Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 45 (1967)

Heft: 11

Artikel: Oberflächenwellen

Autor: Schanda, Erwin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874910

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Oberflächenwellen[1]

Erwin SCHANDA, Bern

539.566:621.372.2
621.372.326

Zusammenfassung. *Es wird die Güte eines Medium für Wellenausbreitung eingeführt und verwendet, um reale Leiter und Dielektrika zu spezifizieren. Die Randwertbedingungen für die Feldgrössen an Mediumsgrenzen werden abgeleitet und die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf einen ebenen Leiter und solchen mit Kreisquerschnitt werden behandelt. Besonders wird die Polarisation und die Eindringtiefe einer Welle im Falle des ebenen Leiters studiert. Für die Sommerfeld-, Harms-Goubau- und die dielektrische Leitung wird das Wellenbild und die Fortpflanzungskonstante näherungsweise berechnet. In einem Anhang werden die Impedanzdarstellungen einer Leitung im kartesischen und dem Smith-Diagramm besprochen.*

Ondes superficielles

Résumé. *L'auteur introduit et emploie la qualité d'un médium pour la propagation des ondes, pour spécifier des conducteurs et diélectriques réels. Il en déduit les conditions de valeurs extrêmes pour les intensités de champ aux limites du médium et traite la propagation des ondes électromagnétiques sur un conducteur plan et un conducteur de section circulaire. Il étudie en particulier la polarisation et la profondeur de pénétration d'une onde dans le cas d'un conducteur plan. L'allure des ondes et la constante de propagation sont calculés approximativement pour les conducteurs de Sommerfeld, de Harms-Goubau ainsi que pour la conduction diélectrique. Dans un appendice sont discutées les représentations de l'impédance d'un conducteur dans le diagramme cartésien et le diagramme de Smith.*

Onde di superficie

Riassunto. *L'autore fa intervenire ed usa la qualità di un medium per la propagazione delle onde al fine di specificare dei conduttori e dei dielettrici reali. Egli deduce le condizioni dei valori estremi per l'intensità di campo ai limiti del medium e tratta la propagazione delle onde elettromagnetiche su conduttori piani e a sezione circolare. In particolare è esaminata la propagazione e la penetrazione d'un onda nel caso di conduttori piani. Il movimento delle onde e la costante di propagazione sono calcolate approssimativamente per i conduttori Sommerfeld, Harms-Goubau e per quelli dielettrici. In un' appendice vengono descritte le rappresentazioni di impedenza di una linea nel diagramma cartesiano e di Smith.*

1. Die Güte eines Mediums

Die Wellengleichung für harmonische elektromagnetische Schwingungen in einem isotropen homogenen Medium, ausgedrückt durch den *Hertz*schen Vektor $\vec{\Pi}$, lautet

$$\Delta\vec{\Pi} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{\Pi} - \mathrm{i}\omega\mu\sigma\vec{\Pi} = 0 \tag{1}$$

Durch das Δ-Symbol wird der *Laplace*-Operator dargestellt (in karthesischen Koordinaten ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$) und μ, ε und σ bedeuten Permeabilität, Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Mediums, ω ist die Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung und i die Einheit der imaginären Zahlen. Die Koeffizienten der letzten beiden Summanden in (1) kann man zusammenfassen zu

$$K^2 = -\omega^2\mu\left(\varepsilon - \frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega}\right) \tag{2}$$

Es ist K die komplexe Wellenzahl im betreffenden Medium. Der Klammerausdruck in (2) wird häufig als komplexe Dielektrizitätskonstante bezeichnet

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0(\varepsilon_r' - \mathrm{i}\varepsilon_r'') \tag{3}$$

und ε_r' ist der Realteil und $\varepsilon_r'' = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ der Imaginärteil der relativen Dielektrizitätskonstanten. In analoger Weise können magnetische Verluste eines Mediums als Imaginärteil einer komplexen Permeabilität dargestellt werden.

$$\tilde{\mu} = \mu_0(\mu_r' - \mathrm{i}\mu_r'') \tag{4}$$

Ist das Medium, in dem sich eine Welle ausbreitet, passiv ($\sigma \geq 0$) und sind gleichzeitig auch Dielektrizitätskonstante und Permeabilität positiv[2]), dann liegt K^2 auf der *Gauss*schen Zahlenebene stets im 2. Quadranten, und zwar je nachdem ε oder σ/ω überwiegt in der Nähe der negativen reellen beziehungsweise der positiven imaginären Halbachse. Entsprechend liegen die Werte der für ein Medium charakteristischen Wellenzahl

$$K = \mathrm{i}\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega}\right)} \tag{5}$$

zwischen der positiven imaginären Halbachse und der 45°-Geraden durch den Ursprung im 1. Quadranten der Gaussschen Ebene. Analog zur Definition der Güte, zum Beispiel eines Kondensators oder Parallel-Schwingkreises,

$$Q = \frac{\omega C}{G} \tag{6}$$

mit dem Leitwert G und der Kapazität C kann als Mass für die Wellenausbreitungseigenschaften eines Mediums seine Güte [1,2] durch das Verhältnis von Real- und Imaginärteil der komplexen Dielektrizitätskonstanten definiert werden

$$Q = \frac{\varepsilon\omega}{\sigma} \tag{7}$$

Die Ähnlichkeit der Gleichungen (6) und (7) ist keineswegs zufällig. Ist nämlich zwischen den Platten eines Kondensators C_0 ein verlustbehaftetes Material mit einer

[1] Nach einem Vortrag, gehalten anlässlich des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Instituten für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern

[2] Fälle, in denen $\mu < 0$ oder $\varepsilon < 0$, werden in einem späteren Beitrag noch ausführlich behandelt.

Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r'$ und einer Leitfähigkeit σ, so ist die Admittanz an seinen Klemmen gegeben durch

$$Y_c = i\omega C_0 \left(\varepsilon_r' - \frac{i\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)$$

was eine Parallelschaltung der Suszeptanz $B = \omega\, \varepsilon_r'\, C_0$ mit dem Leitwert $G = \dfrac{\sigma C_0}{\varepsilon_0}$ darstellt. Wenn man dies in die Formel für die Güte des Kondensators (6) einsetzt, kann man sich von der Gleichwertigkeit von (6) und (7) überzeugen.

Für ein Medium mit hoher Güte ($Q \gg 1$) – zum Unterschied vom idealen Dielektrikum ($Q = \infty$) auch Quasi-Dielektrikum genannt – kann die komplexe Wellenzahl (5) näherungsweise geschrieben werden als

$$K_D \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + i\omega\sqrt{\varepsilon\,\mu} \tag{8}$$

Für den Quasi-Leiter ($Q \ll 1$) erhält man näherungsweise

$$K_L \approx \sqrt{\frac{\omega\,\mu\,\sigma}{2}}\,(1+i) \tag{9}$$

Die Wellenimpedanz für ebene Wellen ist der Quotient aus elektrischer und zu ihr senkrecht stehender magnetischer Feldstärke [3], §6. Man findet dafür [4]

$$Z = \frac{K}{i\omega\left(\varepsilon - \dfrac{i\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{i\omega\varepsilon + \sigma}} \tag{10}$$

Für das Quasi-Dielektrikum wird dies näherungsweise

$$Z_D \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1 + i\,\frac{\sigma}{2\,\varepsilon\,\omega}\right] \tag{11}$$

während die Wellenimpedanz für den Quasi-Leiter mit

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\,[1+i] \tag{12}$$

angenähert werden kann.

2. Randwertbedingungen

Die *Maxwell*schen Gleichungen gelten für Raumpunkte, in deren Umgebung sich die physikalischen Eigenschaften des Mediums (ε, μ, σ) nur kontinuierlich ändern. An der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien gibt es jedoch eine scharfe Diskontinuität in diesen Eigenschaften. Für die Behandlung solcher Fälle, muss man als Ergänzung zu den Maxwellgleichungen noch Bedingungen zur Hand haben, denen die Feldgrössen entlang den Grenzflächen zu genügen haben.

Wir denken uns die scharfe Diskontinuität an der Begrenzungsfläche zwischen den Medien 1 und 2 ersetzt durch eine dünne Übergangsschicht, in der sich die Parameter ε, μ, σ kontinuierlich ändern. Die Feldgrössen und ihre Ableitungen

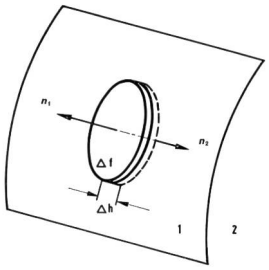

Fig. 1
Grenzschicht der endlichen Dicke Δh, innerhalb der die Parameter von Medium 1 ($\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$) kontinuierlich in die von Medium 2 ($\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$) übergehen, als Ersatz für die diskontinuierliche Grenzfläche

nach Zeit und Ort werden sich deshalb in dieser Schicht kontinuierlich ändern und begrenzt bleiben.

Betrachten wir nun ein zylindrisch berandetes Stück dieser Schicht (*Fig.* 1) der Dicke Δh und Querschnittsfläche Δf.

Wegen des 2. Gaussschen Divergenzgesetzes (div$\boldsymbol{B} = 0$) wissen wir, dass

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{df} = 0 \tag{13}$$

wobei sich das Integral über die gesamte Oberfläche zu erstrecken hat.

Wenn die Querschnittfläche Δf des Zylinders in Figur 1 klein genug ist, darf die Induktion über sie auf jeder Seite als konstant (B_1, B_2) angenommen werden, und wenn die Höhe Δh schliesslich verschwindend klein gemacht wird, darf der Beitrag durch die Mantelfläche vernachlässigt werden. Mit den Einheitsvektoren der Flächennormalen $\boldsymbol{n}_1$ und $\boldsymbol{n}_2$ bleibt von (13) übrig

$$(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2)\,\Delta\mathrm{f} = 0$$

Wir dürfen aber $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}$ setzen, so dass schliesslich, wenn Δf nicht verschwindet,

$$(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{14}$$

sein muss. Dies besagt, dass die Normalkomponente der Induktion durch eine Grenzfläche kontinuierlich verläuft.

Auf die gleiche Weise kann man mit der elektrischen Erregung $\boldsymbol{D}$ verfahren. Allerdings lautet dafür das 1. Gausssche Divergenzgesetz div$\boldsymbol{D} = \varrho$, so dass wir erhalten

$$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{df} = Q \tag{15}$$

wobei ϱ die Raumladungsdichte und $Q = \varrho \Delta\mathrm{h}\,\Delta\mathrm{f}$ die gesamte Ladung im betrachteten Zylinder sind. Da die Ladung in einer dünnen Schicht unmittelbar an der Grenzfläche konzentriert sein kann, definieren wir besser eine Oberflächenladungsdichte $q = \varrho \Delta$h. Mit den gleichen Voraussetzungen wie für $\boldsymbol{B}$ wird aus (15)

$$(\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2)\,\Delta f = q\,\Delta \mathrm{f}$$

Auch hier wieder $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}$ gesetzt, wird dies zu

$$(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n} = q \tag{16}$$

Die Normalkomponente der elektrischen Erregung durch die Grenzfläche zweier Medien erfährt einen Sprung, dessen Grösse durch die Flächenladungsdichte gegeben ist. Bei der Wellenausbreitung interessieren wir uns jedoch meist für quellenfreie Räume, so dass dann die Randbedingung für $\boldsymbol{D}$ wird

$$(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{17}$$

Zur Aufstellung einer Randbedingung für das Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ greifen wir zurück auf die erste Maxwellgleichung. Statt des zylindrischen Volumens betrachten wir jetzt einen rechteckigen geschlossenen Weg (*Fig.* 2) über den Schnitt

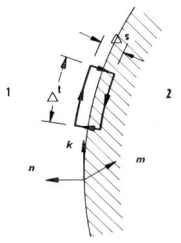

Fig. 2
Geschlossener Weg durch die Grenzfläche mit tangentialen Wegstükken Δt, die, Δs voneinander entfernt, ausserhalb der Grenzschicht verlaufen

durch die Grenzfläche hinweg. Wir integrieren die erste Maxwellgleichung über die durch den Weg S aufgespannte Fläche F unter Zuhilfenahme des *Stokes*schen Integralsatzes.

$$\oint_S \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_F \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right) \cdot d\boldsymbol{F} \tag{18}$$

Wählen wir die Strecke Δt kurz genug, so dass über ihre Länge die Felder konstant angenommen werden dürfen, und lassen wir die Strecken Δs verschwindend klein werden, so dass ihr Beitrag zum Integral auf der linken Seite von (18) vernachlässigt werden kann, wird aus (18)

$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \cdot \boldsymbol{k}\,\Delta t = \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right) \cdot \boldsymbol{m}\,\Delta t\,\Delta s$$

Wegen $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{H} \cdot [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{m} \cdot [\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}]$ erhalten wir

$$[(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}] = \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right) \Delta s$$

Mit kleiner werdendem Δs verschwindet die rechte Seite und es wird

$$[(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}] = 0 \tag{19}$$

Die Tangentialkomponenten des Magnetfeldes entlang der Begrenzungsfläche zweier Medien sind kontinuierlich. Eine Ausnahme dazu stellt der Fall dar, dass man zur Vereinfachung der Rechnung die Leitfähigkeit eines der beiden Medien mit $\sigma = \infty$ annimmt. Dann wird auch $\boldsymbol{j} = \infty$ und das Produkt $\lim_{\Delta s \to 0} \boldsymbol{j}\,\Delta s = \boldsymbol{I}$

ist eine endliche Oberflächen-Stromdichte (der Einheit A/m). Statt (19) wird dann die Randbedingung für das Magnetfeld gegeben durch

$$[(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{I} \tag{20}$$

Die Differenz der Tangentialkomponenten der Magnetfelder in beiden Medien ist durch die Oberflächen-Stromdichte gegeben.

In gleicher Weise lässt sich die Randbedingung für das elektrische Feld ableiten. Dazu integrieren wir die zweite Maxwellgleichung über die von S aufgespannte Fläche F

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_F \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{F} \tag{21}$$

Mit der gleichen Argumentation wie für das Magnetfeld gelangen wir von (21) zu

$$[(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n}] = 0 \tag{22}$$

Der Übergang der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes über die Begrenzungsfläche zweier verschiedener Medien erfolgt kontinuierlich.

3. Elektromagnetische Wellen auf einem ebenen Leiter

Wir wollen nun darangehen, die Wellenausbreitung bei einer geometrisch sehr einfachen Konfiguration zu studieren. Stellen wir uns den gesamten Raum entlang der y–z–Ebene eines karthesischen Koordinatensystems in zwei Halbräume geteilt vor (*Fig.* 3), die von zwei verschiedenen Medien ($\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1, K_1, Z_1$ und $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2, K_2, Z_2$) jeweils homogen erfüllt sein sollen. Als besondere Vereinfachung wollen wir

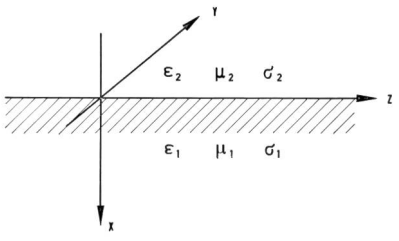

Fig. 3
Zwei Halbräume mit verschiedenen Materialparametern und ebener Grenzfläche entlang der y-z-Ebene

[3] Die Lösung dieses Problems stammt von *J. Zenneck* [5]. Zusammenfassende Darstellungen sind zu finden in [2] [3] [6].

die Richtung der Wellenausbreitung von vornherein entlang der z-Achse annehmen. Da wir entlang der x-Achse mit zwei verschiedenen Medien zu tun haben, muss – im Gegensatz zum Fall einer reinen ebenen Welle – auch für einfachste Feldkonfiguration $\partial/\partial x \neq 0$ sein, dagegen wollen wir $\partial/\partial y = 0$ setzen. Die Wellengleichung wird somit

$$\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial z^2} - K^2 \vec{\Pi} = 0 \tag{23}$$

Wenn wir als Fortpflanzungskonstante der Welle in z-Richtung $\gamma = \alpha + i\beta$ wählen, kann als Ansatz für die z-Abhängigkeit des Hertz-Vektors

$$\vec{\Pi}(x, z) = \vec{\Pi}(x)\, e^{-\gamma z}$$

angeschrieben werden, wo $\Pi(x)$ nur noch in unbekannter Weise von x abhängt. Die Wellengleichung vereinfacht sich auf

$$\frac{\partial^2 \vec{\Pi}(x)}{\partial x^2} + k^2 \vec{\Pi}(x) = 0 \tag{24}$$

wenn

$$\gamma^2 - K^2 = k^2 \tag{25}$$

abgekürzt wird.

Zur Lösung dieser Gleichung kann für den Halbraum 1 ($x > 0$) der Ansatz

$$\Pi_1 = A_1 e^{i k_1 x} e^{-\gamma z} \tag{26}$$

und für den Halbraum 2 ($x < 0$)

$$\Pi_2 = A_2 e^{-i k_2 x} e^{-\gamma z} \tag{27}$$

gemacht werden. Wir wollen k_1 und k_2 als komplexe Zahlen mit positivem Imaginärteil voraussetzen und müssen vermeiden, dass Π_1 oder Π_2 für grosse $|x|$ in ihren jeweiligen Halbräumen über alle Grenzen wächst; deshalb wurden in (26) und (27) von einem allgemeineren Ansatz nur der positive beziehungsweise negative Exponent in der x-Abhängigkeit berücksichtigt. Um die Rechnung zu vereinfachen, ohne dabei eine für das Weitere wesentliche Information zu verlieren, legen wir die Richtung des Hertz-Vektors in die z-Richtung, also $\vec{\Pi} = (0, 0, \Pi)$ was in (26) und (27) schon stillschweigend gemacht wurde.

Aus den Beziehungen zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke einerseits und dem Hertz-Vektor anderseits

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \left(\varepsilon \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \sigma \vec{\Pi} \right) \tag{28}$$

erhalten wir die Komponenten der Feldstärken im Halbraum 1 zu

$$E_{x1}(x, z) = -i k_1 \gamma A_1 e^{i k_1 x} e^{-\gamma z}$$

$$E_{z1}(x, z) = k_1^2 A_1 e^{i k_1 x} e^{-\gamma z}$$

$$H_{y1}(x, z) = -\frac{K_1^2}{\omega \mu_1} k_1 A_1 e^{i k_1 x} e^{-\gamma z} \tag{29}$$

und im Halbraum 2 zu

$$E_{x2}(x, z) = i k_2 \gamma A_2 e^{-i k_2 x} e^{-\gamma z}$$

$$E_{z2}(x, z) = k_2^2 A_2 e^{-i k_2 x} e^{-\gamma z}$$

$$H_{y2}(x, z) = \frac{K_2^2}{\omega \mu_2} k_2 A_2 e^{-i k_2 x} e^{-\gamma z} \tag{30}$$

In beiden Gebieten verschwinden H_x, H_z und E_y wegen der Voraussetzungen für den Lösungsansatz.

Wenn keines der beiden Medien als idealer Leiter angenommen wird, kann man für die Kontinuität der Tangentialkomponenten der Feldstärken bei $x = 0$

$$E_{z1}(0, z) = E_{z2}(0, z)$$

$$H_{y1}(0, z) = H_{y2}(0, z) \qquad \text{schreiben}$$

Aus (29) und (30) eingesetzt erhalten wir

$$k_1^2 A_1 = k_2^2 A_2 \tag{31}$$

$$-\frac{K_1^2}{\omega \tilde{\mu}_1} k_1 A_1 = \frac{K_2^2}{\omega \tilde{\mu}_2} k_2 A_2 \tag{32}$$

Substitution von (31) in (32), Verwendung von (25) und Einsetzen für K_1^2 und K_2^2 nach Formel (2), wobei wir komplexe Dielektrizitätskonstante und Permeabilität verwenden, ergibt für die Fortpflanzungskonstante der Welle in z-Richtung

$$\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\mu}_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{1 - \dfrac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\mu}_2 \tilde{\varepsilon}_1}}{1 - \dfrac{\tilde{\varepsilon}_2^2}{\tilde{\varepsilon}_1^2}} \tag{33}$$

In (33) dürfen die Indizes 1 und 2 vertauscht werden, ohne dass sich der Wert von γ^2 ändert. Die Schreibweise (33), bei der die Wellenzahl des Mediums 2 als Vorfaktor erscheint hat also keinerlei tiefere Bedeutung für die Fortpflanzungskonstante. Beide Medien sind gleichwertig.

Wir wollen nun die beiden Halbräume spezialisieren, indem wir Medium 1 als Leiter und Medium 2 als Dielektrikum betrachten, das heisst

$$\frac{\varepsilon_1 \omega}{\sigma_1} \ll 1$$

$$\frac{\varepsilon_2 \omega}{\sigma_2} \gg 1 \tag{34}$$

und die Permeabilität reell voraussetzen. Aus (33) wird dann

$$\gamma^2 \approx -\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \frac{1 - i \dfrac{\mu_1 \varepsilon_2 \omega}{\mu_2 \sigma_1}}{1 + \dfrac{\varepsilon_2^2 \omega^2}{\sigma_1^2}} \tag{35}$$

Erweitern wir den Bruch im Zähler mit ε_1 und den im Nenner mit ε_1^2, so sehen wir, dass wegen (34) der Nenner ungefähr 1 ist und die Wurzel aus dem Zähler durch die ersten zwei Glieder der Reihenentwicklung angenähert werden darf, so dass schliesslich

$$\gamma \approx i\omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}\left[1 - i\frac{\mu_1 \omega}{2\sigma_1}\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}\right] = \beta_2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + i\beta_2 \qquad (36)$$

Es sind dabei R_1 und R_2 die Realteile der Wellenimpedanzen für Leiter und Dielektrikum, wie sie in (12) und (11) eingeführt wurden. β_2 ist die Phasenkonstante einer ebenen Welle durch das Dielektrikum. Es wird also mit den Voraussetzungen (34) über die beiden Medien die Phasengeschwindigkeit einer Welle entlang der Grenzebene zwischen den beiden Medien nur von den Eigenschaften des Dielektrikums (ε_2, μ_2) abhängen

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \qquad (37)$$

Die Dämpfung der Welle jedoch hängt ausserdem noch vom Verhältnis der beiden Wellenwiderstände ab. Sie nimmt mit dem Quadrat der Frequenz zu, wenn ε, μ und σ beider Medien frequenzunabhängig angenommen werden dürfen.

4. Die Polarisation des elektrischen Feldes an der Grenzebene zwischen Leiter und Dielektrikum

Wir bilden das Verhältnis aus der z- und der x-Komponente der elektrischen Feldstärke (30) im Dielektrikum.

$$\frac{E_{z2}}{E_{x2}} = \frac{k_2}{i\gamma} \qquad (38)$$

Im Nenner setzen wir näherungsweise $\gamma \approx i\omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ ein, weil der Realteil von (36) mit den Voraussetzungen (34) viel kleiner ist. Der Zähler von (38) wird mit Hilfe von (25) und (36) mit guter Näherung beschrieben durch die Wurzel von

$$\gamma^2 - K_2^2 \approx i\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\omega \mu_1}{\sigma_1}\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \qquad (39)$$

Es wird somit

$$\frac{E_{z2}}{E_{x2}} \approx (1+i)\sqrt{\frac{\omega \mu_1}{2\sigma_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} = \frac{R_1}{R_2}\sqrt{2}\, e^{+i\frac{\pi}{4}} \qquad (40)$$

Das Verhältnis von z- und x-Komponente des elektrischen Feldes ist $\sqrt{2}$-mal dem Verhältnis der Realteile der Wellenwiderstände in den Halbräumen 1 und 2. Wegen (34) ist dieses Verhältnis sehr klein. Der Exponent $i\frac{\pi}{4}$ sagt uns, dass zwischen den beiden Komponenten eine zeitliche Phasenverschiebung von 45° besteht. Setzen wir willkürlich

$$E_{x2} = C\cos\omega t \qquad (41)$$

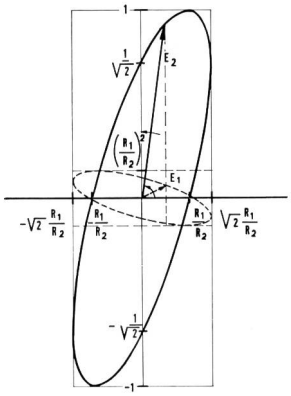

Fig. 4
Elliptische Polarisation des elektrischen Feldes an der Grenzebene. Die Spitze des Feldvektors im Quasidielektrikum läuft als Funktion der Zeit entlang der grossen Ellipse, derjenige des Quasileiters entlang der kleinen Ellipse

als Funktion der Zeit, so wird wegen (40)

$$E_{z2} = \sqrt{2}\frac{R_1}{R_2} C\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{R_1}{R_2} C\,(\cos\omega t - \sin\omega t) \qquad (42)$$

Die Formeln (41) und (42) sind zusammen die Parameterdarstellung einer Ellipse. Für das Verhältnis von x- und z-Komponente des Feldes im Leitermaterial erhält man ebenfalls eine solche Beziehung, jedoch um 90° gedreht und um den Faktor $\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}$ verkleinert. Der Zusammenhang wird klarer in einer graphischen Darstellung (*Fig.* 4), wo die Feldvektoren in beiden Medien für einen bestimmten Punkt der Grenzebene eingezeichnet sind. Die beiden Ellipsen stellen die Bahn dar, auf der die Spitze des Vektorpfeiles als Funktion der Zeit läuft. Man spricht daher von einer elliptischen Polarisation. Man beachte, dass die Tangentialkomponenten von E_1 und E_2 jederzeit gleich gross sind. *Figur* 5 zeigt eine stark vereinfachte Momentaufnahme des ganzen Feldbildes in den beiden Medien, wie es sich mit der Phasengeschwindigkeit entlang der Grenzebene in z-Richtung fortbewegt.

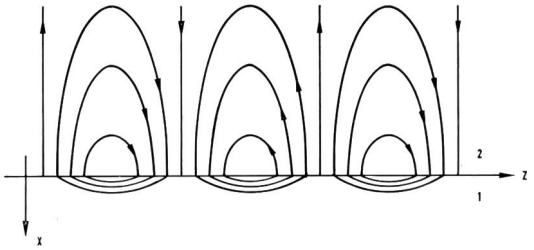

Fig. 5
Stark vereinfachte Momentaufnahme des elektrischen Feldes einer elektromagnetischen Welle entlang einer Grenzfläche zwischen Dielektrikum und Leiter

Unter den gemachten Voraussetzungen (34), Medium 1 sei ein Quasileiter und Medium 2 ein Quasidielektrikum, ist stets

$$\left|\frac{E_{x1}}{E_{x2}}\right| \ll 1$$

d. h. im Halbraum 2 steht das Feld nahezu senkrecht auf der Leiteroberfläche, während es im Leiter selbst (Halbraum 1) sehr flach und in einer sehr dünnen Haut unter der Leiteroberfläche konzentriert entlang der Grenzebene verläuft.

Die in diesem Abschnitt schematisch behandelten Verhältnisse findet man in der Praxis in komplizierterer Form bei der Ausbreitung von Funkwellen über die Erdoberfläche oder Wasser und auch bei allen Wellenleitern wieder.

5. Der Skin-Effekt

Die elektrische Feldstärke im Leiter, die – wie soeben gezeigt wurde – fast tangential zur Begrenzungsebene verläuft, verursacht im Leiter einen Strom in z-Richtung. Betrachten wir ein Stück der Breite b, aus dem leitenden Halbraum herausgeschnitten (*Fig.* 6). Die Stromdichte in z-Richtung ist durch $j_z = \sigma_1 E_{z1}$ gegeben. Der Gesamtstrom I durch den Leiterquerschnitt ist dann

$$I = \sigma_1 e^{-\gamma z} \int_0^b \int_0^\infty k_1^2 A_1 e^{+ i k_1 x} \, dx \, dy =$$

$$= + i k_1 \sigma_1 b A_1 e^{-\gamma z} \tag{43}$$

Erweitern wir diesen Ausdruck mit $\omega\mu_1$ und vergleichen dies mit dem Ausdruck für das Magnetfeld in (29) unter Verwendung von (9), so finden wir

$$I = - b H_{yo} \tag{44}$$

wo $H_{yo} = H_y$ an der Stelle $x = o$ ist.

Dies bedeutet, dass der gesamte Strom durch den Querschnitt gegeben ist durch das Produkt aus Leiterbreite mal tangentialem Magnetfeld an der Leiteroberfläche. (Wegen (19) sind die tangentialen Magnetfelder von Leiter und Dielektrikum gleich.) Es ist dies nichts anderes als ein Spezialfall des Durchflutungssatzes.

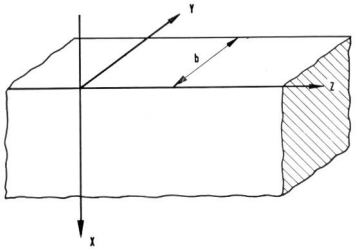

Fig. 6
Schicht aus dem Quasileiter mit der Breite b, jedoch ohne Begrenzung in *x*- und *z*-Richtung

Den Leistungsfluss können wir mit dem komplexen *Poynting*vektor berechnen, der in unserem Fall wird:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}(Ex \overset{*}{Hy} + Ez \overset{*}{Hy}) \tag{45}$$

wo der erste Summand die Leistungsdichte der Welle entlang der *z*-Richtung angibt und der zweite Summand jene, die in den Leiter eindringt und so als Verlustleistung der Welle verlorengeht.

Setzen wir für den ersten Summanden in (45) ein, so findet man nach einer kurzen Rechnung für den Dielektrikumshalbraum bei $x = 0$

$$E_{xo} \overset{*}{H}_{yo} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} H_{yo} \overset{*}{H}_{yo} \tag{46}$$

Für den zweiten Summanden des Poyntingvektors (45) kann man mit den Parametern des Leiters an der Stelle $x = 0$ berechnen

$$E_{zo} \overset{*}{H}_{yo} = \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\sigma_1}} (1 + i) H_{yo} \overset{*}{H}_{yo} \tag{47}$$

Der Realteil von (47) ist die Wirkleistung, die je Flächeneinheit in den Leiter eindringt und dort in *Joule*sche Wärme umgewandelt, das heisst der Welle entzogen wird. Man kann diesen Sachverhalt durch die differentielle Verlustleistung dP_v, die in jedem Wegelement umgesetzt wird, ausdrücken.

$$\frac{dP_v}{dz} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\sigma_1}} \left|H_{yo}\right|^2 \tag{48}$$

Der Wurzelausdruck in (48) ist nichts anderes als der Realteil der Wellenimpedanz des Leiters (siehe (12)). Ebenso ist die Wurzel in (46) der Realteil der Wellenimpedanz für das Dielektrikum.

Es wurde bereits gesagt, dass die elektrischen Feldlinien im Leiter innerhalb einer dünnen Haut (skin) knapp unter der Oberfläche verlaufen. Wir wollen nun eine quantitative Auskunft über die Tiefe, bis zu der ein nennenswertes Feld reicht, suchen. Aus (29) und wegen

$$k_1^2 = \gamma^2 - K_1^2 \approx -\omega^2\varepsilon_2\mu_2 - i\omega\mu_1\sigma_1 \approx -i\omega\mu_1\sigma_1$$

kann die *x*-Abhängigkeit der Feldstärke im Quasileiter geschrieben werden wie

$$E \mathrel{\hat{=}} \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\mu_1\sigma_1}{2}} (1 + i) x\right] \tag{49}$$

Die Tiefe, bei der das Feld auf den $1/e$ fachen Wert des Feldes auf der Oberfläche abgesunken ist, nennt man die Eindringtiefe *d*, und aus (49) folgt

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_1\sigma_1}} \tag{50}$$

Für die meisten in Betracht kommenden Leiter, aber auch für die Erd- und Wasseroberflächen darf die Permeabilität näherungsweise gleich der Vakuumpermeabilität gesetzt werden. Die Eindringtiefe hängt also nur von der Frequenz und der Leitfähigkeit des Mediums ab.

Die in (12) eingeführte Wellenimpedanz wird zu

$$Z_L = \frac{1}{d\sigma}(1+i) \tag{51}$$

Der Widerstand eines Leiterstreifens der Breite b und Länge l wird

$$R'_L = \frac{l}{bd\sigma} \tag{52}$$

vorausgesetzt, dass seine Dicke (nach Fig. 3 in x-Richtung) viel grösser als die Eindringtiefe d ist.

Für einen zylindrischen Draht, dessen Durchmesser $2r$ viel grösser als die Eindringtiefe ist, folgt aus (52) näherungsweise

$$R''_L = \frac{l}{2\pi rd\sigma} \tag{53}$$

Für das Frequenzgebiet, bei dem diese Voraussetzung nicht gilt, zeigt eine detaillierte Analyse, dass der Widerstand kontinuierlich vom Gleichstromwiderstand auf den in (53) angeschriebenen übergeht [3].

Tabelle I

Material	σ $\frac{1}{\Omega m}$	f Hz	$\beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ $\frac{1}{m}$	$R_1 = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma_1}}$ Ω	$R_1/R_2\sqrt{2}$ Elliptizität der Polarisation	$\alpha = \beta_2 (R_1/R_2)^2$ $\frac{1}{m}$	$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_1}}$ m
Kupfer	$5{,}7.10^7$	50	10^{-6}	$1{,}8.10^{-6}$	$0{,}7\ 10^{-8}$	$0{,}3\ 10^{-22}$	10^{-2}
		10^6	2.10^{-2}	$2{,}5.10^{-4}$	$1{,}0\ 10^{-6}$	$1{,}0\ 10^{-14}$	$0{,}7\ 10^{-4}$
		10^{10}	2.10^2	$2{,}5.10^{-2}$	$1{,}0.10^{-4}$	$1{,}0\ 10^{-6}$	$0{,}7\ 10^{-6}$
Erdboden feucht	10^{-3}	50	10^{-6}	0,45	$0{,}17\ 10^{-2}$	$1{,}5.10^{-12}$	$0{,}23\ 10^4$
		10^6	2.10^{-2}	62,5	0,24	$0{,}6\ 10^{-3}$	$0{,}16\ 10^2$
		10^{10}	2.10^2	$6{,}25\ 10^3$	24	6.10^4	0,16

In *Tabelle I* sind für Kupfer und feuchten Erdboden die wichtigsten Grössen der letzten Abschnitte 3, 4 und 5 für drei verschiedene Frequenzen zusammengestellt. Als Dielektrikum ist dabei Luft vorausgesetzt ($R_2 = 377\Omega$).

Für den Erdboden ist bei $f = 10^{10}$ die Bedingung $Q \ll 1$ nicht mehr erfüllt, daher sind die Werte in dieser Zeile schon sehr ungenau.

6. Die Sommerfeld-Leitung

Ein einzelner Draht stellt die geometrisch einfachste Struktur dar, entlang der eine Welle in einer vorgegebenen Richtung geführt werden kann. Ist dieser Draht ein Quasileiter in einer quasidielektrischen Umgebung, so spricht man von einer *Sommerfeld*leitung [7] [3]. Die Wellengleichung (mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten)

$$\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial \varphi^2} = K^2 \vec{\Pi} \tag{54}$$

hat für diese Geometrie beliebig viele Lösungen, wenn sich das Dielektrikum bis ins Unendliche erstreckt [8]. Wir wollen uns hier aber auf die einfachste Lösung, die schon 1899 von Sommerfeld angegeben wurde, beschränken, die eine radialsymmetrische Transversal-Magnetische (TM–) Welle beschreibt. Man kann sie sich anschaulich entstanden denken aus der Transversal-Elektromagnetischen (TEM-) Welle[4] einer Koaxialleitung, deren Aussenleiter einen unendlich grossen Radius angenommen hat (*Fig. 7*). Wegen der vorausgesetzten Symmetrie ist $\partial/\partial\varphi = 0$ und das dritte Glied in der Wellengleichung (54) verschwindet. Eine Lösung für die verbleibende Differentialgleichung [9] ist

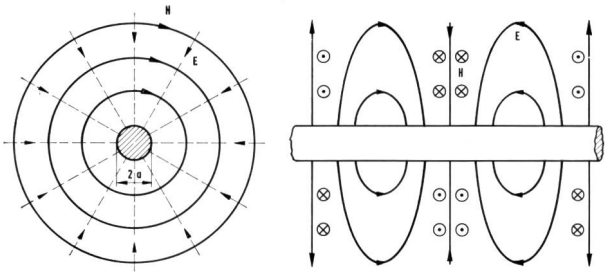

Fig. 7
Feldbild einer Sommerfeld-Welle (einfachste TM-Mode) entlang einem leitenden Draht vom Radius a

$$\Pi(r,z) = \frac{1}{k^2} Z_0(kr)\, e^{-\gamma z} \tag{55}$$

Es ist $Z_0(kr)$ eine allgemeine Zylinderfunktion (eine Linearkombination einer *Bessel*- und einer *Neumann*funktion), die noch durch Randbedingungen näher spezifiziert werden muss. Die Richtung des Hertz-Vektors wollen wir wieder mit der z-Richtung zusammenfallen lassen. Aus dem Hertz-Vektor können die Feldstärken nach (28) berechnet werden, wobei die Rotor-Operation nun in Zylinderkoordinaten auszuführen ist. Im Leiter wollen wir die transversale Phasenkonstante mit k_L bezeichnen, als äusseres Medium wollen wir Luft annehmen und k_0 schreiben. Wenn wir die Feldgrössen überall endlich halten wollen, müssen wir innerhalb des Leiters den Koeffizienten der Neumannfunktion Null machen, weil diese bei $r = 0$ unendlich wird. Die Feldkomponenten im Leitermaterial werden nun [10]

[4] Beim Transversal-Elektromagnetischen (TEM-) Wellentyp existieren weder eine elektrische noch magnetische Feldkomponente in der Fortpflanzungsrichtung. Beim Transversal-Magnetischen-Wellentyp gibt es eine elektrische, aber keine magnetische Feldkomponente in der Fortpflanzungsrichtung.

$$E_{rL} = \frac{\gamma}{k_L} J_1 (k_L r)\, e^{-\gamma z}$$

$$E_{zL} = J_0 (k_L r)\, e^{-\gamma z} \qquad (56)$$

$$H_{\varphi L} = -i \frac{K_L^2}{\omega \mu_L k_L} J_1 (k_L r)\, e^{-\gamma z}$$

Im Lauftraum, der den Leiter umgibt, wollen wir $Z_0 (k_0 r)$ ersetzen durch die Hankelfunktion erster Art $H_0^{(1)} (k_0 r) = J_0 (k_0 r) + i N_0 (k_0 r)$, die für unendliches komplexes Argument verschwindet, wenn sein Imaginärteil positiv ist [9]. Die Feldkomponenten werden dann

$$E_{r0} = \frac{\gamma}{k_0} A H_1 (k_0 r)\, e^{-\gamma z}$$

$$E_{z0} = A H_0 (k_0 r)\, e^{-\gamma z} \qquad (57)$$

$$H_{\varphi 0} = -\frac{i K_0^2}{\omega \mu_0 k_0} A H_1 (k_0 r)\, e^{-\gamma z}$$

Die Wellengleichung selbst definiert uns die transversalen Phasenkonstanten zu

$$k_0^2 = \gamma^2 - K_0^2 \qquad (58)$$

$$k_L^2 = \gamma^2 - K_L^2$$

wobei

$$K_0^2 = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \qquad (59)$$

$$K_L^2 = i \omega \mu_L \sigma_L$$

Aus (58) folgern wir, dass

$$k_L^2 - k_0^2 = K_0^2 - K_L^2 = K_0^2 \left(1 + i \frac{\sigma_L \mu_L}{\omega \varepsilon_0 \mu_0}\right) \approx i K_0^2 \frac{\sigma_L \mu_L}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \qquad (60)$$

Die Randbedingungen lauten: E_z und H_φ müssen bei $r = a$ kontinuierlich verlaufen. Um gleich die unbekannte Konstante A in (57) zu eliminieren, bilden wir die Quotienten aus den Komponenten E_z und H_φ beider Gebiete und setzen sie für $r = a$ gleich

$$\frac{\mu_0 k_0}{K_0^2} \frac{H_0 (k_0 a)}{H_1 (k_0 a)} = \frac{\mu_L k_L}{K_L^2} \frac{J_0 (k_L a)}{J_1 (k_L a)} \qquad (61)$$

Aus (60) und (61) kann k_0 und k_L bestimmt werden und daraus mit Hilfe von (58) γ. Beschränken wir uns auf Drähte, deren Durchmesser viel kleiner als die freie Wellenlänge ist, das heisst $k_0 a \ll 1$, aber viel grösser als die Eindringtiefe, das heisst $k_L a \gg 1$ [10], so können wir die Hankelfunktionen durch das erste Glied ihrer Nullpunktsentwicklungen [9]

$$H_0 (k_0 a) \approx \frac{2i}{\pi} ln (-i\, 0{,}89\, k_0 a) \qquad (62)$$

$$H_1 (k_0 a) \approx -\frac{2i}{\pi k_0 a}$$

und die Besselfunktionen durch ihre asymptotischen Darstellungen [9]

$$J_0 (k_L a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_L a}} \cdot \cos \left(k_L a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_1 (k_L a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_L a}} \cdot \cos \left(k_L a - \frac{3}{4}\pi\right) \qquad (63)$$

ersetzen. Diese Näherungen in (61) verwendet, ermöglicht die Herleitung [10] einer expliziten Formel für die Fortpflanzungskonstante

$$\gamma \approx i \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \left(1 + 0{,}63 \frac{|\xi| \cos \alpha}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 a^2} + \frac{i\, 0{,}63\, |\xi| \sin \alpha}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 a^2}\right) \qquad (64)$$

wobei $|\xi|\, e^{i\alpha} = (-i\, 0{,}89\, k_0 a)^2$ ist.

Das Beispiel eines Kupferdrahtes von 2 mm Durchmesser ergibt eine Dämpfung von etwa 2 dB je 100 m bei $f = 3000$ MHz und eine Phasengeschwindigkeit, die nur 0,004 % geringer ist als die der ungeführten Welle.

Die theoretische Lösung dieses Problemes ist nur möglich wegen der Annahme von endlicher Leitfähigkeit und endlichem Durchmesser des Drahtes, die das Aufstellen der notwendigen Randbedingungen erlauben. Eine genauere Betrachtung der Feldverteilung um den Draht zeigt, dass für dämpfungsarme Wellenfortpflanzung das Feld nach aussen nur langsam abklingt. Der grösste Teil der Energie wird also in einem Luftraum um den Draht von vielen Wellenlängen Durchmesser transportiert.

7. Die Harms-Goubau-Leitung

Bei dieser Leitungsform, die theoretisch zuerst von *Harms* behandelt und viel später von *Goubau* [10] auf ihre praktische Verwendbarkeit untersucht wurde, ist der metallische Leiter von einer Schicht Dielektrikum umgeben (*Fig. 8*). Der bei der Sommerfeld-Leitung angedeutete Nachteil der grossen Feldausdehnung wird dadurch erheblich reduziert. Für diese Struktur genügt es, das Randwertproblem an der Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum zu lösen. Die Leitfähigkeit des Metalldrahtes darf als unendlich angenommen werden, so dass keine Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an seiner Oberfläche existiert.

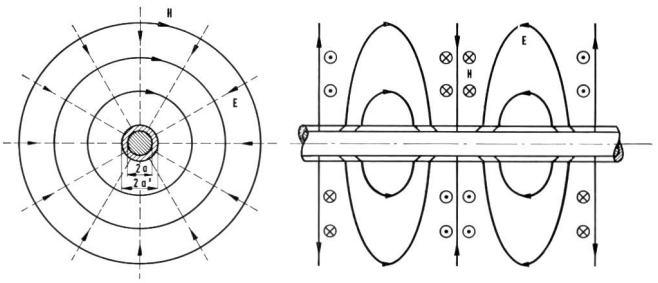

Fig. 8
Feldbild der einfachsten TM-mode auf einer Harms-Goubau-Leitung mit den Radien a des Metalldrahtes und a' des Dielektrikums

Als Ansatz für die Lösung der Wellengleichung im Luftraum kann wieder eine *Hankel*-Funktion verwendet werden. Für den dielektrischen Mantel ist im Ansatz ebenfalls eine Linearkombination von Bessel- und Neumannfunktionen nötig. Beschränken wir uns wieder wie bei der Sommerfeldleitung auf den einfachsten transversal-magnetischen Wellentyp, so kann die Zylinderfunktion für den dielektrischen Mantel durch

$$J_o(k_D r) + B N_o(k_D r) \text{ mit } K_D = i\omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_D}$$

dargestellt werden. Wegen $\sigma_L = \infty$ muss $E_z(k_o a) = 0$ sein, also $B = -J_o(k_D a)/N_o(k_D a)$. Die Randbedingung bei $r = a'$ nämlich $E_{zo}(k_o a') = E_{zD}(k_D a')$ und $H\varphi_o(k_o a') = H\varphi_D(k_D a')$, und die Gleichungen

$$k_D^2 = \gamma^2 - K_D^2 \text{ und } k_o^2 = \gamma^2 - K_o^2 \qquad (65)$$

liefern die Möglichkeit für die Berechnung von k_o und k_D und damit auch der Fortpflanzungskonstanten γ. Eine strenge Berechnung würde auf komplizierte transzendente Gleichungen führen, daher wollen wir die Verhältnisse spezialisieren für den Fall des dünnen Drahtes, für den ausser $k_o a' \ll 1$ auch noch $k_D a' \ll 1$ gilt, das heisst, der Drahtradius ist viel kleiner als die Wellenlänge im betreffenden Medium [10]. Die Zylinderfunktionen dürfen dann durch ihre Nullpunktdarstellungen ersetzt werden. Die Randwertaufgabe lösen wir wieder durch Vergleich der Quotienten $E_z(a')/H_\varphi(a')$ von beiden Räumen.

Mit den gemachten Voraussetzungen ergibt dies

$$\frac{k_o^2}{\varepsilon_o} ln\,(-i\,0{,}89\,k_o a') = -\frac{k^2{}_D}{\varepsilon_D} ln\,\frac{a'}{a} \qquad (66)$$

Für die weitere Auswertung von (66) dürfen wir wegen der speziellen Voraussetzungen $k_o^2 \ll K_o^2$ setzen und daher $k_D^2 = \gamma^2 - K_D^2 = K_o^2 + k_o^2 - K_D^2 \approx \omega^2 \varepsilon_o \mu_o (\varepsilon_{rD} - 1)$ schreiben wo ε_{rD} die relative Dielektrizitätskonstante des Mantels ist. Verwenden wir dies in (66), so wird daraus

$$ln\,\frac{a'}{a} = \frac{\varepsilon_{rD}}{\varepsilon_{rD}-1}\left(\frac{k_o \lambda}{2\pi}\right)^2 ln\,(-i\,0{,}89\,k_o a') \qquad (67)$$

Die Beziehung (67) stellt eine Dimensionierungsformel für die Leitung dar. Der gewünschte Wert für k_o folgt aus den Forderungen über die Dämpfung der Welle und die Feldausdehnung. Mit einem vorgegebenen Wert für ε_{rD} kann aus (67) numerisch a' und a berechnet werden. Die Verluste dieser Leitung setzen sich zusammen aus den Leitungsverlusten im Metalldraht und den dielektrischen Verlusten des Mantelmaterials. Der Vorteil der Harms-Goubauleitung gegenüber der Sommerfeldleitung liegt in viel geringerer Feldausdehnung bei vergleichbaren Dämpfungsverlusten[5].

[5] Ausführliche Arbeiten über die Harms-Goubauleitung, insbesondere das Problem der Feldausdehnung, wurden von *Kaden* [11] [12] publiziert, während von *Severin* [13] die Möglichkeit ihrer Verwendung bei Millimeterwellen studiert wurde.

8. Dielektrische Leitung

Eine letzte Variante der Einzeldrahtleitungen, die wir hier noch kurz besprechen wollen, ist der ausschliesslich aus dielektrischem Material bestehende Draht. Dass sich auch entlang dieser Leitung Wellen ausbreiten können, haben *Hondros* und *Debye* [14] theoretisch und *Zahn* [15] experimentell gezeigt. Das Wegfallen der Leitungsströme hat das Entstehen anderer Wellentypen zur Folge, aber auch hier sind wieder unendlich viel Modes möglich. Der auf dieser Leitung meist verwendete ist der $(EH)_{11}$-Wellentyp, oft auch Dipolmode genannt. Es haben dabei sowohl das elektrische wie das magnetische Feld Longitudinalkomponenten (*Fig. 9*). Die Lösung der Wellengleichung für diesen Wellentyp führt auf die Ausdrücke für die Feldstärken, von denen wir nur die z-Komponenten aufschreiben wollen [16]. Sie lauten für das Drahtinnere

$$E_{zD} = A J_1(k_D r)\cos\varphi\, e^{-\gamma z}$$
$$H_{zD} = B J_1(k_D r)\sin\varphi\, e^{-\gamma z}$$

und für den Aussenraum

$$E_{zo} = C H_1^{(1)}(k_o r)\cos\varphi\, e^{-\gamma z} \qquad (68)$$
$$H_{zo} = D H_1^{(1)}(k_o r)\sin\varphi\, e^{-\gamma z}$$

wobei k_D und k_o wieder durch (65) definiert sind. Die Fortpflanzungskonstante können wir aus (65) anschreiben wie

$$\gamma = i\omega\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}\sqrt{1 + \frac{k_o^2}{\omega^2 \varepsilon_o \mu_o}} \qquad (69)$$

Aus den Randbedingungen muss noch k_o bestimmt werden[6].

9. Anhang: Leitungsgleichungen und Impedanzdiagramme

Die Leitungsgleichungen sind Beziehungen zwischen den Spannungen V und Strömen I an zwei verschiedenen Stellen entlang der Leitung. In den meisten Lehrbüchern (zum Beispiel [19]) werden sie aus den Strom- Spannungs-Beziehungen infinitesimal kurzer Leitungsabschnitte über die sogenannte Telegraphengleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = L C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (R C + L G)\frac{\partial V}{\partial t} + R G V \qquad (70)$$

hergeleitet und lauten dann

$$V_1 = V_2\, ch\,\gamma l + Z_o I_2\, sh\,\gamma l \qquad (71)$$
$$I_1 = \frac{V_2}{Z_o} sh\,\gamma l + I_2\, ch\,\gamma l$$

[6] Eine übersichtliche Darstellung der Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der dielektrischen Leitungen ist von *Severin und Schulten* [17] gegeben worden, wo auch noch weitere Literaturangaben zu finden sind. Zum Thema Oberflächenwellen allgemeinerer Art sei noch auf das Buch von *Barlow und Brown* [18] verwiesen.

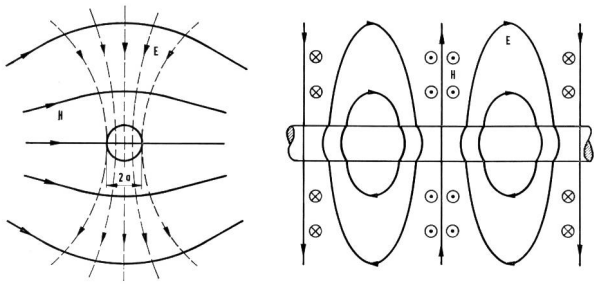

Fig. 9
Das $(EH)_{11}$ Wellenbild einer dielektrischen Leitung

Es ist dabei wieder γ die komplexe Fortpflanzungskonstante , V_1 und I_1 Spannung und Strom am Beginn des betrachteten Leitungsstückes mit der endlichen Länge l, V_2 und I_1 an seinem Ende und

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega c}}$$

die komplexe charakteristische Impedanz der Leitung bei der Kreisfrequenz ω. R, G, L und C sind Längswiderstand und -induktivität, Querleitwert und -kapazität. Befindet sich am Ende der Leitung eine Abschlussimpedanz Z_2, so muss natürlich $V_2/I_2 = Z_2$ sein, und die Eingangsimpedanz V_1/I_1 lässt sich durch Dividieren der beiden Zeilen (71) errechnen.

Die in den drei vorhergehenden Abschnitten diskutierten Einzeldraht-Wellenleiter sind überzeugende Beispiele dafür, dass die Grössen Spannung und Strom für die Charakterisierung einer Leitung nicht immer geeignet sind.

Die weitgehende Analogie zwischen der Wellengleichung für die elektrische Feldstärke

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} \tag{72}$$

und der Telegraphengleichung (70) (nur das dem Gleichspannungsterm entsprechende Glied fehlt in (72)) und die Tatsache, dass das Verhältnis E/H ebenso wie V/I eine Impedanz ist, erlaubt es uns, die Leitungsgleichungen (71) auch für Felder zu benützen. Es tritt dann E an die Stelle von V und H an die von I.

Der Leistungsfluss je Querschnittseinheit auf der Leitung wird durch den Poyntingvektor

$$\boldsymbol{S}_+ = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_{t+} \times \boldsymbol{H}^*_{t+}\right]$$

gegeben, wobei $\boldsymbol{E}_{t+}$ und $\boldsymbol{H}_{t+}$ die Transversalkomponenten der Felder sind und der Index + auf die vorwärtslaufende Welle deutet. Das gleiche gilt für eine reflektierte Welle, wofür dann der Index — wäre und das Vorzeichen von $\boldsymbol{S}$ umkehrt. Der Quotient aus denselben Feldkomponenten definiert uns bekanntlich die Wellenimpedanz $Z_o = E_{t+}/H_{t+}$.

Für die meisten praktischen Fälle darf man die Leitung als verlustfrei behandeln, so dass $\gamma = i\beta = i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ wird.

Nehmen wir eine komplexe Abschlussimpedanz Z_2 am Ende der Leitung an, so wird die Eingangsimpedanz

$$Z_1 = Z_o \frac{\dfrac{Z_2}{Z_o} + i\tan\beta l}{1 + i\dfrac{Z_2}{Z_o}\tan\beta l} \tag{73}$$

Häufig ist eine direkte Messung der Impedanz für sehr kurze Wellen nicht mehr möglich, aber meist braucht man auch gar nicht den absoluten Wert der Impedanz. Es genügt dann die relative Impedanz Z_1/Z_o oder der Reflexionskoeffizient, um eine Abschlussimpedanz oder eine Diskontinuität in der Leitung zu charakterisieren. Dazu formen wir (73) unter Verwendung der Eulerschen Formel für Winkelfunktionen um

$$Z_1 = Z_o \frac{(Z_2 + Z_o)\, e^{i\beta l} + (Z_2 - Z_o)\, e^{-i\beta l}}{(Z_2 + Z_o)\, e^{i\beta l} - (Z_2 - Z_o)\, e^{-i\beta l}} = Z_o \frac{1 + |r|\, e^{i(\Theta - 2\beta l)}}{1 - |r|\, e^{i(\Theta - 2\beta l)}} \tag{74}$$

Es ist dabei der komplexe Reflexionskoflexions-Koeffizient

$$r = |r|\, e^{i\Theta} = \frac{Z_2 - Z_o}{Z_2 + Z_o} \tag{75}$$

eingeführt worden.

Figur 10 zeigt ein graphische Darstellung der normierten Gleichung (73), wobei die Werte für Z_1/Z_o auf den Koordinatenachsen abzulesen sind, während für die Abschlussimpedanz

$$\frac{Z_2}{Z_o} = \left|\frac{Z_2}{Z_o}\right| e^{i\varphi}$$

die Werte für $|Z_2/Z_o|$ und $\varphi + \beta l$ auf den beiden orthogonalen Kreisscharen liegen. Für $l = 0$ liefert das Diagramm lediglich die Transformation

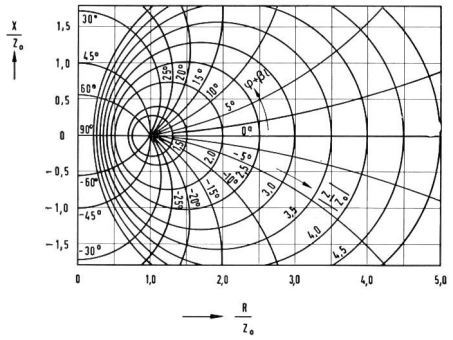

Fig. 10
Karthesisches Impedanzdiagramm

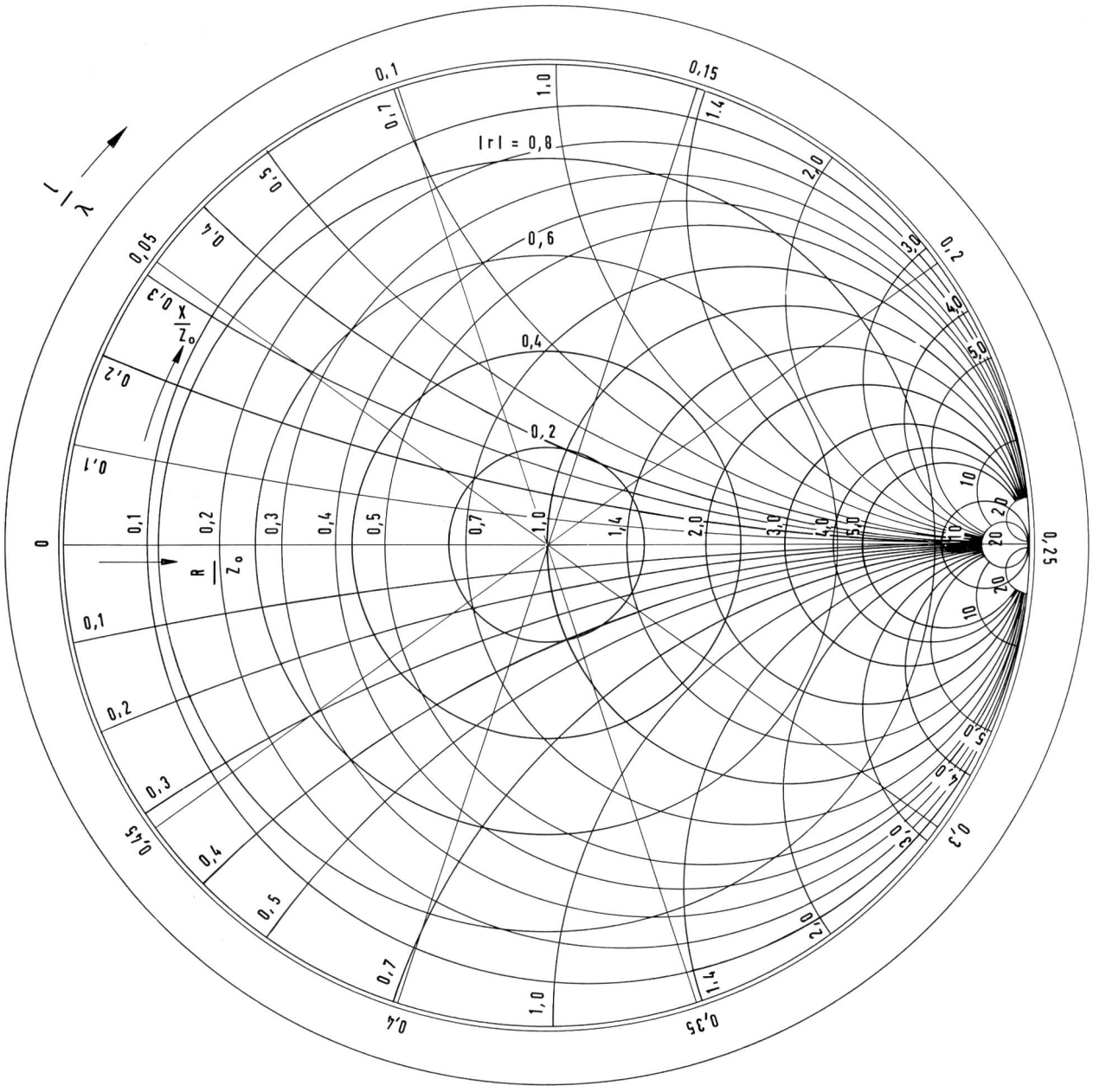

Fig. 11
Smith-Diagramm für die graphische Darstellung von Impedanzen auf Wellenleitern

$$\left|\frac{Z_2}{Z_0}\right| e^{i\varphi} \longrightarrow \frac{R_2}{Z_0} + i\frac{X_2}{Z_0} = \frac{Z_1}{Z_0}$$

Für verschiedene Abstände l zwischen Abschlussimpedanz und Leitungseingang wandert der Punkt Z_1/Z_0 mit βl entlang einem Kreisbogen für konstante $|Z_1/Z_0|$. Für veränderliche $|Z_2/Z_0|$ am gleichen Abstand l wandert Z_1/Z_0 auf einem Kreis für konstante $\beta l + \varphi$. Ein konstanter Wert für $|Z/Z_0|$ ist nach (75) gleichbedeutend mit einem konstanten Betrag des Reflexionsfaktors. Die Kreise für konstante $|Z_2/Z_0|$ schneiden die reelle Achse zweimal. Der höhere Wert R/Z_0 entspricht einem Quasi-Leerlauf, der kleinere einem Quasi-Kurzschluss. Das geometrische Mittel der beiden ist 1.

Die Formel (73) hat dieselbe Form wie das Additionstheorem der hyperbolischen Tangensfunktion, wenn wir $Z_2/Z_0 = \tanh C$, einer komplexen Zahl C, auffassen. Das er-

klärt, dass die graphische Darstellung der tanh-Funktion gleich der von Figur 10 ist. Man kann diesen Zusammenhang auch ausnützen, um die Eingangsimpedanz einer Leitung mit mehreren verschiedenen (auch verlustbehafteten) Abschnitten übersichtlich als Funktion der Parameter der Einzelabschnitte anzuschreiben [20].

Die graphische Darstellung der Impedanz nach Figur 10 hat den Nachteil, dass es nicht möglich ist, vom selben Diagramm sehr kleine und sehr grosse Werte der Impedanz mit vernünftiger Genauigkeit abzulesen. Um diesem Nachteil auszuweichen, verwendet man eine Darstellung (das sogenannte *Smith*-Diagramm, siehe zum Beispiel [19], S.83...96, und [21], S. 228...234), bei dem $|Z/Z_o|$ und $|Z_o/Z|$ mit gleicher relativer Genauigkeit angegeben werden. Fassen wir

$$z = \frac{R + iX}{Z_o}$$

als komplexe Zahl in der Gaussschen Ebene (für $R \geq o$) auf, so lässt sich durch eine bilineare Transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{76}$$

die z-Ebene auf eine w-Ebene abbilden, und zwar so, dass auch $|z| = \infty$ auf einen endlichen Abstand rückt[7]. Wir wollen die Punkte $z' = o$, $z'' = \infty$, $z''' = 1$ auf die Punkte $w' = -1$, $w'' = +1$, $w''' = O$ transformieren. Aus dieser Forderung lassen sich leicht die Koeffizienten a, b, c, d, von (76) bestimmen. Die Transformation lautet schliesslich

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{77}$$

und bildet die Halbebene für $R \geq$ oder Figur 10 auf das Innere eines Kreises mit dem Radius $|w| = 1$ ab (*Fig.* 11). Konstante Werte von $|Z/Z_o|$ beziehungsweise konstante $|r|$ liegen auf konzentrischen Kreisen, während konstante Phasenwinkel auf Geraden durch den Ursprung liegen. Die Geraden R_1/Z_o und X_1/Z_o von Figur 10 sind nun Kreisscharen geworden, und die Gesamtheit aller Punkte $|Z/Z_o| = \infty$ ist auf einen Punkt zusammengerückt.

Adresse des Autors: E. Schanda, c/o Institut für angewandte Physik der Universität Bern, Sidlerstr. 5, CH–3000 Bern.

[7] Die Eigenschaften bilinearer Transformationen sind: Die Abbildung ist umkehrbar eindeutig, Winkel beim Schnittpunkt zweier Kurven bleiben erhalten, Kreise (einschliesslich Geraden) werden wieder auf Kreise abgebildet.

Literatur

[1] *A. R. von Hippel.* Dielectrics and Waves. M.I.T. – Press 1954

[2] *H. W. König.* Vorlesung über Hochfrequenztechnik. Eigenverlag Techn. Hochschule Wien, 1957.

[3] *A. Sommerfeld.* Vorlesungen über theoretische Physik (Band III. Elektrodynamik). Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948.

[4] *E. Schanda.* Die Elektrizitätslehre und die Maxwell'sche Theorie. Techn. Mitt. PTT, 45 (1967) Nr. 9 S. 512...521.

[5] *J. Zenneck.* Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehungen zur drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Phys. 23 (1907), S. 846...866.

[6] *J. A. Stratton.* Electromagnetic Theory. Mc Graw Hill, New York, 1941

[7] *A. Sommerfeld.* Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes. Ann. der Phys. 67 (1899), S. 233...290

[8] *D. Hondros.* Über elektromagnetische Drahtwellen. Ann. d. Phys. 30 (1909), S. 905...950

[9] *E. Jahnke, F. Emde.* Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Dover Publications, New York, 1945.

[10] *G. Goubau.* SurfaceWaves and their Application to Transmission Lines. J. Appl. Phys. 21 (1950), S. 1119...1128.

[11] *H. Kaden.* Fortschritte in der Theorie der Drahtwellen. A.E.Ü. 5 (1951), S. 399...414.

[12] *H. Kaden.* Dielektrische und metallische Wellenleiter. A.E.Ü., 6 (1952), S. 319...332.

[13] *H. Severin.* Sommerfeld- und Harms-Goubau-Wellenleiter im Bereich der Zentimeter und Millimeterwellen. A.E.Ü. 14 (1960), S. 155...162.

[14] *D. Hondros, P. Debye.* Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten. Ann. d. Phys. 32 (1910), S. 465...476.

[15] *H. Zahn.* Über den Nachweis elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Drähten. Ann. d. Phys. 49, (1916), S. 907

[16] S.P. Schelkunoff, Electromagnetic Waves, van Nostrand, New York, 1944.

[17] *H. Severin, G. Schulten.* Leitungen für Oberflächenwellen im Höchstfrequenzgebiet. Philips Techn. Rdsch. 26 (1965), S. 24...40.

[18] *H. M. Barlow, J. Brown.* Radio Surface Waves. Oxford University Press, 1962.

[19] *P. C. Magnusson.* Transmission Lines and Wave Propagation. Allyn and Bacon, Boston, 1965.

[20] *E. Schanda, L.v.d. Kint, J. T. Murnaghan.* Method for Measurement of Plane Resistors at Microwave Frequencies, Proc. IEE, 112 (1965), S. 49...54.

[21] *E. L. Ginzton.* Microwave Measurements. Mc Graw Hill, New York 1957.