac{\gamma_o^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos \psi}{24\,p_o^2} + \frac{(t - to)\,\alpha \cdot E}{1 + \frac{h^2}{2\,a^2}} - p_o\right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E \cdot \cos \psi}{24}$
Zugkraft	$P_{1,2} = p_{1,2} \cdot F$	
Sicherheit	$s = \frac{\sigma_z}{p_2}$	

Schluss folgt.