Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 45 (1967)

Heft: 9

Artikel: Die Elektrizitätslehre und die Maxwellsche Theorie

Autor: Schanda, Erwin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874900

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Elektrizitätslehre und die Maxwellsche Theorie [1]

Erwin SCHANDA, Bern

538.3

Zusammenfassung. *Als Ausgangspunkt werden fünf elementare Gesetze der Elektrizitätslehre postuliert: die Fernkraftgesetze von Priestley, Coulomb und Biot-Savart, ferner das Ohmsche Gesetz und das Faradaysche Induktionsgesetz. Damit werden die Lorentzsche Kraft-Formel, das Ampèresche Gesetz und mit Hilfe der Sätze der Vektoranalysis für dynamische Felder das gesamte System der Maxwellschen Gleichungen abgeleitet. Es folgt der Energiesatz der Maxwell-Theorie und der Poynting-Vektor. Zuletzt wird die Wellengleichung hergeleitet, über skalares und vektorielles Potential das Hertzsche Vektorfeld eingeführt und für den Fall einer ebenen Welle angewendet.*

L'électricité et la théorie de Maxwell

Résumé. *L'auteur du présent article prend pour point de départ cinq lois élémentaires de l'électricité: les lois de force de Priestley, Coulomb et Biot-Savart, la loi d'Ohm et la loi de l'induction de Faraday. Il en déduit la formule des forces de Lorentz, la loi d'Ampère et, à l'aide des théorèmes de l'analyse vectorielle pour les champs magnétiques, l'ensemble du système des équations de Maxwell. Suit le théorème de l'énergie de la théorie de Maxwell et le vecteur de Poynting. Il en tire enfin l'équation des ondes, puis, par le potentiel scalaire et vectoriel, introduit le champ vectoriel de Hertz et l'applique au cas d'une onde plane.*

L'elettricità e la teoria di Maxwell

Riassunto. *Quale punto di partenza vengono formulate 5 leggi elementari dell'elettricità: le leggi sulla forza di Priestley, Coulomb et Biot-Savart, la legge di Ohm e la legge di Faraday sull'induzione. Da queste vengono dedotte la formula di Lorentz sulla forza, la legge d'Ampère e, con l'aiuto di teoremi dell'analisi vettoriale dei campi dinamici, l'intero sistema delle equazioni di Maxwell. Segue il teorema dell'energia della teoria di Maxwell e il vettore di Poynting. Per concludere l'autore sviluppa l'equazione delle onde, poi, tramite il potenziale scalare e vettoriale, introduce il campo vettoriale di Hertz e lo applica al caso di un'onda piana.*

1. Die axiomatischen Grundlagen der Elektrizitätslehre

Als Ausgangspunkte für die Herleitung der *Maxwell*schen Theorie der Elektrodynamik wollen wir einige empirische Zusammenhänge der Elektrizitätslehre benützen, die schon vor Maxwell bekannt waren. Wir brauchen uns für die weiteren Entwicklungen jedoch nicht genau an den historischen Ablauf zu halten, sondern werden versuchen, in möglichst einfachen logischen Schritten unser Nahziel – die Maxwellschen Gleichungen – zu erreichen.

Als erstes wollen wir uns drei verschiedenen Fernkraft-Gesetzen zuwenden. Sie werden so genannt, weil man sich dabei die Ausdehnung der Träger von elektrischen oder magnetischen Mengen vernachlässigbar klein im Verhältnis zu den Abständen untereinander vorzustellen hat.

Befinden sich zwei elektrische Ladungen Q_1 und Q_2 auf einem Abstand r voneinander, so besagt das *Priestley*sche Gesetz, dass die Kraft F der beiden Ladungen aufeinander dem Produkt der Ladungsmengen und dem Reziprokwerk des Abstandquadrates proportional ist,

$$F = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{1}$$

Es ist dabei k_1 eine noch zu bestimmende Proportionalitätskonstante, deren Wert vom gewählten Masssystem abhängt.

Eine gleichartige Gesetzmässigkeit hat man für magnetische Polstärken P_1 und P_2 und deren Kraft aufeinander gefunden. Das *Coulomb*sche Gesetz lautet

$$F = k_2 \frac{P_1 P_2}{r^2} \tag{2}$$

Häufig werden beide Gesetze Coulomb zugeschrieben und (1) das Coulombsche Gesetz für elektrische Ladungen und (2) jenes für magnische Pole genannt.

Beachtet man nun noch, in welcher Richtung die Kraft wirkt, so sehen wir, dass gleichnamige elektrische Ladungen einander abstossen und entgegengesetzte Ladungen einander anziehen. Wir können uns die Kraftrichtung *(Fig. 1)* durch einen Einheitsvektor **e** repräsentiert denken, den wir so einzeichnen, wie die Kraft auf zwei gleichnamige Ladungen wirkt.

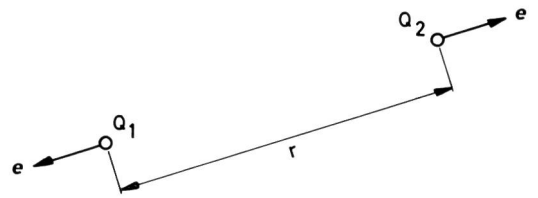

Fig. 1
Zwei punktförmige Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r voneinander. Der Einheitsvektor **e** in der Verlängerung der Verbindungslinie ist zu beiden Ladungen so eingezeichnet, wie die Kraft angreift, wenn Q_1 und Q_2 Ladungen gleicher Polarität sind

Denken wir uns bei gleichbleibendem Abstand die Lage von Q_2 gegenüber Q_1 verändert, so ändert die Kraft lediglich ihre Richtung, aber nicht ihren Betrag; dies bedeutet, dass die Kraft, die Q_2 durch Q_1 erfährt, auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r um Q_1 überall gleich gross ist. Diesem Umstand können wir vernünftigerweise dadurch Rechnung tragen, dass wir die rechte Seite von (1) durch die Oberfläche der Einheitskugel 4π dividieren [1]. In vektorieller Form wird das Priestleysche Gesetz nun

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi r^2} \cdot \boldsymbol{e} \tag{3}$$

[1] Nach einem Vortrag, gehalten anlässlich des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Institutionen für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern

[1] Ein Masssystem, bei dem in den Fernkraft-Gesetzen 4π im Nenner steht, ist ein rationales. Wir werden hier immer die rationale Schreibweise verwenden.

wobei k_1 aus (1) ersetzt ist durch $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$. Auf die Bestimmung der neuen Konstanten ε werden wir später noch zu sprechen kommen. Die Kraft $\boldsymbol{F}$ wirkt in der Richtung von $\boldsymbol{e}$, solange die Vorzeichen beider Ladungen gleich sind und in entgegengesetzter Richtung, wenn sie verschieden sind.

Die Analogie elektrische Ladung – magnetische Polstärke ist zwar physikalisch nicht ganz gerechtfertigt, weil es keine isolierten magnetischen Pole gibt, aber zumindest formell ist diese Analogie sehr praktisch. Wenden wir also die gleichen Überlegungen, die wir für das Priestleysche Gesetz verwendet haben, auf das Coulombsche Gesetz für magnetische Pole an, so können wir (2) in Vektorform schreiben

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{P_1 P_2}{4\pi r^2} \cdot \boldsymbol{e} \tag{4}$$

Hier ist k_2 aus (2) durch $\frac{1}{4\pi\mu}$ ersetzt worden. Für die Richtung der Kraft gilt dasselbe, was bereits beim Priestleyschen Gesetz gesagt wurde.

Kennt man nur eine der beiden Ladungen, zum Beispiel Q_2, und weiss nicht, durch welche andere Ladung auf welchem Abstand die Kraft $\boldsymbol{F}$ auf Q_2 hervorgerufen wird, so können wir uns die Wirkung der Ladung Q_1 am Ort der Ladung Q_2 durch eine neue Grösse $\boldsymbol{E}_1$ dargestellt denken, so dass wir statt (3) schreiben können

$$\boldsymbol{F} = Q_2 \boldsymbol{E}_1 \tag{5}$$

Die Feldstärke $\boldsymbol{E}_1$ ist das «Fluidum» der *Faraday*schen Feldvorstellung, das von einer Ladung ausgeht und an einer entfernten Stelle auf eine andere Ladung eine Kraft auszuüben imstande ist. Der Vektor $\boldsymbol{E}_1$ hat dabei die Richtung des Einheitsvektors von Figur 1, wobei allerdings auf das Vorzeichen von Q_1 zu achten ist. Nach dieser Betrachtung dürfen wir als Definition der elektrischen Feldstärke im Abstand r von der Ladung Q_1 anschreiben

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \boldsymbol{e} \tag{6}$$

Mit der elektrischen Verschiebung (oder Erregung)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{7}$$

kann die Wirkung einer Ladung Q_1 in der Entfernung r beschrieben werden, wobei die noch unbekannte Dielektrizitätskonstante ε des Zwischenmediums eliminiert ist. Die Dielektrizitätskonstante ist das für ein Medium charakteristische Verhältnis von elektrischer Verschiebung und Feldstärke.

Wir können nun die formelle Analogie zwischen Elektrostatik und Magnetostatik fortsetzen, indem wir die eben angestellten Überlegungen auf die Formel für die Kraft zwischen magnetischen Polen anwenden. Die Vorstellung einer magnetischen Feldstärke, die, durch einen Pol am Ort eines anderen Poles verursacht, eine gegenseitige Kraftwirkung ergibt, führt uns von (4) zu

$$\boldsymbol{F} = P_2 \boldsymbol{H}_1 \tag{8}$$

Damit können wir als Definitionsgleichung für die magnetische Feldstärke, die im Abstand r von einem Pol der Stärke P_1 anwesend ist, anschreiben

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{P_1}{4\pi\mu r^2} \cdot \boldsymbol{e} \tag{9}$$

Die magnetische Induktion stellt eine Beschreibung der Feldwirkung aus der Polstärke durch Eliminierung der Unbekannten μ dar.

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{10}$$

Die Permeabilität μ ist das für ein Medium charakteristische Verhältnis von magnetischer Induktion und Feldstärke.

Nach Einführen des Priestleyschen und des Coulombschen Gesetzes und der Begriffe der elektrischen und magnetischen Felder wollen wir uns dem dritten Fernkraftgesetz, jenem von *Biot* und *Savart* zuwenden. Es wird häufig auch *Laplace*sches Gesetz genannt und vermittelt uns die Wirkung eines Magnetfeldes auf bewegte elektrische Ladungen. Wir definieren als elektrischen Strom I die Ladungsmenge Q, die während einer Zeitdauer t durch einen Leitungsquerschnitt fliesst ($I = Q/t$) und nehmen an, dass dieser Strom für die Dauer unseres Experiments einen konstanten Wert behält. Man beobachtet nun, dass ein magnetischer Pol P in einem Abstand r von dem einfachheitshalber geradlinig angenommenen Leiter auf diesen Leiter eine Kraft ausübt. Eine gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Kraft wirkt natürlich auch auf den magnetischen

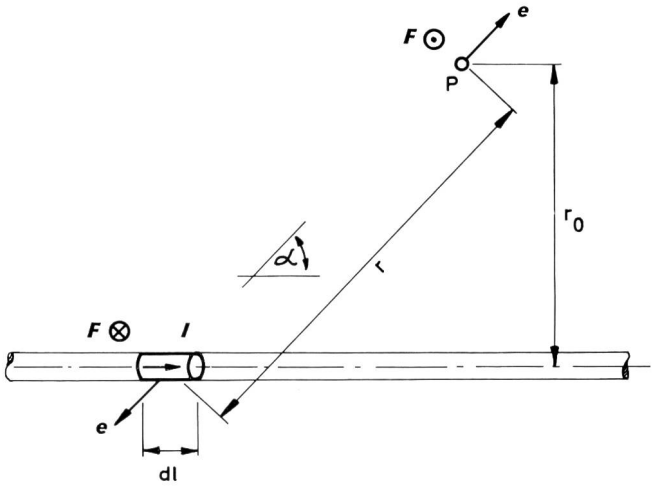

Fig. 2
Ein Element eines stromführenden Leiters mit der Länge *dl* im Abstand *r* zu einem magnetischen Pol *P*. Der Winkel zwischen Achse des Leitungselements und der Verbindungslinie zum Magnetpol ist α. Für die angegebene Stromrichtung und positive Polstärke ist die Kraft auf das Stromelement in die Zeichenebene hinein, jenes auf den Magnetpol aus der Zeichenebene heraus gerichtet

Pol. Betrachten wir nur die Kraft auf ein Leitungselement der infinitesimalen Länge *dl* (*Fig. 2*), so beobachtet man, dass

die Richtung der Kraft nicht parallel zur Verbindungslinie zwischen Leitungselement und Magnetpol liegt, sondern senkrecht zur Ebene, die von dieser Verbindungslinie und der Leiterachse aufgespannt wird.

Der Betrag der Kraft hängt von den Beträgen der Pol- und Stromstärke, von der Länge des Stromelements dl und seinem Abstand zum Magnetpol und vom Winkel zwischen Stromrichtung und Verbindungslinie ab.

$$dF = k_3 \cdot \frac{P \cdot I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2} \tag{11}$$

In vektorieller Schreibweise können wir die Richtung des Stromelements durch $\boldsymbol{I}\,dl$ oder $I\,\boldsymbol{dl}$ andeuten und die Richtung der Verbindungslinie zwischen Stromelement und Magnetpol durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$. In rationaler Form wird somit das Biot-Savartsche Gesetz

$$\boldsymbol{dF} = \frac{I \cdot P \cdot [\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{e}]}{4\pi r^2} \tag{12}$$

Mit Hilfe der Formeln (9) und (10) können wir die Polstärke P in (12) ersetzen durch die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$, die am Ort des Stromelements herrscht. Wir erhalten dann

$$\boldsymbol{dF} = I \cdot [\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B}] \tag{13}$$

Denken wir noch an die Definition des Stromes als bewegte elektrische Ladung und setzen

$$I\,\boldsymbol{dl} = dQ \cdot \boldsymbol{v} \tag{14}$$

in (13) ein, wobei mit $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit, mit der die Ladung bewegt, gemeint sei, so wird die Kraft auf diese infinitesimale Ladungsmenge dQ

$$\boldsymbol{dF} = dQ\,[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \tag{15}$$

Die vorstehende Voraussetzung, der Strom müsse konstant sein, ist nun nicht mehr nötig. Mit (15) kann auch die Kraft angegeben werden, die eine einzelne Ladung erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch einen Raum mit der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$ bewegt. Formel (15) gilt für jeden Augenblick, das heisst, wenn sich $\boldsymbol{v}$ oder $\boldsymbol{B}$ oder der Winkel zwischen beiden ändert, ändert sich sofort auch die Kraft.

Man kann aus (12) noch eine neue Definition des magnetischen Feldes ableiten, nämlich jenes, das von einem Strom herrührt. Die Kraft $\boldsymbol{dF}$ nach (12) wirkt nicht nur auf das Stromelement, sondern, wie bereits gesagt, auch auf den Magnetpol (siehe Fig. 2). Wir können uns also fragen, ob wir nicht auch die rechte Seite von (12) als ein Produkt von Polstärke und magnetischer Feldstärke auffassen dürfen wie in (8). Tun wir dies, so erhalten wir für die infinitesimale magnetische Feldstärke, die ein Stromelement $I\,dl$ in einem Abstand r verursacht,

$$\boldsymbol{dH} = \frac{I\,[\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{e}]}{4\pi r^2} \tag{16}$$

Wir haben mit (16) eine erste Formel gefunden, die den elektrischen Strom mit dem Magnetfeld verknüpft.

Als ein weiteres experimentell gefundenes Gesetz werden wir für die späteren Ableitungen das *Ohm*sche Gesetz benötigen, das uns den Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Stromdichte vermittelt. In der gewohnten Form gibt es über den Widerstand R beziehungsweise über Leitfähigkeit σ, Länge l und Querschnitt q eines Leitermaterials den Zusammenhang zwischen Spannung U und Strom I an.

$$I = \frac{U}{R} = \sigma \cdot \frac{q}{l} \cdot U \tag{17}$$

Da die elektrische Spannung definiert ist als die über eine bestimmte Weglänge integrierte Feldstärke

$$U = \int_0^l (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl}) \tag{18}$$

dürfen wir schreiben $U = (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{l})$, wenn die Feldstärke über die ganze Länge l konstant ist. Führen wir noch Stromdichte $j = \frac{I}{q}$ als Strom je Querschnittseinheit ein, so können wir das Ohmsche Gesetz in der Form schreiben, wie wir es im weiteren Verlauf benützen werden.

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{19}$$

Schliesslich benötigen wir noch als letzte Voraussetzung das Faradaysche Induktionsgesetz, das uns die Verknüpfung zwischen einer zeitlich veränderlichen magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$ und der dadurch hervorgerufenen elektrischen Umlaufspannung liefert. Integriert man nämlich die Feldstärke entlang einer geschlossenen Kurve C um die magnetischen Induktionslinien auf, so erhält man

$$\oint_C (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl}) = -\frac{d}{dt} \iint_F (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{df}) \tag{20}$$

wo auf der rechten Seite die zeitliche Änderung der Summe aller Induktionslinien (des magnetischen Flusses) durch die Querschnittsfläche, die von der geschlossenen Kurve C umschlungen wird, steht. Die skalaren Produkte in den Integranden bedeuten, dass es sich um die Projektionen des Vektors des Kurvenelements $\boldsymbol{dl}$ auf die Richtung des elektrischen Feldes beziehungsweise des Vektors der Flächennormalen auf die Richtung der Induktionslinien handelt.

2. Einige Folgerungen aus den axiomatischen Beziehungen

Die vektorielle Summe der Kräfte, die auf eine bewegte elektrische Ladung wirken, kann als die vektorielle Summe

der Gleichung (5) und der integrierten Form von (15) direkt angeschrieben werden

$$\boldsymbol{F} = Q\{\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\} \tag{21}$$

$\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ können auch als die vektoriellen Summen verschiedener elektrischer Felder beziehungsweise magnetischer Induktionen aufgefasst werden. Die Beziehung (21) ist die *Lorentz*sche Kraftformel, nach ihr können die Bahnen berechnet werden, die ein geladenes Teilchen, zum Beispiel ein Elektron, durchläuft, wenn es willkürlich im Raum angeordneten elektrischen und magnetischen Feldern ausgesetzt ist.

Eine Umformung von (16) unter Zuhilfenahme von (14), (6) und (7) ergibt

$$d\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{D}] \tag{22}$$

die *Thomson*sche Formel. Sie besagt, dass eine bewegte elektrische Erregung ein Magnetfeld zur Folge hat, sofern die Bewegungsrichtung verschieden von der Richtung der Erregung selbst ist.

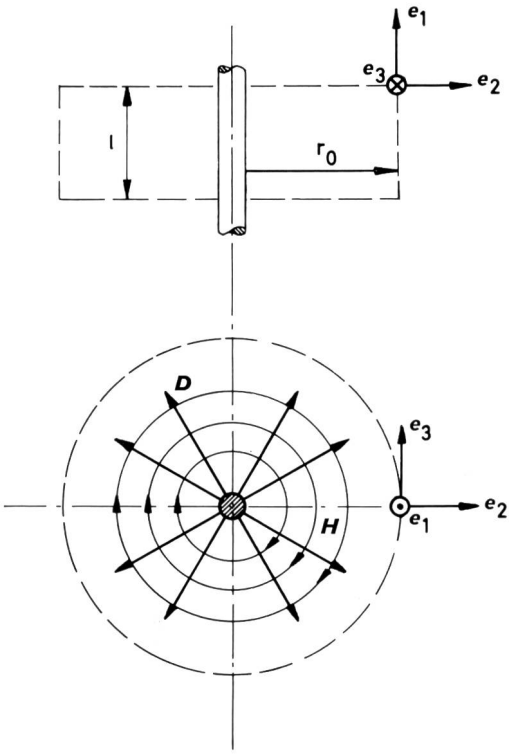

Fig. 3
Ein gedachter Zylinder um einen stromführenden Leiter, von dem Linien elektrischer Erregung ausgehen und um den Magnetfeldlinien herumgehen. Auf dem Zylindermantel sind die Richtungen der Einheitsvektoren eingetragen

Wir überlegen uns jetzt, was aus (16) wird, wenn wir die magnetische Feldstärke in der Umgebung eines unendlich langen, geradlinigen stromführenden Leiters berechnen. Wir betrachten in *Figur 3* ein Stück dieses Drahtes mit der endlichen Länge l und denken uns darum herum einen Zylinder mit dem Radius r_0, auf dessen Mantel wir die magnetische Feldstärke berechnen wollen, die aber jetzt nicht von einem infinitesimal kurzen Leiterelement dl allein herrührt, sondern vom Strom durch den ganzen unendlich langen Leiter. Der Umstand, dass der Leiter unendlich lang ist, gibt uns eine starke Vereinfachung in die Hand, nämlich die Zylindersymmetrie. Betrachten wir erst einmal die elektrische Erregung, die wegen der Ladung auf dem Draht durch die Mantelfläche des Zylinders tritt. Aus (6) und (7) schliessen wir, dass sie gegeben ist durch den Quotienten von Ladung und Oberfläche, durch die die Erregungslinien senkrecht treten. Wegen der Zylindersymmetrie dürfen wir annehmen, dass es nur radiale Erregungslinien gibt; man kann daher in vektorieller Form schreiben

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{2\pi r_0 l} \cdot \boldsymbol{e}_2 \tag{23}$$

wo von der radialen Komponente des Koordinatensystems von Einheitsvektoren aus Figur 3 Gebrauch gemacht wurde.

Eine ähnliche Überlegung können wir für die Magnetfeldlinien anstellen, die jedoch zirkumferentiell verlaufen. Wieder wegen der Zylindersymmetrie schliessen wir aus (16), dass das Magnetfeld in einem Punkt auf der Mantelfläche des Zylinders um den Draht

$$\boldsymbol{H} = \frac{I[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{e}_2]}{2\pi r_0 l} \tag{24}$$

sein muss. Wegen $\boldsymbol{l} = l\boldsymbol{e}_1$ und $[\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2] = \boldsymbol{e}_3$ erhalten wir den Durchflutungssatz

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r_0} \boldsymbol{e}_3 \tag{25}$$

Er besagt, dass die magnetische Umlaufspannung gleich dem Strom ist, der durch den umschlungenen Querschnitt fliesst und lautet daher in allgemeiner Form

$$\oint_S (\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s}) = \iint_A (\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{f}) \tag{26}$$

wofür weder Zylindersymmetrie noch ein einziger dünner Leitungsdraht vorausgesetzt zu werden braucht. Es wird in (26) links um die ganze geschlossene Kurve S, rechts über die von S berandete Querschnittfläche A integriert.

Wir hätten die Formel (25) auch direkt aus (16) durch Integration über den unendlich langen geraden Draht erhalten können, ebenso wie man sich die allgemeine Form des Durchflutungssatzes (26) mehr oder weniger leicht für einige besondere Leitungsformen und -gebilde bestätigen kann.

Aus (23) und (24) kann man sich leicht die integrale Form der Thomson-Formel (22) ableiten.

Nachdem wir uns nun mit der Darstellung des Magnetfeldes als Folge eines Leitungsstromes befasst haben,

können wir aus dem Biot-Savartschen Gesetz, das uns die Kraft zwischen einem Stromelement und einem magnetischen Pol angibt, die Kraftwirkung zweier stromdurchflossener Leiter aufeinander ableiten, indem wir das Magnet-

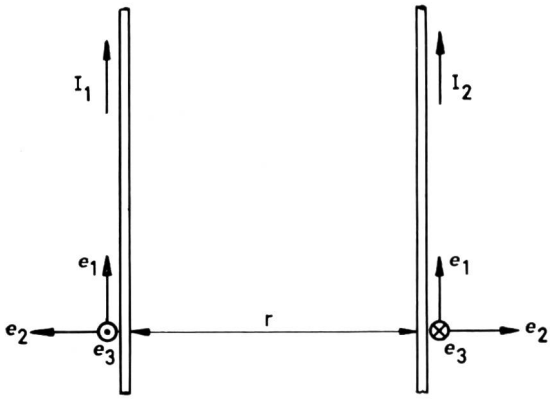

Fig. 4
Zwei parallele stromführende Leiter im Abstand r zueinander. Zu jedem Leiter sind die Richtungen der Einheitsvektoren eingezeichnet, wie sie für das Verständnis der Kraftwirkung nach dem Ampèreschen Gesetz nötig sind

feld, das vom Magnetpol ausgeht, durch ein solches von einem zweiten Leiter ersetzen. Wir wählen einfachheitshalber zwei parallele unendlich lange Drähte, deren Durchmesser vernachlässigbar klein verglichen mit dem gegenseitigen Abstand sind. In *Figur 4* sind neben den Leitern die zugehörenden Koordinatenrichtungen mit den Einheitsvektoren eingetragen. Die magnetische Induktion, die der Strom I_2 durch den zweiten Leiter an der Stelle des ersten Leiters über eine Länge l verursacht, kann wegen der einfachen Anordnung gleich in der integralen Form von (13) angeschrieben werden

$$\boldsymbol{F} = I_1 \, [\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}_2] \tag{27}$$

Wegen des Durchflutungssatzes (25) können wir für B_2 einsetzen

$$\boldsymbol{B}_2 = \mu \frac{I_2}{2\pi r} \cdot \boldsymbol{e}_3 \tag{28}$$

und weil $[l\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3] = -l\boldsymbol{e}_2$ für unsere Koordinatenwahl gilt, wird die Kraft der beiden Leiter aufeinander

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mu \, I_1 \, I_2 \, l}{2\pi r} \cdot \boldsymbol{e}_2 \tag{29}$$

Es ist dies das *Ampère*sche Gesetz, und diese Formel wird verwendet, um im mksA-*(Giorgi)*-Masssystem die Permeabilität des Vakuum als viertes Urmass zu definieren. Misst man nämlich die Kraft, die zwei Leiter über eine Länge von 1 m, mit dem Abstand von 1 m, durch die man einen Strom von je 1 A fliessen lässt, aufeinander ausüben, so findet man $2 \cdot 10^{-7}$ Newton $\left(= \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right)$. Aus (29) folgt dann

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2} \tag{30}$$

Als Einheit für die Permeabilität kann für praktische Zwecke besser $\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ verwendet werden. In (30) wurden ausschliesslich die vier Fundamentaleinheiten des mksA-Systems verwendet[1].

3. Die Gleichungen von Maxwell

Wir gehen nun daran, einige bisher abgeleitete Formeln den Sätzen der Vektoranalysis zu unterwerfen.

Durch Anwendung des *Stokes*schen Integralsatzes auf die linke Seite von (26) wird diese Formel zu

$$\iint_A (\text{rot}\,\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{f}) = \iint_A (\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{f}) \tag{31}$$

Vorausgesetzt, dass diese Formel innerhalb der Fläche A unabhängig von der Integration gelten soll, gilt sie auch für die Integranden allein

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{32}$$

Die Wirbeldichte des Magnetfeldes in einem Flächenelement ist gleich der Dichte des elektrischen Stromes durch dieses Flächenelement. Es ist dies die differentielle Form des Durchflutungssatzes.

Aus (6) und (7) kann man eine allgemeine Form für den Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung Q und der von ihr ausgehenden Erregung D gewinnen. Die linke Seite von $4\pi r^2 D = Q$ ist das Produkt von Kugeloberfläche, durch die die Erregungslinien senkrecht treten, und dem auf dieser Kugelfläche konstanten Betrag der Erregung. Sind nun wegen der Form des Körpers, auf dem die Ladung Q sitzt, die Flächen konstanter Erregung keine Kugeln, so

---

[1] An dieser Stelle ist eine Bemerkung über die verwendeten Einheiten am Platze. Neben den drei Fundamentaleinheiten der Mechanik: Meter (m), Kilogramm (kg) und Sekunde (s) ist in der Elektrizitätslehre als vierte Fundamentaleinheit das Ampère (A) in Gebrauch, das aus den mechanischen Einheiten über das vierte Urmass, der Permeabilität des Vakuums, definiert ist. Das Volt (V) als Einheit der Spannung oder Potentialdifferenz kann nun aus der Einheitengleichung für elektrische und mechanische Arbeit gewonnen werden (V) (A) (s) $= \frac{(\text{kg})\,(\text{m}^2)}{(\text{s}^2)}$. Wegen (18) folgt daraus für die Einheit der Feldstärke V/m. Die Einheit der elektrischen Ladung ist As oder Coulomb (Cb) und wegen (6) und (7) jene der elektrischen Erregung $\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$. Die Einheit der Magnetfeldstärke ist wegen des Durchflutungssatzes (25) A/m, die der magnetischen Induktion wegen (10) und (30) $\frac{\text{kg}}{\text{A s}^2}$ oder $\frac{\text{V s}}{\text{m}^2}$, was man auch mit dem Faradayschen Induktionsgesetz nachprüfen kann. Die Einheit der magnetischen Polstärke schliesslich ist wegen (9) und (10) Vs oder, was dasselbe ist, aus (4) und (30) $\frac{\text{kg m}^2}{\text{As}^2}$.

muss trotzdem das Produkt aus Oberfläche mal dazugehöriger Erregung D gleich der Ladung Q sein, also

$$\oiint_O (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{df}) = Q \tag{33}$$

Die Ladung Q, die sich innerhalb der geschlossenen Oberfläche O befindet, kann auch als Volumenintegral der Ladungsdichte ϱ

$$Q = \iiint_V \varrho \, dV \tag{34}$$

ausgedrückt werden. Wenden wir nun auf die linke Seite von (33) den *Gauss*schen Integralsatz an, so ergibt sich

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{D} \, dV = \iiint_V \varrho \, dV \tag{35}$$

Wenn diese Beziehung wieder unabhängig von der Integration gelten soll, dürfen wir schreiben

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho \tag{36}$$

Die Quellergiebigkeit von $\boldsymbol{D}$ ist gegeben durch die Ladungsdichte ϱ. Es ist dies eines der beiden Gaussschen Divergenzgesetze.

Die elektrische Feldstärke $\vec{\boldsymbol{E}}$ kann aus einem skalaren Potentialfeld V, das hier nur von den Ortskoordinaten abhängen soll, definiert werden wie

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\operatorname{grad} V$$

Setzen wir dies in (36) ein und gebrauchen den Laplace-Operator Δ für div grad, so erhalten wir die *Poisson*sche Differentialgleichung

$$\Delta V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

und für quellenfreie Räume

$$\Delta V = O$$

die Laplacesche Differentialgleichung.

Wir haben bisher nur das Verhalten statischer Felder geprüft, die ihre Ursache entweder in ruhenden elektrischen Ladungen beziehungsweise magnetischen Polen oder in zeitlich konstanten Strömen hatten. Wenden wir uns nun dem dynamischen Verhalten der Felder zu und fragen, was passiert, wenn ein elektrisches Feld sich mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, die weder örtlich noch zeitlich konstant zu sein braucht, bewegt. Nehmen wir an, die Linien elektrischer Erregung, die zum Zeitpunkt t durch die Fläche A treten, befinden sich im Zeitpunkt $t+dt$ in der Fläche A' *(Fig. 5)*. Für die Berechnung des Hüllenintegrals müssen wir das Ganze als ein räumliches Problem im Zeitpunkt t betrachten und nachsehen, um wieviel mehr oder weniger Erregungslinien im Zeitpunkt t durch A' als durch A treten. Die räumliche Verschiebung zwischen A' und A ist $\boldsymbol{v}\,dt$. Es wird nun für dieses Volumen

$$\oiint_O (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{df}) = \iint_{A'} (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{df}') - \iint_A (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{df}) + \iint_M (\boldsymbol{D} \cdot [\boldsymbol{dr} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{dt}]) \tag{37}$$

wo zur Abkürzung $\boldsymbol{n}\,df = \boldsymbol{df}$ geschrieben wurde.

Es bedeuten O die gesamte Oberfläche und M die geschlossene Mantelfläche des Gebildes von Figur 5. Die ersten beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von (37) sind äquivalent an $-\frac{\partial}{\partial t}\iint (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{df})\,dt$. Die linke Seite kann wegen des Gaussschen Integralsatzes ersetzt werden durch $\iiint \varrho \cdot (\boldsymbol{df} \cdot \boldsymbol{v}dt)$, wobei der Klammerausruck im Integral das Volumselement darstellt. Das letzte Integral in (37) schliesslich kann durch zyklische Vertauschung geschrie-

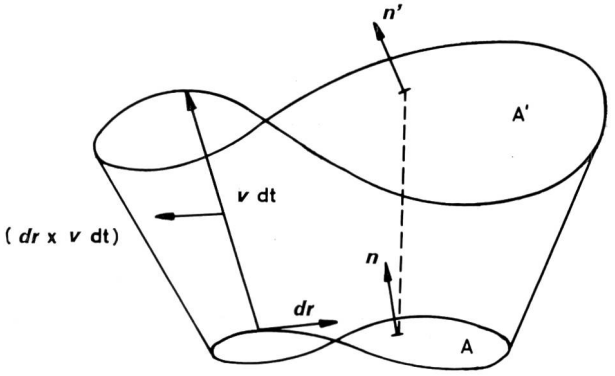

Fig. 5
Raumgebilde, das durch Verschiebung und Verzerrung der Fläche A über den Abstand $\boldsymbol{v}\,dt$ nach A' entsteht. Die Flächennormale der Mantelfläche ist $(d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,dt)$. Die Flächennormale für A ist $\boldsymbol{n}\,df$ und für A' ist sie $\boldsymbol{n}'df'$

ben werden wie $\iint_M (\boldsymbol{dr} \cdot [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}])\,dt$, und weil es sich dabei um eine Integration um die geschlossene Mantelfläche handelt, dürfen wir den Stokesschen Integralsatz anwenden, so dass wir jetzt statt (37) haben

$$\iint_A (\boldsymbol{df} \cdot \operatorname{rot}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}]) = \iint_A \left(\boldsymbol{df} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{v}\right]\right) \tag{38}$$

Unter der üblichen Voraussetzung gilt diese Gleichung auch für die Integranden allein

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}] = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{v} \tag{39}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Erregung. Bilden wir die Divergenz von (39), so verschwindet die linke Seite, und wenn zeitliche und räumliche Differen-

tiation vertauschbar sind, erhalten wir unter Verwendung von (36) die Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{40}$$

Der Begriff der Kontinuität stammt aus der Hydrodynamik, und (40) besagt, dass eine zeitliche Änderung der Ladungsdichte in einem Volumselement nur möglich ist, wenn Ladung ein- oder ausströmt und die Rate der zeitlichen Änderung proportional der Strömungsgeschwindigkeit ist. Die integrale Form der Kontinuitätsgleichung für Ladungen macht dies anschaulicher klar

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varrho \, dV = \oiint_O (\varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{df}) \tag{41}$$

Die rechte Seite repräsentiert die mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch die Oberfläche O des betrachteten endlichen Volumens V tretende Ladung.

Wegen $\varrho \boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$ und der Thomsonschen Formel (22) kann die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Erregung (39) geschrieben werden wie

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{42}$$

und heisst in dieser Form 1. Maxwellsche Gleichung. Sie besagt, dass ein magnetisches Wirbelfeld stets verknüpft ist mit entweder einem elektrischen Strom oder einer zeitlich veränderlichen elektrischen Erregung oder auch mit beiden.

Auf die linke Seite des Faradayschen Induktionsgesetzes (20) können wir den Stokesschen Integralsatz anwenden

$$\oint_C (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{ds}) = \iint_F (\operatorname{rot} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{df}) \tag{43}$$

und wenn die Integration für beliebig berandete Flächen durchgeführt werden kann, erhalten wir die Differentialform des Faradayschen Induktionsgesetzes

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{44}$$

Es ist dies die 2. Maxwellsche Gleichung. Sie besagt, dass ein elektrisches Wirbelfeld, das heisst geschlossene elektrische Feldlinien, nur dann möglich ist, wenn eine zeitlich veränderliche magnetische Induktion anwesend ist.

Rotorfelder sind immer quellenfrei, daher wird bei der Bildung der Divergenz von (44) die linke Seite null. Auf der rechten Seite dürfen wir die Differentiation nach Zeit- und Ortskoordinaten vertauschen. Wenn aber $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \boldsymbol{B}) = 0$ gilt, dann muss auch

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{45}$$

gelten. Es ist (45) das 2. Gausssche Divergenzgesetz. Es besagt, dass es keine isolierten magnetischen Ladungen gibt und dass die Linien magnetischer Induktion stets geschlossen sind. Die Gleichungen (42), (44), (36), (45) und die Materiegleichungen (7), (10) und (19) bilden zusammen das System der Maxwell-Gleichungen, wie wir es für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen verwenden werden.

Die Ableitung der Maxwell-Gleichungen, wie wir dies hier durchgeführt haben, entspricht etwa der logischen Entwicklung von einzelnen experimentell gefundenen und von uns axiomatisch an die Spitze gestellten Beziehungen zu einem möglichst allgemein formulierten Gesetz, ohne Anspruch auf strenge Exaktheit in den Ableitungen. Eleganter, jedoch weniger anschaulich ist der umgekehrte Weg, die Maxwell-Gleichungen zu postulieren und daraus die einzelnen Gesetze, wie das Coulombsche Kraft- oder das Faradaysche Induktionsgesetz, deduktiv als Spezialfälle der allgemeinen Theorie herzuleiten.

4. Der Energie-Satz der Maxwell-Theorie

Für den Aufbau von elektrischen und magnetischen Feldern wird selbstverständlich Energie benötigt. Wir können uns die Frage stellen, in welcher Form wir die Energie wiederfinden, wenn wir die Felder in einem Raum mit beliebigem, jedoch im Sinne der Materiegleichungen linearen Medium betrachten. Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, multiplizieren wir (42) skalar mit $\boldsymbol{E}$ und (44) skalar mit $\boldsymbol{H}$ und subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander

$$(\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) - (\boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E}) = \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) + \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}) \tag{46}$$

Wir gebrauchen die Identität aus der Vektoranalysis

$$(\boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) = \operatorname{div}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] \tag{47}$$

und kürzen das Vektorprodukt rechts ab

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] \tag{48}$$

Man bezeichnet $\boldsymbol{S}$ als *Poynting*-Vektor, seine Richtung ist senkrecht zur Ebene, die von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ aufgespannt wird, und er hat die Dimension einer Leistung pro Flächeneinheit. Die Dimension von div $\boldsymbol{S}$ ist daher Leistung pro Volumeneinheit. Wie man sich leicht überzeugen kann, haben auch die drei Terme auf der rechten Seite von (46) dieselbe Dimension. Durch Integration des ersten und zweiten Terms der rechten Seite über die Zeit erhalten wir die elektrische Energie pro Volumeneinheit

$$w_e = \int (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dD}) \tag{49}$$

und die magnetische Energie pro Volumeneinheit

$$w_m = \int (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{dB}) \tag{50}$$

Die im letzten Glied von (46) vorkommende Stromdichte $\boldsymbol{j}$ ist proportional der Summe von elektrischer Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und eventuell im betrachteten Raum vorhandenen eingeprägten elektromotorischen Kräfte $\boldsymbol{E}_e$

$$\boldsymbol{j} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e) \tag{51}$$

so dass wir für dieses Glied in (46) erhalten

$$(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}) = \frac{|j|^2}{\sigma} - (\boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{j}) \tag{52}$$

Der Energiesatz kann nun in folgende Form gebracht werden

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m) + \frac{|j|^2}{\sigma} = (\boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{j}) \tag{53}$$

Integrieren wir über ein bestimmtes Volumen und definieren als die gesamte im Volumen gespeicherte elektromagnetische Energie

$$W = \iiint_V (w_e + w_m)\, dV \tag{54}$$

und verwenden für das erste Glied von (53) den Gaussschen Integralsatz, so erhalten wir

$$\oiint_O (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{df}) + \frac{dW}{dt} + \iiint_V \frac{|j|^2}{\sigma} \cdot dV = \iiint_V (\boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{j})\, dV \tag{55}$$

Der erste Ausdruck stellt die durch die Oberfläche O des betrachteten Raumes strömende elektromagnetische Leistung dar, der zweite Ausdruck die zeitliche Änderung der gespeicherten elektromagnetischen Energie, der dritte die Umwandlung elektromagnetischer Leistung in *Joule*sche Wärme, während durch die rechte Seite die Leistung repräsentiert wird, die von eingeprägten Kräften zur Verfügung kommt. Wir erkennen jetzt klar, dass der Poynting-Vektor den Leistungsfluss nach Betrag und Richtung darstellt.

Befinden sich im betrachteten Raum weder eingeprägte elektromotorische Kräfte noch Teile mit endlicher Leitfähigkeit, so bleiben nur die ersten beiden Ausdrücke übrig. Sie sagen uns, dass eine Änderung der gespeicherten Energie nur durch einen gleich grossen Zu- oder Abfluss von Energie möglich ist.

Der Energiesatz in der Form (54) oder (55) ist völlig allgemein auf elektromagnetische Felder anwendbar und für jeden Augenblickswert der Felder erfüllt. Hat man es mit periodisch variierenden Feldern zu tun, so genügt es meist, mit dem Poynting-Vektor den über die Zeit gemittelten Energiestrom auszudrücken.

Die sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω variierenden Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ seien in der komplexen Schreibweise (Realteil mit Index r, Imaginärteil mit Index i) dargestellt

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= (\boldsymbol{E}_r + i\,\boldsymbol{E}_i)\ \exp(-i\omega t) \\ \boldsymbol{H} &= (\boldsymbol{H}_r + i\,\boldsymbol{H}_i)\ \exp(-i\omega t) \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Kommen Produkte komplexer Grössen in einer Gleichung vor, von deren Lösung uns nur die Realteile interessieren, so dürfen wir bei der Produktbildung nur die Realteile der Faktoren verwenden. In unserem Fall wird der Poynting-Vektor der Realteile der Feldstärken

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} = {} & [\boldsymbol{E}_r \times \boldsymbol{H}_r] \cos^2\omega t + [\boldsymbol{E}_i \times \boldsymbol{H}_i] \sin^2\omega t - \\ & - ([\boldsymbol{E}_r \times \boldsymbol{H}_i] + [\boldsymbol{E}_i \times \boldsymbol{H}_r]) \sin\omega t \cos\omega t \end{aligned} \tag{57}$$

Bei einer zeitlichen Mittelung über eine Periode T

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{S}\, dt$$

liefern nur die ersten beiden Ausdrücke von (57) Beiträge, und zwar ist

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\ [\boldsymbol{E}_r \times \boldsymbol{H}_r] + [\boldsymbol{E}_i \times \boldsymbol{H}_i]) \tag{58}$$

Dies ist aber nichts anderes als der halbe Realteil von $[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*]$, wobei $\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H}_r - i\boldsymbol{H}_i$ die konjugiert komplexe Form von $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_r + i\boldsymbol{H}_i$ ist. Wir können also für periodische Felder den mittleren Leistungsfluss je Flächeneinheit durch die Umhüllung des betrachteten Raumes schreiben als

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*] \tag{59}$$

Re = Realteil

Es ist dies der Realteil des sogenannten komplexen Poynting-Vektors, dessen Eigenschaften für periodisch variierende Felder wir noch kurz betrachten wollen. Für Felder, die harmonische Funktionen der Zeit sind, werden wegen $\frac{d}{dt} = -i\,\omega$ die ersten beiden Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = (\sigma - i\,\omega\,\varepsilon)\,\boldsymbol{E} \tag{60}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\,\omega\,\mu\,\boldsymbol{H} \tag{61}$$

Wir nehmen von der ersten Gleichung die konjugiert komplexe rot $\boldsymbol{H}^* = (\sigma + i\omega\varepsilon)\,\boldsymbol{E}^*$ und multiplizieren sie mit $\boldsymbol{E}$, während wir (61) mit $\mathbf{H}^*$ multiplizieren und subtrahieren beide. Mit Hilfe der Vektoridentität (47) und der Definition $\tilde{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*]$ des komplexen Poynting-Vektors wird der Energiesatz für harmonisch variierende Felder, ohne eingeprägte Kräfte

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{S}} = -\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*) + \mathrm{i}\,\omega \left\{ \frac{\mu}{2}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^*) - \frac{\varepsilon}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*) \right\} \tag{62}$$

Die rechte Seite setzt sich zusammen aus der Divergenz des Realteiles von $\tilde{\boldsymbol{S}}$, die je Volumeneinheit in Wärme umgewandelte elektrische Leistung, und der mit $2i\omega$ multiplizierten Differenz der mittleren Werte der magnetischen und elektrischen Energiedichten. Wenn der Poynting-Vektor reell ist, sind die über eine Periode gemittelten elektrischen und magnetischen Energiedichten gleich gross, und die gesamte gespeicherte Energie tritt abwechselnd als elektrische und magnetische Energie in Erscheinung.

5. Die Wellengleichung

Das System der Maxwell-Gleichungen umfasst sieben Gleichungen und ist deshalb für den praktischen Gebrauch bei der Berechnung besonderer Probleme elek-

tromagnetischer Felder mit vorgegebenen Randbedingungen häufig zu schwerfällig. Viel eleganter ist für diesen Zweck die Wellengleichung. Wenden wir auf beiden Seiten von (44) die Vektoroperation des Rotors an und setzen voraus, dass im betrachteten Raum die Differentiationen nach Orts- und Zeitkoordinaten vertauschbar sind, so erhalten wir

$$\text{rot rot} \cdot \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \boldsymbol{H} \tag{63}$$

In die rechte Seite von (63) können wir aber (42) einsetzen, und unter Verwendung von (7) und (19) wird dann

$$\text{rot rot} \boldsymbol{E} = -\mu \left[\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right] \tag{64}$$

Wegen der Identität

$$\text{rot rot} \boldsymbol{E} = \text{grad div} \boldsymbol{E} - \Delta \boldsymbol{E} \tag{65}$$

mit dem Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in karthesischen Koordinaten erhalten wir für quellenfreie Felder (div $E = \text{o}$) die Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \text{O} \tag{66}$$

Sie stellt den Zusammenhang zwischen der räumlichen und zeitlichen Abhängigkeit des elektrischen Feldes in einem Medium mit gegebenen Eigenschaften μ, ε, σ dar. Ihre Lösung ist im verlustfreien Fall ($\sigma = \text{o}$) eine reine ungedämpfte Wellenbewegung.

Ganz analog können wir durch Rotorbildung von (42), Einsetzen von (44) und Anwendung der Tatsache, dass magnetische Felder immer quellenfrei sind (45), eine gleichlautende Wellengleichung für das Magnetfeld erhalten

$$\Delta \boldsymbol{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \text{O} \tag{67}$$

Diese beiden Gleichungen sind ein recht elegantes Werkzeug bei der Berechnung von spezifischen Wellenproblemen, wobei dann noch die Randbedingungen für beide Felder in den Lösungen von (66) und (67) zu berücksichtigen sind.

Durch Einführen eines Vektorpotentials $\boldsymbol{A}$ und eines skalaren Potentials V hat *Hertz* gezeigt, dass es möglich ist, mit nur einer Wellengleichung und den Randbedingungen die Lösungen für das elektromagnetische Feld einer vorgegebenen Struktur zu finden. Das Vektorpotential ist mit der magnetischen Induktion verknüpft wie

$$\boldsymbol{B} = \text{rot} \boldsymbol{A} \tag{68}$$

Wegen der universellen Gültigkeit von div $\boldsymbol{B} = \text{o}$ lässt sich die Induktion sicher durch ein Wirbelfeld ausdrücken. Setzen wir (68) in die zweite Maxwell-Gleichung (44) ein, so können wir wegen der Vertauschbarkeit von Differentiation nach den Zeit- und Ortskoordinaten schreiben

$$\text{rot} \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = \text{o} \tag{69}$$

Diese Gleichung gilt ausser für den trivialen Fall dann, wenn der Klammerausdruck, auf den der Operator Rotor wirkt, selbst ein Gradientenfeld ist, das heisst gleich dem Gradienten eines skalaren Potentials.

$$-\text{grad V} = \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{70}$$

Wir setzen nun die beiden Potentialfelder in die erste Maxwell-Gleichung (42) ein, berücksichtigen die Vektorbeziehung (65) für rot rot $\boldsymbol{A}$ und ziehen die Glieder in geeigneter Weise zusammen

$$-\Delta \boldsymbol{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \\ + \text{grad} \left[\text{div} \boldsymbol{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \mu \sigma V \right] = \text{O} \tag{71}$$

Über die Verknüpfung zwischen V und $\boldsymbol{A}$ dürfen wir ausser durch (70) noch durch eine zweite Beziehung, die mit (70) verträglich ist, verfügen; wir tun dies so, dass der Klammerausdruck in (71), auf den der Gradientenoperator wirkt, verschwindet.

Da wir es bei der Wellenausbreitung meist mit quellenfreien Räumen zu tun haben, machen wir an dieser Stelle die weitere Voraussetzung

$$\text{div} \cdot D = \text{o} \tag{72}$$

die uns eine gewisse Einschränkung in der Anwendbarkeit der zu gewinnenden Wellengleichung bringt, jedoch ihre Ableitung erleichtert. Gebrauchen wir (70) und die bereits erwähnte Bedingung, dass der Klammerausdruck in (71) verschwinden soll, so erhalten wir aus (72)

$$\Delta V - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial V}{\partial t} = \text{O} \tag{73}$$

Um die Bedingung

$$\text{div} \boldsymbol{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \mu \sigma V = \text{O} \tag{74}$$

zu erfüllen, muss die Verkoppelung zwischen $\boldsymbol{A}$ und V über den sogenannten Hertzschen Vektor $\vec{\Pi}$ erfolgen, der dann folgendermassen definiert sein muss

$$\text{V} = -\text{div} \vec{\Pi} \tag{75}$$

$$\boldsymbol{A} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \mu \sigma \vec{\Pi} \tag{76}$$

wie man sich leicht durch Einsetzen in (74) überzeugen kann.

Wegen div $(\Delta \vec{\Pi}) = \Delta$ (div $\vec{\Pi}$)

folgt aus (73) schliesslich durch Einsetzen von (75)

$$\Delta \vec{\Pi} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = \text{O} \tag{77}$$

die Wellengleichung für den Hertzschen Vektor.

Ebenso können wir in den verbleibenden Teil von (71) durch Einsetzen von (76) die Wellengleichung für den Hertzschen Vektor (77) erhalten. Wir können also aus den Wellengleichungen für das skalare (73) wie für das Vektorpotential (71) eine einzige Wellengleichung ableiten, die nicht nur für diese beiden als Hilfsgrössen eingeführten Potentiale, sondern auch für das magnetische wie für das elektrische Feld gleichermassen erfüllt ist. Aus der Definition des skalaren Potentials (70) folgt nämlich, wenn wir (75) und (76) einsetzen,

$$\boldsymbol{E} = -\mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} - \mu\,\sigma \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \text{grad div}\,\vec{\Pi} = \text{rot rot}\,\vec{\Pi} \qquad (78)$$

weil die ersten beiden Ausdrücke zwischen den Gleichheitszeichen durch (77) gegeben sind. Aus (68) folgt mit Hilfe von (76) für das magnetische Feld

$$\boldsymbol{H} = \text{rot}\left[\varepsilon \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \sigma \vec{\Pi}\right] \qquad (79)$$

6. Ebene Welle in verlustlosem Medium

Als einfachste Anwendung der Wellengleichung (77) wollen wir diese für eine ebene Welle lösen. Wenn das Medium, durch das sich die Welle ausbreiten soll, verlustlos angenommen werden darf, verschwindet wegen $\sigma = 0$ der letzte Ausdruck in (77). Weiter sei das Medium isotrop und homogen in den beiden anderen Materiegrössen ε und μ. Nehmen wir an, dass die Welle in z Richtungen laufen soll und – weil es eine ebene Welle sein soll – ihre Feldgrössen unabhängig von den Koordinaten x und y sind, so wird

$$\Delta \vec{\Pi} = \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial z^2}$$

und die Wellengleichung wird zu

$$\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial z^2} - \mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \qquad (80)$$

Ein Ansatz für eine harmonische Schwingung, der diese Gleichung erfüllt, ist

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_0 \cdot \exp\,(i\,\omega\,t - \gamma\,z) \qquad (81)$$

In (80) eingesetzt erhalten wir

$$\gamma^2 \vec{\Pi} + \omega^2\,\varepsilon\,\mu\,\vec{\Pi} = 0 \qquad (82)$$

Die Lösung der Gleichung (82) $\gamma = \pm i\,\omega \sqrt{\varepsilon\,\mu}$ in (81) eingesetzt, gibt uns für die Abhängigkeit des Hertzvektors von den Zeit- und Ortskoordinaten

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_0 \exp\left[i\,\omega\left(t \pm \sqrt{\varepsilon\,\mu}\,z\right)\right] \qquad (83)$$

Durch (83) ist die Geschwindigkeit, mit der die Welle entlang der z-Richtung läuft, gegeben

$$v = \frac{z}{t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} \qquad (84)$$

Die beiden Vorzeichen im Exponenten von (83) beziehen sich auf vorwärts-(–Zeichen) und rückwärtslaufende (+Zeichen) Wellen. Läuft die ebene elektromagnetische Welle durch Vakuum, so wissen wir, dass dort die Fortplanzungsgeschwindigkeit $v_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s ist, und wir können nun endlich auch noch die in Gleichung (3) eingeführte, bisher noch unbekannte Dielektrizitätskonstante für Vakuum bestimmen:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{v_0^2\,\mu_0} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \qquad (85)$$

Schliesslich interessieren uns an der Lösung des Problems der ebenen Welle die Ausdrücke für das elektrische und magnetische Feld. Der Hertz-Vektor steht transversal zur Wellenfortpflanzung, aber wir müssen ihm noch eine Richtung im Koordinatensystem angeben. Wählen wir ihn parallel zur y-Achse $\vec{\Pi} = \Pi_y$.

Es liefern die Gleichungen (78) und (79) schliesslich

$$E_y = -\gamma^2\,\Pi_y, \quad E_x = E_z = 0 \qquad (86)$$

und

$$H_x = i\,\omega\,\varepsilon\,\gamma\,\Pi_y, \quad H_y = H_z = 0 \qquad (87)$$

Die Felder stehen transversal zur Fortpflanzungsrichtung und senkrecht zueinander. Das Verhältnis von elektrischem und magnetischem Feld für eine vorwärtslaufende Welle ist

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\gamma}{i\,\omega\,\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (88)$$

und wird der Wellenwiderstand des Mediums genannt, für Vakuum wird er

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega$$

Adresse des Autors: E. Schanda, Institut für angewandte Physik der Universität Bern, 3000 Bern.

Literatur

Sommerfeld A. Vorlesungen über Theoretische Physik. Bd III. Elektrodynamik. Geest & Portig, Leipzig, 1948.

Stratton J. A. Electromagnetic Theory. McGraw Hill, New York, 1941.

Jackson J. D. Classical Electrodynamics. John Wiley, New York, 1962.

Jones D. S. The Theory of Electromagnetism. Pergamon, Oxford, 1964.

Oberdorfer G. Die Mass-Systeme in Physik und Technik. Springer, Wien, 1956.

Fischer J. Einheiten und Einheitensysteme der Elektrizitätslehre und Elektrotechnik. Archiv für Technisches Messen VO4–5, Dezember 1963.