Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 41 (1963)

Heft: 6

Artikel: Einführung in die Schaltalgebra

Autor: Kallen, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874331

Nº 6 - BERN, VI. 1963 - JAHRGANG - ANNÉE - ANNO XLI

TECHNISCHE MITTEILUNGEN

BULLETIN TECHNIQUE

PTT

BOLLETTINO TECNICO

Herausgegeben von den Schweizerischen Post-, Telephon- und Telegraphen-Betrieben – Publié par l'entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses. – Pubblicato dall'Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

R. Kallen, Bern

Einführung in die Schaltalgebra

621.3.06:512

Zusammenfassung. *Nach einer Darstellung der allgemeinen Form von Digitalschaltungen werden die Rechenregeln der Schaltalgebra mitgeteilt und gezeigt, wie sich damit Schaltkreisprobleme lösen lassen. Ferner wird ein praktisches Kontaktnetzwerk-Vereinfachungsverfahren beschrieben, das im deutschen Sprachgebiet wenig verbreitet ist und abschliessend die Synthese von elektronischen Verknüpfungsschaltungen aus Gatterbausteinen skizziert. Die wesentlichsten Angaben sind in ganzseitigen Tafeln zusammengestellt, die als Zusammenfassung verwendet werden können.*

1. Einleitung

Die Schaltalgebra ist ein Verfahren für die mathematische Behandlung von Schaltkreisproblemen in der Digitaltechnik. Der Begriff ist seit dem zweiten Weltkrieg bekannt geworden; die mathematischen Grundlagen sind indessen schon 1847 von *G. Boole* in Cambridge (England) in seiner Arbeit «The Mathematical Analysis of Logic» geschaffen worden, vermochten aber zunächst als Algebra der Logik nur die Mathematiker zu interessieren.

Es ist das Verdienst von *C.E.Shannon*, mit seiner Diplomarbeit «A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits», im Jahr 1938 die praktischen Anwendungsmöglichkeiten der Booleschen Algebra aufgezeigt zu haben; er hat damit dem Schaltungsingenieur ein nützliches Hilfsmittel in die Hand gegeben.

Viele Autoren haben das Werkzeug seither ständig vervollkommnet und damit ein Arbeitsinstrument geschaffen, dem alterfahrene Schaltungsfachleute zum Teil etwas skeptisch gegenüberstehen, weil sie mit ihrem reichen Katalog an Schaltungsfinessen geringen praktischen Nutzen einer wissenschaftlichen Behandlung von Schaltkreisproblemen sehen. Es kann aber nicht geleugnet werden, dass die jüngsten Erkenntnisse auf diesem Gebiet die digitale Schaltungstechnik befruchtet haben.

Wie kann nun die Schaltalgebra nutzbringend eingesetzt werden?

Sie erlaubt zunächst, logische Verknüpfungen zwischen zweiwertigen* Aussagen klar zu formulieren, also die Schlussfolgerung aus verschiedenen Voraussetzungen in eine mathematische Formel zu kleiden, was sonst nur mit einer Anzahl Textsätzen umständlich zu bewerkstelligen wäre. Da solche Schlüsse in logischen Verknüpfungsschaltungen unter anderem auch mit Relaiskontaktnetzwerken gezogen werden können, ist die Schaltalgebra ein Mittel, um die Arbeitsweise von Kontaktnetzwerken eindeutig mathematisch zu beschreiben.

Mit Hilfe der sogenannten *Theoreme* ist es weiter möglich, allfällige *Redundanzen* eines Kontaktnetzwerkes aufzudecken, das heisst, für die Funktion völlig überflüssige Teile zu eliminieren. Ferner lassen sich gegebene Netzwerke in anders geartete, aber äquivalente Gebilde umformen, was oft erlaubt, gewisse Engpässe und Schwierigkeiten in der Kontaktbestückung von Relais zu umgehen.

Ein wesentliches Hilfsmittel sind die besonders entwickelten, zum Teil graphischen *Vereinfachungsmethoden* (Minimizing), welche darauf hinzielen, ein bestimmtes Pflichtenheft für eine Schaltung mit minimalem Aufwand zu erfüllen. Ein besonders nützliches Verfahren wird später beschrieben.

Wesentliche Vorteile bringt die Schaltalgebra bei der Behandlung von *Eintakt- oder Kombinationsschaltungen*, bei denen die Wirkung am Ausgang nur von der Eingangskonstellation abhängt und wo es keine Rolle spielt, welches die zeitliche Folge der Eingangswirkungen ist.

* Im Rahmen dieses Aufsatzes soll nur die binäre Schaltalgebra betrachtet werden

Blockierungsschaltungen, Codewandler, Rechenwerke und andere sind typische Anwendungsbeispiele dafür. Der Begriff «Zeit» fehlt in der Terminologie der Schaltalgebra, es ist also auch nicht vorgesehen, die Länge der Relaisschaltzeiten mathematisch einzubeziehen. Es sind aber einige Verfahren bekannt geworden, die auch *Mehrtakt-* oder *Folgeschaltungen* zu behandeln gestatten, also Schaltungen mit Gedächtnisfunktionen, die unterscheiden, ob zum Beispiel Wirkung A vor oder nach B eintrat und danach die Ausgangsfunktion bestimmen [1,2].

Solche Schaltungen finden sich in der Praxis sehr häufig in der Form von Zählschaltungen, Impulsgebern, Untersetzern und Steuerschaltungen. Das Pflichtenheft einer Mehrtaktschaltung besteht dann nicht mehr einfach aus einer Kombinationstafel, sondern erhält die Form eines Folgediagramms oder einer Folgetabelle. Das Problem wird damit auf jenes einer reinen Kombinationsschaltung zurückgeführt.

Eine wesentliche *Beschränkung* der Schaltalgebra liegt in der *Anzahl der Variablen*. Werden diese zu zahlreich, dann steigt der rechnerische Aufwand stark an. Es ist also nicht möglich, eine komplexe und umfangreiche Schaltung in einer einzigen Stufe vollständig mathematisch zu behandeln, sondern das Problem muss in Teilprobleme zerlegt werden, und an gewissen Stellen hilft die konventionelle intuitive Synthese weiter. Gerade im zweckmässigen Zusammenwirken der ältern Schaltungstechnik mit der wissenschaftlichen Systematik ist der grösste Nutzen aus der Schaltalgebra zu ziehen, und diese ist dazu berufen, dem Beginnenden brauchbare Teillösungen zu liefern, die er rein intuitiv vielleicht nicht so bald gefunden hätte.

Besonders eng ist die Symbolik der Schaltalgebra aber mit der Synthese von *elektronischen Verknüpfungsschaltungen* verbunden, wo man mit den Begriffen der elektromechanischen Schalttechnik nicht mehr gut zurechtkäme.

Die nachfolgenden Ausführungen sollen den Algorithmus der binären Schaltalgebra erläutern und die Möglichkeiten andeuten, die sich mit diesem Arbeitsinstrument ergeben. Sie erheben keinen Anspruch auf eine umfassende Darstellung. Für jenen, der sich näher mit der Materie befassen möchte, sind ein paar empfehlenswerte Standardwerke im Literaturverzeichnis aufgeführt.

2. Allgemeine Form einer Relaisschaltung

Die beiden einleitend erwähnten Schaltungsgattungen sind mit ihren Merkmalen in *Tafel I* erläutert. Folgeschaltungen enthalten immer die sogenannten *Sekundärrelais*, die ausser von den Eingangsvariablen A, B, C... durch andere Sekundärrelais gesteuert werden und oft im steuernden Kontaktnetzwerk eigene Haltekontakte aufweisen. Folgeschaltungen ohne *Primärrelais* erzeugen ein internes Geschehen, das bei entsprechender Bemessung wiederholt wird, wie dies zum Beispiel beim Impulsgeber der Fall ist.

Es ist zweckmässig, den Pluspol der speisenden Batterie als geerdet anzunehmen und die Relaiswicklungen einseitig mit Minus zu verbinden. Eine Erde an einem Eingang, z. B. C, bewirkt dann die Betätigung des entsprechenden Primärrelais C; man sagt, der Eingang C sei aktiv oder $C = 1$. Die angedeuteten Kontaktnetzwerke können nur entweder sperren oder leiten und dies in Abhängigkeit einer oder mehrerer Variablen.

Die Wirkung an einem oder an mehreren Ausgängen erscheint als Erde oder keine Erde, dies ebenfalls im allgemeinen Fall als Funktion einer oder mehrerer Variablen. Können einzelne Kontakte mehreren Netzwerken gleichzeitig dienen, dann tendiert man auf die ökonomische Bildung von Drei- oder Mehrpol-Netzwerken. Es ist aber grundsätzlich möglich, jede gesteuerte Variable, also hier X, Y, Z_1, Z_2 mit einem eigenen Netzwerk zu bedienen.

Die beschriebene allgemeine Schaltungsform gilt auch für elektronische Digitalschaltungen, mit dem Unterschied, dass die Relais durch Gatterbausteine und Kippschaltungen zu ersetzen sind.

3. Symbolik der Schaltalgebra

Die *Tafel II* macht mit der hier verwendeten Symbolik bekannt, wobei wir uns an das sogenannte *Transmissionskonzept* halten, d.h. man ordnet einem *leitenden* Netzwerk die Transmissionsfunktion $T = 1$ zu. Das ältere Hinderniskonzept geht von der Annahme aus, dass ein gerade *sperrendes* Netzwerk dem Stromdurchgang ein maximales Hindernis in den Weg lege, also $H = 1$ [1,2].

Betätigt ein Kontaktnetzwerk einen Verbraucher X, dann wird mit Vorteil die neutrale Grösse T durch die spezielle Grösse X ersetzt, oder handelt es sich um das Steuernetzwerk eines Relais A, dann bedeutet geschlossener Strompfad: $T = 1$, $A = 1$, oder Relais A erregt.

Beim Aufzeichnen von Kontaktnetzwerken kann man auf die üblichen Kontaktsymbole verzichten, indem man einen Arbeitskontakt des Relais A einfach als einen in den Leitungszug eingeschobenen Buchstaben a, den Ruhekontakt als a' (in der Literatur manchmal auch als $\overline{a}$ bezeichnet) und einen Umschaltkontakt als Gabel mit a und a' darstellt. Da bei einem erregten und aufgezogenen Relais der Arbeitskontakt geschlossen, der Ruhekontakt aber offen ist, gilt offenbar:

$$A = 1 \qquad a = 1 \qquad a' = 0$$

und bei aberregtem und abgefallenem Relais:

$$A = 0 \qquad a = 0 \qquad a' = 1$$

Diese Zuordnung wird in der Schaltalgebra stillschweigend vorausgesetzt, indem in der Regel nur die stabilen Relaiszustände betrachtet werden. Während der Schaltzeiten ist diese Zuordnung aber gestört; doch gehen die unstabilen Zustände immer ohne äusseres Dazutun in den naheliegenden stabilen Zustand über, sofern man von Spezialitäten, wie Haftrelais oder Fehlstromerregung, absieht.

Die Variablen *a* und *a'* sind *Komplemente* zueinander, das heisst in den angenommenen Zuständen 1, 0 stets einander entgegengesetzt.

Man findet die algebraische Transmissionsfunktion *zusammengesetzter Netzwerke*, indem man nun der Parallelschaltung das logische Verknüpfungszeichen + (oder V in der rein mathematischen Schaltalgebra) und der Serieschaltung das Zeichen · (&) zuordnet. Diese beiden Schaltungen, die ODER und die UND-Schaltung, bilden zusammen mit der NICHT-Schaltung die drei wichtigen *logischen Grundschaltungen*, mit denen sich alle, auch komplexe, Verknüpfungsaufgaben zwischen Eingangs- und Ausgangsvariablen einer Schaltung lösen lassen.

Die Beispiele in der obern Hälfte der *Tafel III* zeigen wie sich in den algebraischen Ausdrücken die Struktur der zugehörigen Serie-Parallel-Netzwerke widerspiegelt.

Bei *Brückennetzwerken* versagt die direkte Umsetzung des Netzwerkes in eine algebraische Strukturformel, da nicht mehr reine Serie- und Parallelschaltung vorliegt. Es lässt sich aber ein äquivalentes Serie-Parallelnetzwerk angeben, das dadurch entsteht, dass man alle möglichen Durchgangswege zwischen Eingangs- und Ausgangsklemme aufzählt und dann parallel schaltet. Brückennetzwerke zeichnen sich durch kleinen Aufwand aus, so dass sie mit Vorteil angestrebt werden [4, 6, 10]. Das in den Abschnitten 6 und 7 beschriebene Vereinfachungsverfahren besitzt den wesentlichen Vorteil, dass es automatisch zu Brückenschaltungen führt, wenn solche möglich sind.

Die abwerfende Aktion von *Shunt-Netzwerken* wird mit dem Verknüpfungszeichen Minus dargestellt, dem die logische Aussage «wenn nicht», «sofern nicht», «falls nicht» zugeschrieben werden kann [4, 10]. Beispiele finden sich in Tafel III unten. Das Rechnen mit der Subtraktion schaltalgebraischer Grössen ist wegen der dabei nötigen ungewöhnlichen Rechenregeln selten; ausserdem kann aus der Beziehung

$$X = a - b = ab' = a\,(1 - b)$$

und auch durch Überlegung erkannt werden, dass ein Shunt-Netzwerk durch sein Komplement im Aufzugskreis ersetzt werden kann.

4. Rechenregeln der Schaltalgebra

Beschränkt man sich auf die Verknüpfungen ODER und UND, dann sind die schaltalgebraischen Rechenregeln sehr einfach und entsprechen mit einigen wenigen Ausnahmen der gewöhnlichen Algebra.

Man unterscheidet *Postulate* und *Theoreme*. Voraussetzungen oder Postulate legen fest, wie mit den Werten 0 und 1 gerechnet wird. Dabei ist zu bedenken, dass 0 und 1 hier Zustände eines Organs oder eines Schaltkreises darstellen und nicht etwa mit den Binärwerten 0, 1 des dualen Zahlensystems identisch sind. Die Richtigkeit der in *Tafel IV* dargestellten Postulate lässt sich leicht nachprüfen, wenn man 0 mit Leerlauf, 1 mit Kurzschluss in einem Netzwerk einsetzt und die resultierende Transmission prüft.

Beispiel:

$1 + 1$ entspricht der Parallelschaltung eines Kurzschlusses mit einem andern, was eine leitende Verbindung bleibt, also ist $1 + 1 = 1$.

Theoreme mit einer oder mehreren Variablen lassen sich aus den Postulaten und aus bereits bekannten und bewiesenen Theoremen ableiten. Alle Theoreme lassen sich ferner durch die Methode der «*perfect induction*» bestätigen, die auf der vollständigen Kombinationstabelle oder Wertetafel beruht [2]. Der Beweis für die Richtigkeit eines bestimmten Theorems ist erbracht, wenn für alle 2^n Kombinationsmöglichkeiten von n Variablen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der gleiche Wert 0 oder 1 erscheint.

Beispiel: Theorem (13')

Wertetafel x	y	linke Seite x'	$x'y$	$x+x'y$	rechte Seite $x+y$
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1*	1*

* = identisch für alle 4 Kombinationen von x und y

Von besonderem Interesse ist das Theorem von *De Morgan* (18, 18') das erlaubt, ein gegebenes Netzwerk aus parallelen oder seriegeschalteten Teilen in das inverse oder Komplementärnetzwerk zu verwandeln, also in eines, das in allen Kombinationsfällen die entgegengesetzte Transmissionsfunktion aufweist.

Die Entwicklungssätze (19, 19') gestatten, eine bestimmte Variable aus der Transmissionsfunktion zu extrahieren, so dass sie nachher höchstens je einmal als x und x' erscheint. Praktisch bedeutet dies, dass man ein gegebenes Kontaktnetzwerk so in ein äquivalentes Netzwerk umformen kann, dass das Relais X höchstens einen Umschaltkontakt erhält. Dies kann zum Beispiel bei polarisierten Relais zwingend sein.

Extrahiert man nacheinander sämtliche Variablen gemäss Theorem (19), so erhält man die sogenannte *Standardsumme* (oder Disjunktive Normalform, vergleiche dazu *Tafel V*) einer Transmissionsfunktion. Nach (19') entwickelt, resultiert das *Standardprodukt* (oder Konjunktive Normalform).

5. Darstellung von Transmissionsfunktionen

Das Verhalten eines zweipoligen Kontaktnetzwerkes (offen oder geschlossen) in Funktion der beteiligten Variablen, das heisst seine Transmissionsfunktion, kann mathematisch auf verschiedene Weise dargestellt werden.

Die *Minimalsumme* enthält keinerlei redundante Grössen, sondern nur jene Ausdrücke, die für das richtige Arbeiten des Netzwerkes nötig sind. Sie liefert denn auch das einfachste Serie-Parallel-Netzwerk, wenn man die Formel gemäss der Symbolik in Tafel II unten umsetzt. *Figur 1* zeigt ein Beispiel.

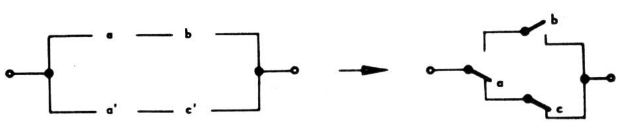


Fig. 1

Die schon erwähnte *Standardsumme* weist wegen der von ihr geforderten Normalform eine starke Redundanz auf, wollte man sie direkt in ein Serie-Parallel-Netzwerk umsetzen. Dies ist sinnlos, obwohl das entstehende Netzwerk keine falsche Funktion ausüben würde. Die Standardsumme erhält ihre Berechtigung vor allem als Ausgangsbasis füs das später zu besprechende Vereinfachungsverfahren.

In der vollständigen *Kombinationstabelle* (vergleiche Tafel V) wird für die 2^n Kombinationsfälle von n Variablen jeweils in der Kolonne T angegeben, ob das betreffende Netzwerk leitet (1) oder sperrt (0). So ist das im Beispiel in Tafel V erwähnte Netzwerk offen für den Fall, dass a allein $= 1$ ist ($a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, oder anders geschrieben: $abc = 100$), wie im einfachen Schema sofort nachgeprüft werden kann. Die Kombinationstabelle stellt gleichsam das Pflichtenheft des Netzwerkes dar, das vorschreibt, wie sich dieses in allen möglichen vorkommenden Fällen zu verhalten habe. Die Tabelle enthält stets gleich viele Zeilen mit $T = 1$ wie die zugehörige Standardsumme Summanden (Terme) hat; man findet die gegenseitige Zugehörigkeit sofort, wenn man in der Tabelle in der Kolonne einer Variablen, zum Beispiel b, eine Null setzt, wenn im entsprechenden Term das b' gestrichen erscheint und eine 1, wenn b direkt erscheint.

Also entsprechen sich:

abc	1	1	1
abc'	1	1	0
$a'bc'$	0	1	0
$a'b'c'$	0	0	0

Da das Aufstellen einer vollständigen Kombinationstabelle bei mehreren Variablen bald eine ansehnliche Zeilenzahl ergibt, ist es zweckmässiger, die Zeilen eindeutig zu numerieren und dann in einer symbolischen Schreibweise diejenigen Nummern aufzuzählen, bei denen $T = 1$ wird. Man nimmt dazu gerade die Dezimaläquivalente (DÄ) der Binärzahlen, die sich in den betreffenden Zeilen präsentieren. Die Bildung der DÄ geht aus Tafel V hervor.

Eine besondere Darstellungsform bildet das *Karnaugh-Diagramm*, das nach bestimmten Regeln gestattet, auf graphischem Wege Netzwerke zu vereinfachen [2]. Es enthält soviel Felder wie Kombinationsmöglichkeiten, hier also 8, und die Felder sind auch hier eindeutig zugeordnet. Das untere Feld rechts aussen stellt also beispielsweise den Fall $abc = 110$ dar. Da in diesem Fall $T = 1$ wird, enthält das Feld eine 1 eingeschrieben. Das Vereinfachungsverfahren, für dessen näheres Studium auf den Literaturhinweis verwiesen sei, besteht darin, möglichst viele 1-Felder zu grössern Rechteck- oder Quadratflächen zusammenzufassen, wobei es sich zeigt, dass gewisse Variablen als unwesentlich ausscheiden. Vergleicht man etwa die beiden nebeneinanderliegenden Felder rechts unten, so wird augenfällig, dass $T = 1$ bleibt, was auch c sein mag, sofern $a = 1$ und $b = 1$. Die beiden Terme $abc + abc'$ können also vereinfacht werden zu ab. Diese Vereinfachung ergibt sich auch rein algebraisch aus den Theoremen (15) und (10):

$$T = ab\,\underbrace{(c+c')}_{1} = ab \cdot 1 = ab$$

Eine weitere Darstellungsform bedeutet die *Normalkontaktpyramide* nach *Tafel VI* oben, die man durch fortgesetzte Anwendung des Entwicklungssatzes, Theorem (19), erhält. Die hier dargestellte Pyramide gilt für 3 Variablen a, b, c. Setzt man unter Beachtung der eingeschriebenen Vorschrift eine beliebige T-Funktion, in unserem Beispiel $ab + a'c'$, in alle Rechteckkästchen ein, dann sieht man, dass genau so viele Kästchen leitend werden wie Standardsummen-Terme vorliegen, und zwar sind es diejenigen Kästchen-Nummern, die den DÄ in der symbolischen Schreibweise entsprechen.

Das oberste Rechteck fordert zum Beispiel, dass man beim Einsetzen der Funktion $ab + a'c'$ die Vorschrift beachte: $abc = 111$. Damit wird $ab = 1 \cdot 1 = 1$ und $a'c' = 0 \cdot 0 = 0$, somit $ab + a'c' = 1$; also leitet der oberste Ast. Die Ziffer 7 ist denn auch in der Form $T = f\,(a,b,c) = \sum\,(0,\ 2,\ 6,\ 7)$ enthalten.

Analog lässt sich zeigen, dass die Rechtecke 0, 2, 6 ebenfalls leiten. Lässt man nun von der Normalpyramide alle diejenigen Teile weg, die auf ein sperrendes Rechteck hinführen (sie werden dadurch gegenstandslos), dann erhält man direkt ein vereinfachtes Netzwerk, das bereits auf die federsparenden Umschaltkontakte tendiert.

Kennt man also von einer T-Funktion die Summe der DÄ, dann kann man sofort ein Netzwerk auf der Basis der Pyramide zeichnen.

6. Verwendung der Dezimaläquivalente als Leitzahlen in einer numerisch-graphischen Netzwerk-Vereinfachungsmethode

Da in der Mehrzahl der Fälle nur Teile der Kontaktpyramide (Tafel VI) am gesuchten Netzwerk beteiligt sind, bedeutet es unnötige Arbeit, wenn zuerst die ganze Pyramide angedeutet, dann aber wieder ein Teil davon weggelassen werden soll.

Man kann direkt auf die unbedingt nötigen Teile hinsteuern, wenn man die DÄ als *Leitzahlen* verwendet, die an jeder Verzweigungsstelle angeben, welchen Ast man belegen muss, um zum richtigen der hier total acht Ausgangsäste zu gelangen [8]. Man verwendet dazu wieder die Gewichte der Variablen $a \triangleq 4$, $b \triangleq 2$, $c \triangleq 1$. An der ersten Verzweigung zu a/a' scheidet man die vorhandenen DÄ in die beiden Gruppen $\geqq 4$ und < 4, führt alle DÄ ≥ 4 dem Ast a zu und diejenigen < 4 dem Ast a'. In den beiden Verzweigungen b/b' wiederholt sich der Vorgang, wobei nur noch Leitzahlen < 4 auftreten. Das Verfahren enthält nämlich die Vorschrift, dass beim Passieren der ungestrichenen Variablen a deren Wertigkeit von den Leitzahlen zu subtrahieren sei. Dies entfällt bei der gestrichenen Variablen a'. Tafel VI zeigt unten das Vorgehen, das dann abgeschlossen ist, wenn nur noch Nullen herauskommen. Alle mit 0 bezifferten Äste sind anschliessend zusammenzufassen und mit dem Ausgang zu verbinden. Für das gewählte Beispiel $T = \mathrm{f}(a,b,c,) = \sum (0, 2, 6, 7)$ ergibt sich also zunächst die Entwicklung nach *Figur 2*.

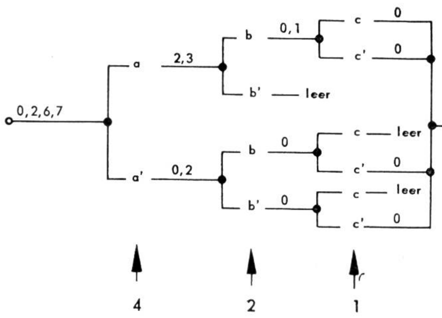


Fig. 2

Einige Äste sind als leer angeschrieben, weil für diese keine Leitzahlen vorliegen. Das Netzwerk enthält nur diejenigen vier Äste zum Ausgang, die den Ziffern 0, 2, 6, 7, in Tafel VI oben entsprechen. Die andern vier figurieren nicht mehr im Netzwerk. Das Netzwerk ist demnach schon bei der Entstehung auf möglichst einfache Form gebracht worden; trotzdem weist es noch nicht die Minimalform auf. Man sieht zum Beispiel, dass man vom Ast 0, 1 immer zum Ausgang gelangt, unbekümmert um den Zustand der Variablen c. Ist nämlich $c = 1$, dann leitet der oberste Ast, mit $c = 0$ ist $c' = 1$, folglich leitet der zweitoberste Ast. Es ist also die Parallelschaltung von c und c' immer ein Kurzschluss, was auch im Theorem (10) zum Ausdruck kommt.

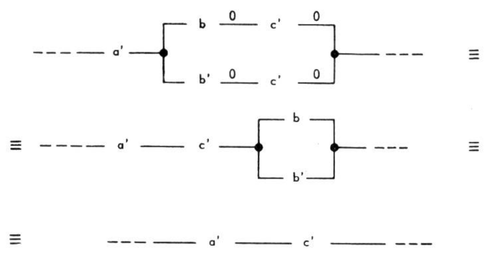


Fig. 3

Weiter sind die Aequivalenzen nach *Figur 3* leicht einzusehen, so dass das fertige Netzwerk genau der Figur 1 und damit der Minimalsumme entspricht.

Das hier gewählte Beispiel ist natürlich sehr einfach aufgebaut, so dass bei Kenntnis der algebraischen Form $T = ab + a'c'$ der Vorteil der Vereinfachungsmethode mit Hilfe der Leitzahlen nicht augenfällig wird. Die grossen Vorzüge dieser Methode werden erst dann sichtbar, wenn eine komplizierte Transmissionsfunktion vorliegt, etwa

$$T = [ab\,(cd' + c'd) + b'\,(ef' + ac'd)]\cdot c$$

von der man zudem noch nicht weiss, ob sie eine Minimalsumme darstellt. Es ist ferner möglich, die algebraischen Formen ganz zu meiden, wenn aus der Aufgabenstellung das Pflichtenheft eines Netzwerkes direkt aufgestellt wird und aus diesem die DÄ entnommen werden.

Eine ähnliche Vereinfachungsmethode ist in [3] beschrieben.

7. Vereinfachungsregeln

Das beschriebene Verfahren liefert nur dann weitgehend vereinfachte Netzwerke, wenn einige zusätzliche Regeln nach *Tafel VII* angewendet werden. Da es zu weit führen würde, im Rahmen dieses Artikels die Beweise für die Zulässigkeit der Regeln einzeln zu erbringen, seien diese nur knapp kommentiert:

1) sagt aus, dass man einen Kontakt als überflüssig kurzschliessen kann, wenn die dahinter folgenden DÄ (das heisst die Restfunktion oder das Residuum) in jenem des andern Zweiges vollständig enthalten sind. Die deckenden DÄ werden bei Ausnützung dieser Vereinfachungsmöglichkeit durch Querstrich markiert.

2) sagt aus, dass man gleichlautende Residuen vereinigen darf.

3) legt fest, wie man überstrichene Residuen behandelt. Nach einer Vereinigung erhalten nur diejenigen DÄ den Querstrich, die bereits vor der Vereinigung in beiden Ästen überstrichen erschienen. Enthält ein Ast nur noch lauter überstrichene DÄ, dann ist er belanglos und kann weggelassen werden. Eine Ausnahme von dieser Regel wird gemacht, wenn der betreffende Ast mit einem andern so vereinigt werden kann, dass die Form $b + b' = 1$ = Kurzschluss resultiert, wodurch gleich zwei Kontakte wegfallen.

4) macht auf die Kriechweggefahr aufmerksam, das heisst auf unerwünschte Nebenwege durch das Netzwerk, wenn die Regel 1) zweimal nacheinander oder mit 2) zusammen angewendet wird. Kriechwege müssen durch Kontrolle des fertig entwickelten Netzwerkes aufgespürt und eliminiert werden.

5) zeigt schliesslich, dass der gleichlautende Kontakt in beiden Ästen vor die Verzweigung verlegt werden kann.

8. Beispiele für Netzwerksynthese

Mit der soeben besprochenen Netzwerk-Vereinfachungsmethode lässt sich nun jedes beliebige Zweipolnetzwerk in kurzer Zeit aufbauen, wobei man von der Kombinationstabelle (Tafel V) ausgeht, die die Funktion des Netzwerkes genau vorschreibt. Es genügt, wenn man nur jene Kombinationen einschreibt, für welche $T = 1$ sein soll, da nur für diese die DÄ als Leitzahlen verwendet werden. Für das erste Beispiel in *Tafel VIII*, ein Netzwerk, das nur leiten soll, wenn von vier Relais beliebige zwei aufgezogen haben, sind also systematisch die sechs möglichen Kombinationen zu verwenden, die je Zeile genau zwei Einsen und zwei Nullen aufweisen. Das bereinigte Netzwerk enthält lauter Umschaltkontakte; seine korrekte Funktion kann leicht überprüft werden.

Bei den praktisch vorkommenden Problemen, bei denen Eintaktschaltungen auftreten, sind sehr oft zwei oder sogar mehrere Ausgänge zu steuern. Man hat dann ein Interesse daran, Variablen, die an beiden Ausgangsfunktionen beteiligt sind, durch Kontakte darzustellen, die beiden Ausgängen gemeinsam dienen können.

Die beschriebene Methode eignet sich mit einer kleinen Modifikation auch zur Behandlung von Schaltungen mit mehreren Ausgängen [9]. Als Beispiel ist ein Elementar-Addierwerk in Relaistechnik dargestellt, das die Addition zweier Binärziffern A, B ausführt und die zu berücksichtigenden Überträge aus einer allfällig vorangehenden und in die nächsthöhere Binärstelle ebenfalls behandelt. Die Schaltung weist also drei Eingänge und zwei Ausgänge auf. Die Kombinationstabelle zeigt das Pflichtenheft des Addierwerkes. Zu den beiden normalen Summanden A, B tritt der Übertrag $\ddot{U}_1$ hinzu; alle drei Ziffern sind zu addieren. Beispielsweise ist das Rechnungsergebnis

$$(A = 0)+(B = 0)+(\ddot{U}_1 = 0)$$

natürlich auch 0, also muss in der Kolonne für die Summe S eine 0 stehen, und ein Übertrag $\ddot{U}_2$ kommt ebenfalls nicht in Frage.

Ist aber etwa die Summe zu bilden

$$(A = 1) + (B = 0) + (\ddot{U}_1 = 1)$$

also $$1 + 0 + 1 = 2,$$

dann muss man $S = 0$, $\ddot{U}_2 = 1$ setzen, («schreibe 0, behalte 1»), da die Ziffer 2 im Binärsystem nicht existiert und alles, was über 1 hinausgeht, bereits die nächsthöhere Stelle speist.

Schaltungstechnisch wird die Aufgabe dadurch gelöst, dass man das Netzwerk umdreht, mit der Vereinfachungsmethode an den beiden Ausgängen beginnt und gegen den gemeinsamen dritten Pol, den Eingang, hin entwickelt. Die beiden Anfangsäste S beziehungsweise $\ddot{U}_2$ erhalten dabei nur jene DÄ als Leitzahlen, denen in der fraglichen Tabellenkolonne (S beziehungsweise $\ddot{U}_2$) eine 1 gegenübersteht. Die Entwicklung führt dann zum dargestellten bereinigten dreipoligen Ausgangsnetzwerk, wobei an zwei Stellen auf die Vereinfachungsregel 1) gemäss Tafel VII verzichtet werden muss, um nicht Kriechwege ins Netzwerk zu bekommen.

Sehr oft ergeben sich weitere Vereinfachungsmöglichkeiten, indem man die Wertigkeiten der Variablen umstellt oder für eine Ausgangsfunktion in Kombinationsfällen nach Belieben eine 0 oder eine 1 wählt, die infolge der äussern Rahmenbedingungen überhaupt nicht auftreten können.

9. Folgeschaltungen

An einem einfachen Beispiel soll gezeigt werden, wie Folgeschaltungen zu behandeln sind, also jene Schaltungen, bei denen die zeitliche Reihenfolge der Eingangswirkungen die Ausgangswirkung mitbestimmt.

Es sei ein *Richtungsdiskriminator* zu entwerfen, der an einem Ausgang Z_1 Impulse liefert, wenn an zwei Eingängen A, B sich überlappende Impulse so angelegt werden, dass zuerst A beaufschlagt wird. Ist die Folge zeitlich umgekehrt, also B, A, dann sollen die Ausgangsimpulse an einem andern Ausgang Z_2 erscheinen.

Das Pflichtenheft der Schaltung als Folgediagramm muss alle möglichen Ereignisse aufzählen *(Figur 4)*.

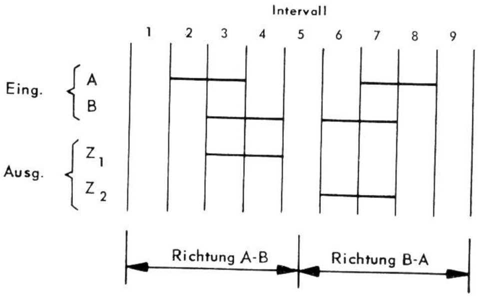


Fig. 4

Es ist offensichtlich, dass diese Vorschrift mit einer reinen Kombinationsschaltung nicht erfüllt werden kann, da die Eingangskombination beispielsweise in den beiden Intervallen 3 und 7 dieselbe ist ($A = 1$, $B = 1$), die Ausgangswirkung aber anders sein soll. Das Analoge gilt für die Intervalle 4 und 6 ($A = 0$, $B = 1$).

Ein neues Element, das Sekundärrelais X (vergleiche Tafel I), muss in diesem Geschehen so operieren, dass die Intervalle 3 von 7 und 4 von 6 unterschieden werden können. Dies ist möglich, wenn X über die Intervalle 2, 3, 4 aufgezogen ist, nicht aber während 6 und 7. Bei Intervall 8 ist die Aktion von X belanglos, da dort keiner der Ausgänge aktiv sein soll. Man kommt somit auf das Diagramm gemäss *Figur 5*.

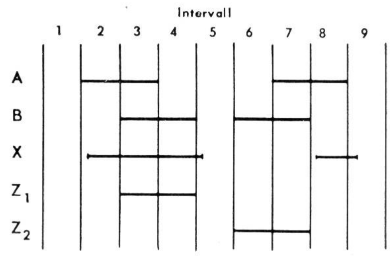


Fig. 5

Beide Ausgänge sollen zu ihrer Zeit aktiv sein, solange der Eingang B aktiv ist. Mit Hilfe des Relais X kann nun zwischen Z_1 und Z_2 unterschieden werden *(Figur 6)*.

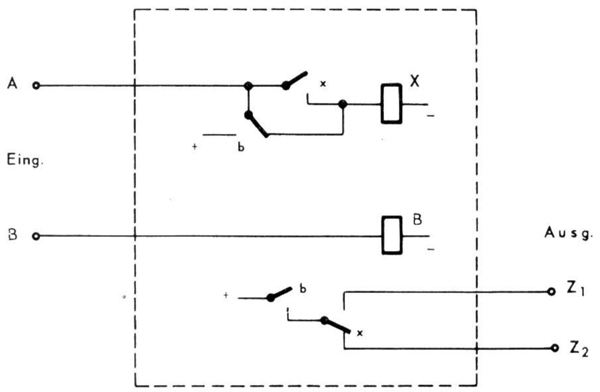


Fig. 6

Die zeitliche Verschiebung der X-Aktion gegenüber den Intervallgrenzen markiert die Schaltzeiten des Relais X, dessen *Steuerfunktion* nun noch anzugeben bleibt. Diese setzt sich aus zwei parallel zu schaltenden Teilen zusammen:

- Die *Aufzugsfunktion* beginnt mit Intervall 2 beziehungsweise 8; sie lautet $X = ab'$, das heisst $X = 1$, wenn $a = 1$ und $b = 0$.
- Die *Haltefunktion* gewährleistet die fortdauernde Erregung von X über die Intervalle 3 und 4, dies auch, nachdem die Aufzugsbedingung aufgehört hat. Die Haltefunktion enthält immer den eigenen Haltekontakt x in Serie. Sie kann rein formal auf Grund des Diagramms abgeleitet werden; im vorliegenden einfachen Beispiel ist sie augenfällig: X hält sich an A oder an B, so dass zu setzen ist: $X = x\,(a + b)$.

Die vollständige Steuerfunktion lautet dann:

$$X = ab' + x(a+b)$$

Das Relais A könnte eingespart werden, wenn die Variable a nur einfach erscheinen würde. Statt einem Arbeitskontakt a kann dann die Eingangsklemme A selbst dessen Funktion übernehmen.

Man erhält nach der Ausmultiplikation:

$$X = ab' + ax + bx$$

und nach Beifügen von $bb' = 0$, was zulässig ist:

$$X = ab' + ax + bx + bb' = (a + b)\,(b' + x)$$

Es liegt hier der interessante Fall vor, dass durch Anhängen weiterer Buchstaben ein algebraischer Ausdruck schliesslich wesentlich einfacher wird (vier statt sechs Buchstaben). Die vollständige Schaltung erhält also die Form nach Figur 6.

10. Logische Verknüpfung mit elektronischen Gatterbausteinen

Die Logikfunktionen ODER, UND bilden nur einen kleinen Ausschnitt aus der Vielzahl der möglichen logischen Verknüpfungen. Mit zwei Variablen lassen sich die insgesamt sechzehn Logikfunktionen nach *Tafel IX* unterscheiden, von denen allerdings einige als Spezialfälle (wie Leerlauf und Kurzschluss) eher als entartete logische Verknüpfungen zu bezeichnen sind. Auch die Funktionen y_3, y_5, y_{10}, y_{12} sind insofern entartet, als das Ergebnis nur vom Zustand der einen Variablen allein abhängt.

Für die wichtigsten Logikfunktionen sind im Laufe der Zeit sehr unterschiedliche graphische Symbole eingeführt worden, die leider eine einheitliche Norm vermissen lassen. Es ist zu begrüssen, dass Versuche unternommen werden, die Symbole zu vereinheitlichen [11].

Wie Schaltkreisprobleme mit elektronischen Bauelementen grundsätzlich zu lösen sind, ist von verschiedenen Autoren bereits erläutert worden [5, 13]. Die Struktur einer Schaltung wird am besten über die algebraische Ausdrucksweise gefunden. Wie das folgende Beispiel zeigt, erhält man aus der Kombinationstabelle zunächst die Ausgangsfunktionen als Standardsumme, die algebraisch vereinfacht als Minimalsumme direkt auf die einzusetzenden Gatterbausteine hinweist.

Es sei eine einfache kontaktlose Schaltung zu entwerfen, die an drei Eingängen je eine bejahende (1) oder verneinende (0) Zustandsmeldung empfängt und am Ausgang folgende Auswertung abgibt: Wenn mehr bejahende als verneinende Eingangsmeldungen eintreffen, dann soll der Ausgang die Allgemeintendenz «ja» abgeben und umgekehrt.

A (a)	B (b)	C (c)	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Z = a'bc + ab'c + abc' + abc$$
$$= (a'b + ab')\,c + ab$$

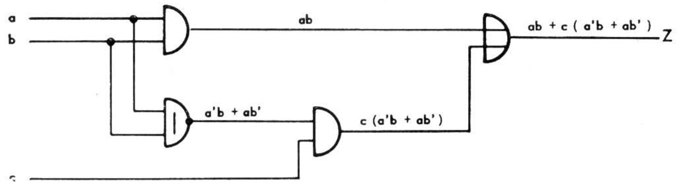


Fig. 7. Beispiel einer Kombinationsschaltung aus kontaktlosen Gatterbausteinen

Figur 7 zeigt den Lösungsgang mit Symbolen zusammengesetzter Logikfunktionen und *Figur 8* zwei mögliche Lösungen für die Bildung der Teilfunktion $a'b + ab'$ aus den Grundbausteinen UND, ODER, NICHT.

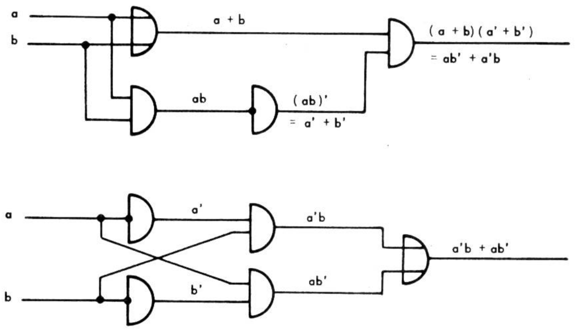


Fig. 8. Bildung der EXCLUSIV ODER – Funktion aus den Grundschaltungen

Von den praktisch vorkommenden Schaltkreisproblemen können mit *Dioden-Toren* allein nur wenige gelöst werden, da Dioden nur UND sowie ODER-Verknüpfungen zulassen. Dioden-Tore können ausserdem nicht ohne weiteres in Kaskade geschaltet werden und bedürfen der Zwischenverstärker. Dagegen kann man sie in Form einer Matrix mit Vorteil für Codewandler anordnen *(Tafel X)*, sofern die negierten Variablen zur Verfügung stehen.

Transistor-Tore (Tafel XI) werden in der sogenannten RTL-Technik (Resistor-Transistor-Logic, eine Spezialform der Gleichstromlogik) sehr einfach und übersichtlich.

Sie haben den wesentlichen Vorteil, dass sie zugleich als Leistungsverstärker dienen und deshalb bei passender Dimensionierung in Kaskade angeordnet werden können. Ein Torausgang kann somit, wenn nötig, auch die Eingänge mehrerer verschiedener nachfolgender Tore speisen (als fan-out-Charakter bezeichnet). Sie gestatten ausserdem den Bau von Logikfunktionen, die über die einfachen Grundfunktionen hinausgehen. So werden häufig die Verknüpfungen y_2 und y_4 oder y_8 verwendet, die mit Transistoren in einer einzigen Stufe realisiert werden können. Verschiedene Firmen gehen sogar so weit, dass sie nur mit den Nor-Toren arbeiten und durch Kombination dieser Bausteine rückwärts die Grundfunktionen bilden, wenn dies nötig ist (vergleiche Tafel XI rechts unten). Dass dabei Eingänge unbenützt bleiben müssen, kann in Kauf genommen werden, weil es immer noch günstiger ist, grosse Serien eines Bausteins zu fertigen als verschiedene Typen zu verwenden. Mit der Mikroelektronik, bei der ganze Schaltkomplexe auf einem einzigen Halbleiterplättchen basieren, kann man sich unbenützte Teile ohne weiteres leisten.

Um die Funktion der gezeichneten Transistor-Tore zu verstehen, muss man die Potentialfestlegung in Tafel XI oben beachten. Für die beiden Zustände «0» beziehungsweise «1» sind Potentialbereiche mit einer gewissen Breite erforderlich, da ein leitender Transistor zwischen Kollektor und Emitter immer noch die Sättigungsspannung von etwa 0,1...0,2 V aufweist. Besonders bei Kaskadenschaltungen kann deshalb an den letzten Ausgängen nicht mehr mit den Grenzwerten 0 V beziehungsweise —6 V gerechnet werden.

Mit elektronischen Halbleiterbausteinen können ebenfalls Folgeschaltungen realisiert werden. Die Gedächtnisarbeit eines selbsthaltenden Relais wird dabei von einem Transistor-Flip-Flop übernommen, der als bistabiler Multivibrator zwei diskrete Kipp-Endstellungen einnehmen und aus diesen durch Potentialsprünge an den Steuereingängen umgekippt werden kann [5].

Kurzzeitige Speicherung einer binären Grösse ist im monostabilen Multivibrator möglich, einer Einrichtung, die, von aussen gekippt, nach einer bestimmten Zeit wieder in die Vorzugslage zurückklappt. Bei all diesen Multivibratoren sind die Zustände 0, 1 als Potentiale an den Kollektorklemmen greifbar.

Bei Anlagen, in denen Gedächtnisaufgaben vorherrschen, werden besonders entwickelte Informationsspeicher (zum Beispiel Magnettrommel-, Magnetkern-, Magnetband-, Dünnschicht- und elektrostatische Speicher) eingesetzt, da die Flip-Flop-Schaltungen zu viele Bauelemente und zu grosse Volumen erfordern würden.

Literaturverzeichnis

Bücher:

[1] *Keister W., Ritchie A. E., Washburn S. H.* The Design of Switching Circuits. Van Nostrand Comp., Princeton N.J., 1957.

[2] *Caldwell S.H.* Switching Circuits and Logical Design. John Wiley & Sons, New York, 1960.

[3] *Roginskij W.N.* Grundlagen der Struktursynthese von Relaisschaltungen. Verlag R. Oldenbourg, München, 1962.

[4] *Higonnet R.A., Grea R.A.* Logical Design of Electrical Circuits. McGraw-Hill Book Comp., New York, 1958.

[5] *Hahn R.* Digitale Steuerungstechnik. Franckh'sche Verlagshandlung, Stuttgart, 1961.

[6] *Fischer K.* Schaltalgebra, Beitrag in: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker, VI. Band. Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GmbH, Berlin, 1960.

[7] *Weyh, U.* Elemente der Schaltungsalgebra. Verlag R. Oldenbourg, München, 1961.

Zeitschriften:

[8] *Scheinman A.H.* A Numerical-Graphical Method for Synthesing Switching Circuits. A.I.E.E. Transactions, Communications & Electronics, Nr. 34 (1958), S. 687.

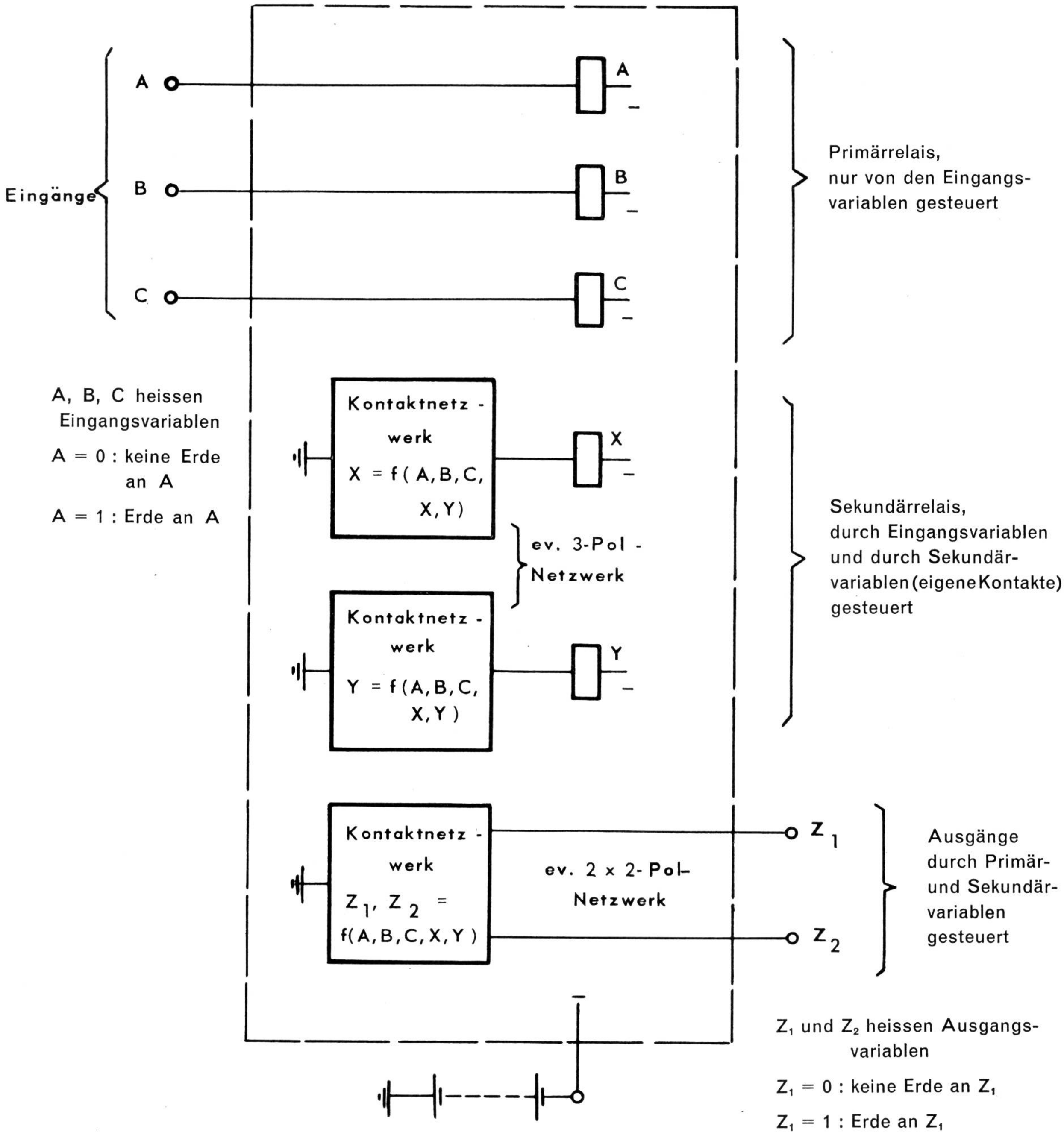
[9] *Scheinman A.H.* The Numerical-Graphical Method in the Design of Multiterminal Switching Circuits. A.I.E.E. Transactions, Communications & Electronics, Nr. 45, (1959), S. 515.

[10] *Dossogne M.* Procédés pratiques de synthèse des circuits de commutation. Revue H.F., 1959, Nr. 7, S. 157.

[11] *Rekowski.* Ein Vorschlag für einheitliche Symbole logischer Verknüpfungen. Nachr. techn. Zeitschrift, 1961, Nr. 7, S. 325.

[12] *Scheinman A.H.* A Method for Simplifying Boolean Functions. The Bell System Technical Journal, 1962, S. 1337.

[13] *Bühler H.* Einführung in die Technik der digitalen Rechenautomaten, 3. Teil. Der Elektroniker, 1962, Nr. 3, S. 35.



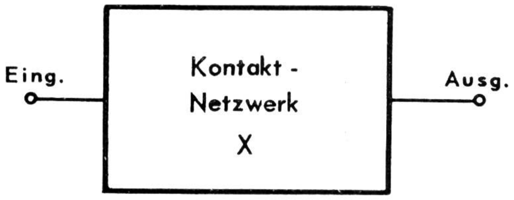
Kombinationsschaltung, Eintakt- oder Statische Schaltung:

Nur Primärrelais und Ausgangsnetzwerk vorhanden; für die Wirkung an den Ausgängen wird nur die Kombination der aktiven (geerdeten) Eingänge betrachtet, nicht aber die zeitliche Folge ihrer Aktion.

Folgeschaltung, Mehrtakt- oder Dynamische Schaltung:

Enthält im allgemeinen Fall Primär- und Sekundärrelais sowie das Ausgangsnetzwerk; die Wirkung an den Ausgängen ist sowohl von der Kombination der Eingangsvariablen als auch von der Reihenfolge ihrer Aktion abhängig. Folgeschaltungen ohne Primärrelais erzeugen eine wiederholte Folge von Ausgangswirkungen, sobald die Batterie angelegt wird.

Tafel I. Allgemeine Form einer Relaisschaltung

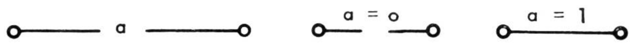


Ein Kontaktnetzwerk besteht im allgemeinen Fall aus einem oder mehreren Relaiskontakten verschiedener Relais oder Schalter. Das Netzwerk leitet oder sperrt, je nach der Kombination, in der die Relais erregt oder die Schalter betätigt sind.

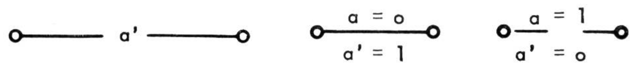
	Netzwerk	Funktion	
Transmissionskonzept	leitet	T = 1	X = 1
	sperrt	T = 0	X = 0
Hinderniskonzept	leitet	H = 0	
	sperrt	H = 1	

Das Transmissionskonzept ist praktischer und wird allgemein verwendet

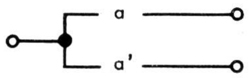
Arbeitskontakt auf Relais A:



Ruhekontakt auf Relais A:



Umschaltkontakt auf Relais A:

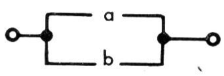


Wicklung des Relais A:

A = 1 : Relais erregt
A = 0 : Relais stromlos

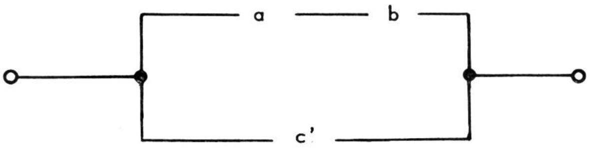
A = 1,	a = 0,	a′ = 1	unstabiler Zustand während Anzugszeit
A = 1,	a = 1,	a′ = 0	stabiler Zustand
A = 0,	a = 1,	a′ = 0	unstabiler Zustand während Abfallzeit
A = 0,	a = 0,	a′ = 1	stabiler Zustand

Logische Grundschaltungen und Verknüpfungszeichen:

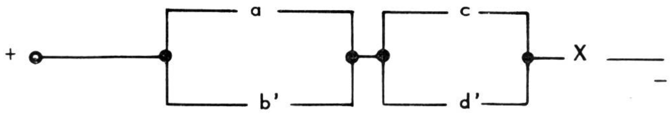
Bezeichnung	Netzwerk	Transmissionsfunktion	Bemerkung
ODER-Schaltung (Disjunktion)		T = a + b (a V b)	T = 1 wenn a **oder** b = 1 oder beide
UND-Schaltung (Konjunktion)		T = a · b (a & b)	T = 1 wenn a **und** b = 1
NICHT-Schaltung (Negation)		T = a′ ($\overline{a}$)	T = 1, wenn a = 0

Tafel II. Symbolik der Schaltalgebra

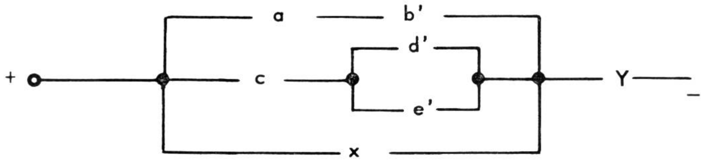
Serie-Parallel-Netzwerke



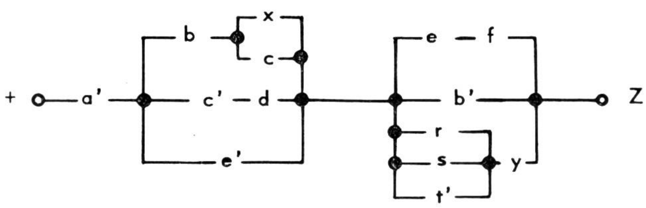
$T = ab + c'$



$X = (a + b')\ (c + d')$

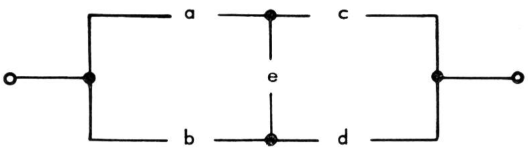


$Y = ab' + c\,(d' + e') + x$

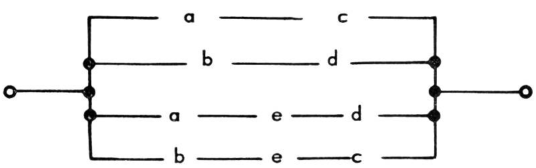


$Z = a'\,[b\,(c + x) + c'\,d + e'] \cdot$
$\cdot\,[ef + b' + y\,(r + s + t')]$

Brücken-Netzwerk

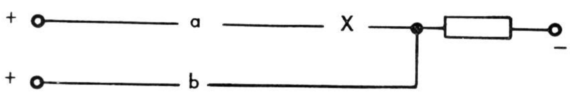


$T = ac + bd + aed + bec$

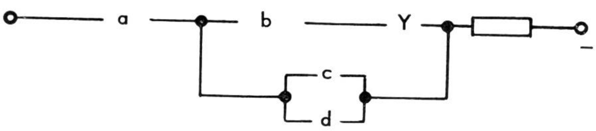


(Aequivalentes Serie-Parallel-Netzwerk,
nicht vereinfacht)

Schaltung mit Shunt-Netzwerk



$X = a - b$
($X = 1$ wenn $a = 1$ und **wenn nicht** $b = 1$)



$Y = a\,[b - (c + d)]$

Tafel III. Beispiele für Transmissionsfunktionen

Die nachfolgend aufgeführten Variablen X, Y, Z können den Zustand eines einzelnen Schaltelementes wie auch je von ganzen Netzwerken darstellen.

Voraussetzungen (Postulate)

$x = 0$ wenn $x \neq 1$	(1)	$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$	(4)
$x = 1$ wenn $x \neq 0$	(1′)	$0 + 1 = 1 + 0 = 1$	(4′)
$0 \cdot 0 = 0$	(2)	$0' = 1$	(5)
$1 + 1 = 1$	(2′)	$1' = 0$	(5′)
$1 \cdot 1 = 1$	(3)	Die paarweise zusammengefassten Voraussetzungen sind einander dual	
$0 + 0 = 0$	(3′)		

Theoreme mit 1 Variablen

$x + 0 = x$	(6)	$(x)' = x'$	(9)
$x \cdot 1 = x$	(6′)	$(x')' = x$	(9′)
$1 + x = 1$	(7)	$x + x' = 1$	(10)
$0 \cdot x = 0$	(7′)	$x \cdot x' = 0$	(10′)
$x + x = x$	(8)	x, x′ sind Komplemente zueinander	
$x \cdot x = x$	(8′)		

Theoreme mit 2 und 3 Variablen

$x + y = y + x$	(11)	$xy + xz = x (y + z)$	(15)
$xy = yx$	(11′)	$(x + y) (x + z) = x + yz$	(15′)
$x + xy = x$	(12)	$(x + y) (y + z) (z + x') = (x + y) (z + x')$	(16)
$x (x + y) = x$	(12′)	$xy + yz + zx' = xy + zx'$	(16′)
$(x + y') y = xy$	(13)	$(x + y) (x' + z) = xz + x'y$	(17)
$x + x'y = xy' + y = x + y$	(13′)		
$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$	(14)		
$xyz = (xy) z = x (yz)$	(14)′		

Theoreme mit n Variablen

$$(x + y + z + \ldots)' = x' \cdot y' \cdot z' \cdot \ldots \tag{18}$$

$$(x \cdot y \cdot z \cdot \ldots)' = x' + y' + z' + \ldots \tag{18'}$$

$$f (x, y, z \ldots) = x \cdot f (1, y, z \ldots) + x' \cdot f (0, y, z \ldots) \tag{19}$$

$$f (x, y, z \ldots) = [x + f (0, y, z \ldots)] \cdot [x' + f (1, y, z \ldots)] \tag{19'}$$

Tafel IV. Rechenregeln der Schaltalgebra

Entwicklung einer Transmissionsfunktion zur Standardsumme

Die Standardsumme (Disjunktive Normalform) einer Transmissionsfunktion enthält Summanden (Terme), von denen jeder alle vorkommenden Variablen oder deren Komplemente enthält. Man erhält sie durch Multiplikation aller Summanden mit $x + x' = 1$, die die Variable x oder x′ noch nicht enthalten, oder durch Anwendung des Theorems 19 auf alle Variablen.

Varianten der Darstellung einer Transmissionsfunktion

— Als Minimalsumme: $T = ab + a'c'$

— Entwickelt zur Standardsumme: $T = ab\,(c + c') + a'c'\,(b + b')$

$$= abc + abc' + a'bc' + a'b'c'$$

— Als vollständige Kombinationstabelle:

a 4	b 2	c 1	T	Dezimal- äqui- valente	a 4	b 2	c 1	T	Dezimal- äqui- valente
0	0	0	1	0	1	0	0	0	4
0	0	1	0	1	1	0	1	0	5
0	1	0	1	2	1	1	0	1	6
0	1	1	0	3	1	1	1	1	7

Jede Zeile mit $T = 1$ entspricht einem Summanden der Standardsumme. Die Dezimaläquivalente (DÄ) erhält man, indem man die Variablen a, b, c als Elemente eines Binärcodes mit den Gewichten oder Wertigkeiten 4, 2, 1 betrachtet und die Quersumme der Gewichte ermittelt.

— Als Summe von Dezimaläquivalenten, für die $T = 1$ wird:

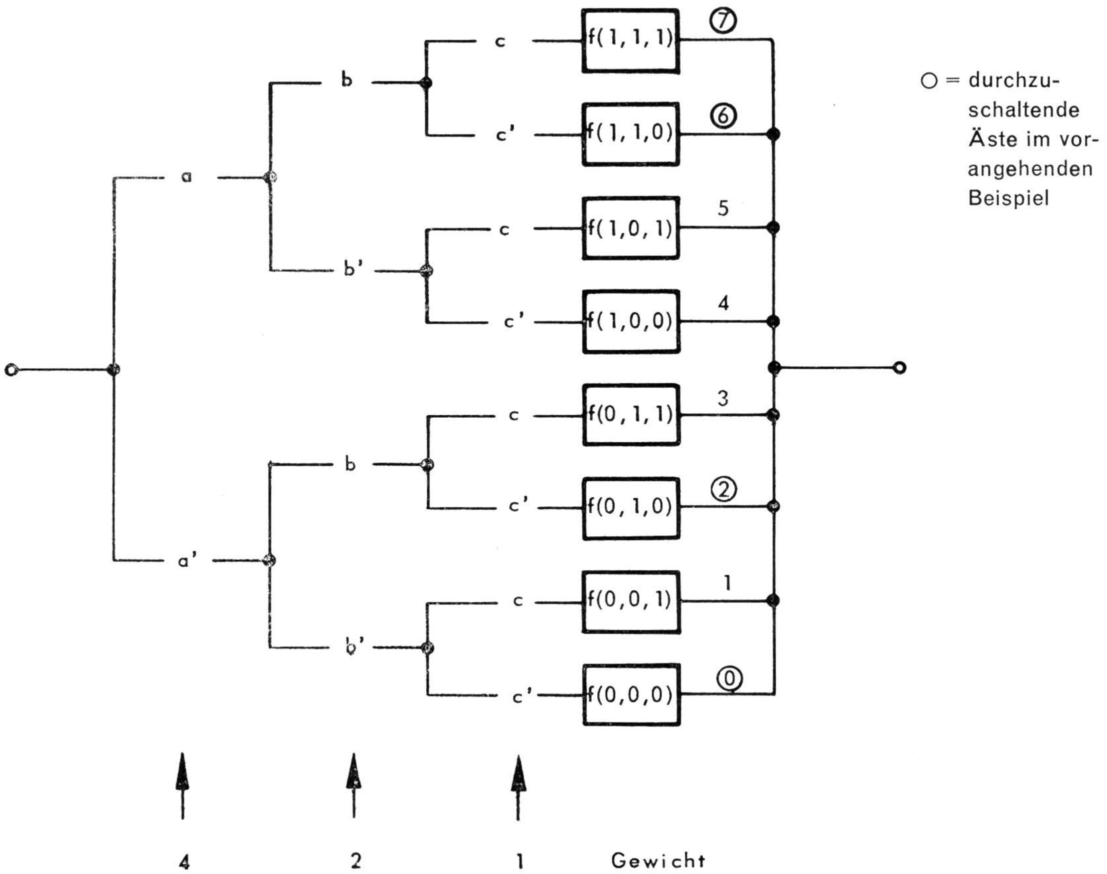
$$T = f\,(a, b, c) = \Sigma\,(0, 2, 6, 7)$$

— In graphischer Form (zum Beispiel als Karnaugh-Diagramm):

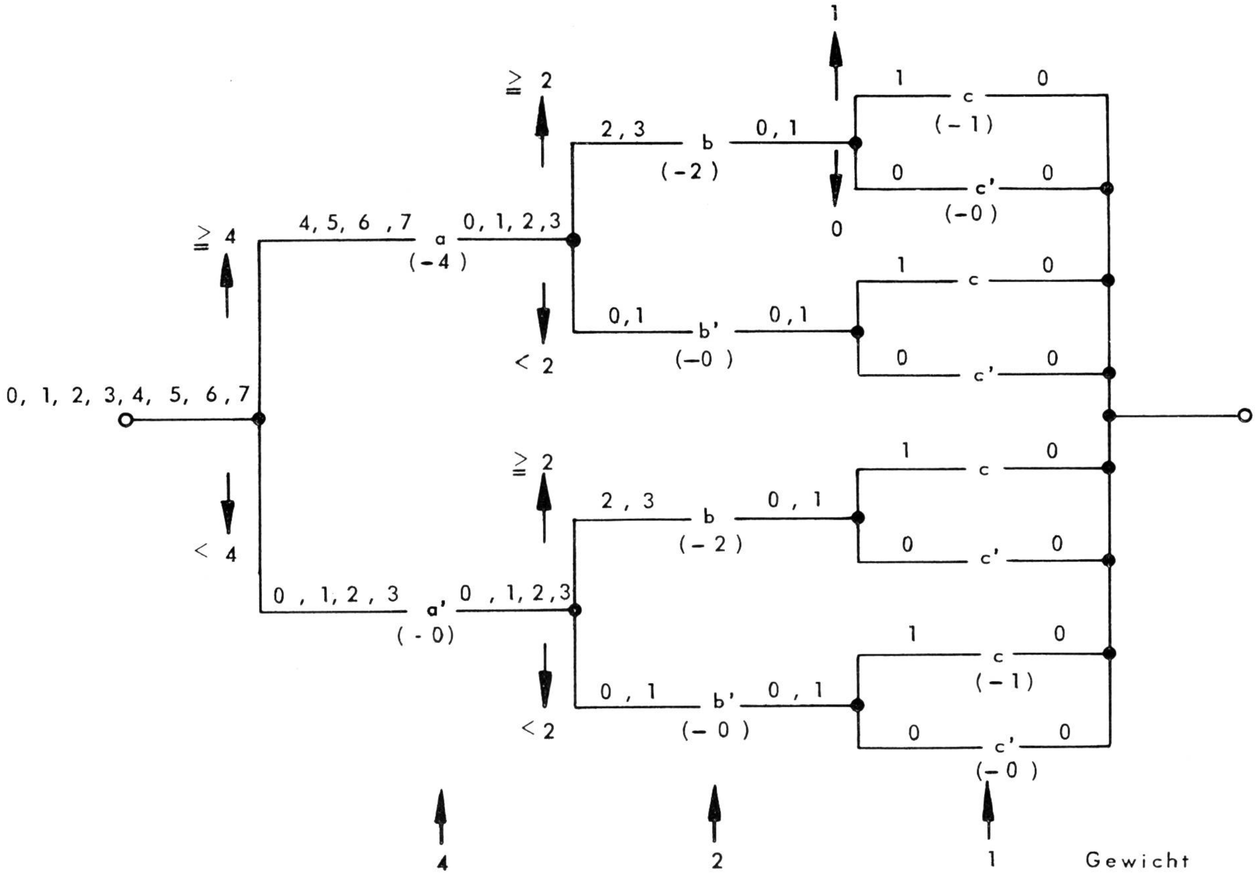
a \ b, c	00	01	11	10
0	1			1
1			1	1

— Als Kontaktpyramide mit teilweise unbenützten Zweigen (siehe Tafel VI)

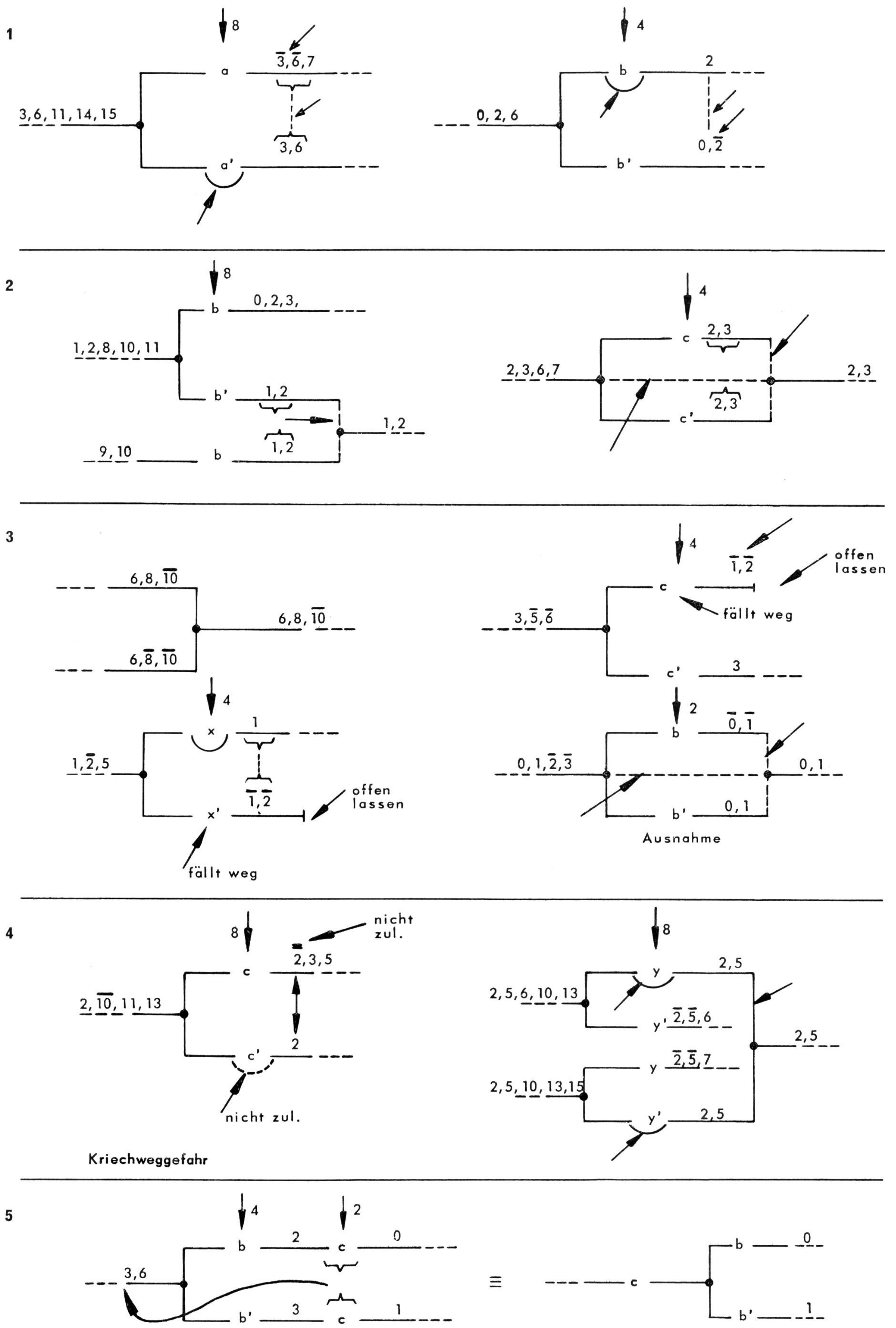
Tafel V. Darstellung von Transmissionsfunktionen



Die Transmissionsfunktion als Kontaktpyramide



Tafel VI. Verwendung der Dezimaläquivalenten als Leitzahlen in einer numerisch-graphischen Netzwerk-Vereinfachungsmethode



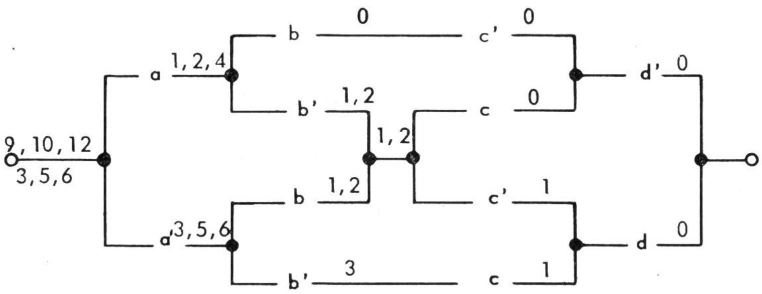
Tafel VII. Beispiele für Vereinfachungsregeln für numerisch-graphische Methode

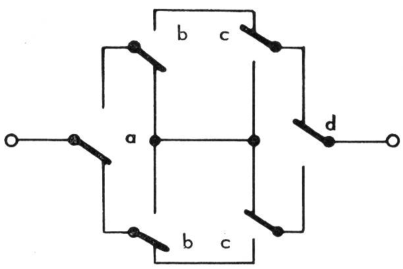
a 8	b 4	c 2	d 1	T	Dezimal-äqui-valente
1	1	0	0	1	12
1	0	1	0	1	10
1	0	0	1	1	9
0	1	1	0	1	6
0	1	0	1	1	5
0	0	1	1	1	3

Kontrollnetzwerk für «2 aus 4»-Code:

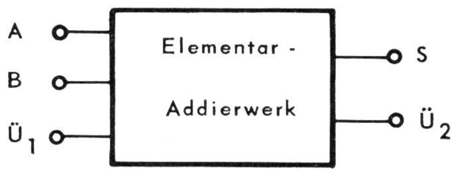
Das Netzwerk soll leiten, wenn von vier Relais beliebige zwei aufgezogen sind und in allen übrigen Fällen sperren.

$$T = f(a, b, c, d) = \Sigma\,(3, 5, 6, 9, 10, 12)$$



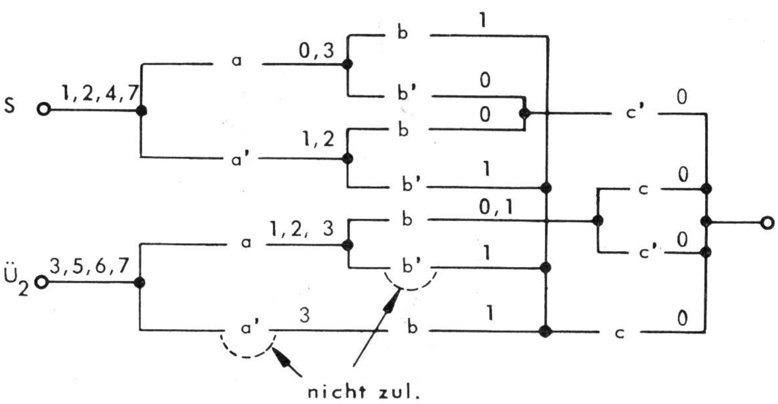


A 4	B 2	$Ü_1$ 1	S	$Ü_2$	Dezimal-äqui-valente
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	2
0	1	1	0	1	3
1	0	0	1	0	4
1	0	1	0	1	5
1	1	0	0	1	6
1	1	1	1	1	7
Substitution a	b	c			

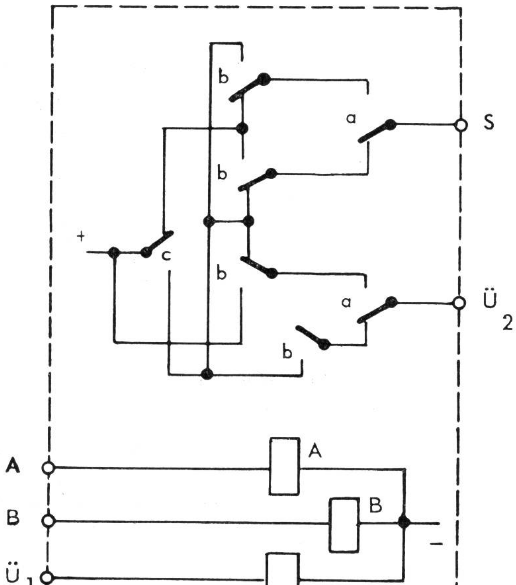


Ein duales Elementar-Addierwerk soll die Summanden A, B und einen allfälligen Uebertrag $Ü_1$ aus einer vorangehenden Stelle gemäss den Rechenregeln des dualen Zahlensystems addieren und das Resultat an den Ausgangsklemmen S, $Ü_2$ abgeben

$$S = f(a, b, c) = \Sigma\,(1, 2, 4, 7); \qquad Ü_2 = f(a, b, c) = \Sigma\,(3, 5, 6, 7)$$

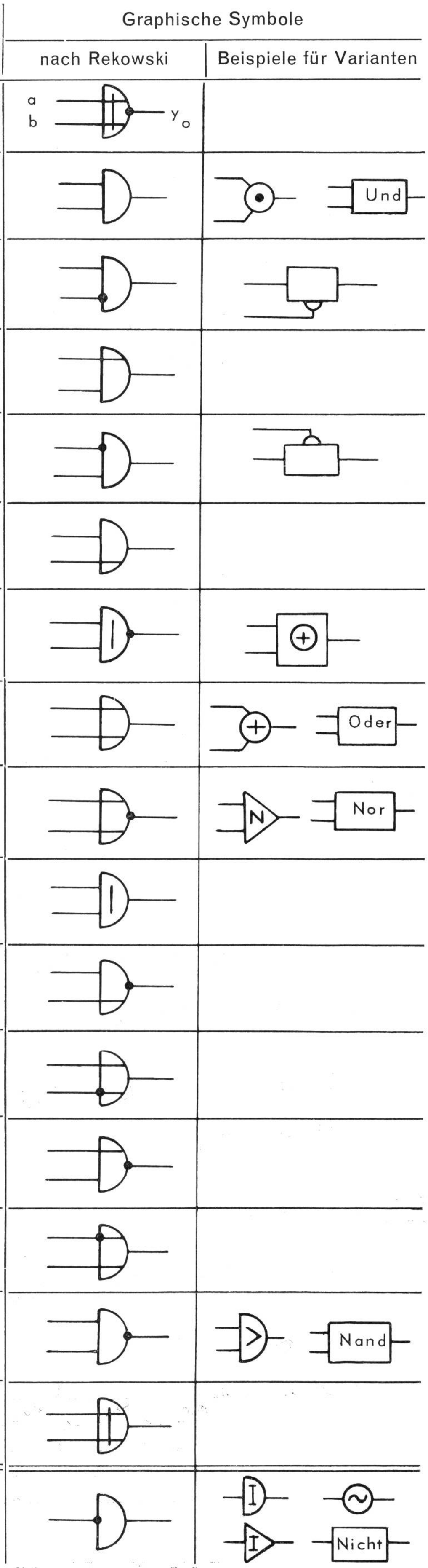


Netzwerk mit 2 Ausgängen, entwickelt von den Ausgängen zum gemeinsamen Eingang



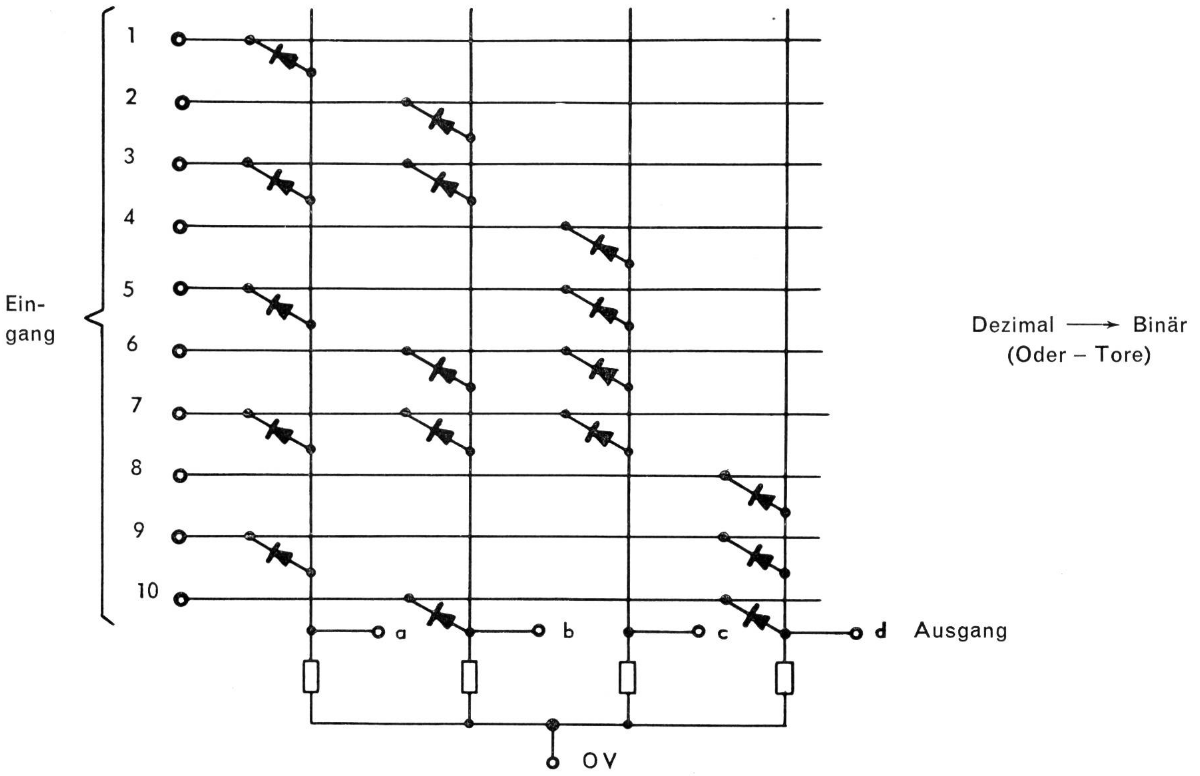
Tafel VIII. Beispiele für Netzwerksynthese

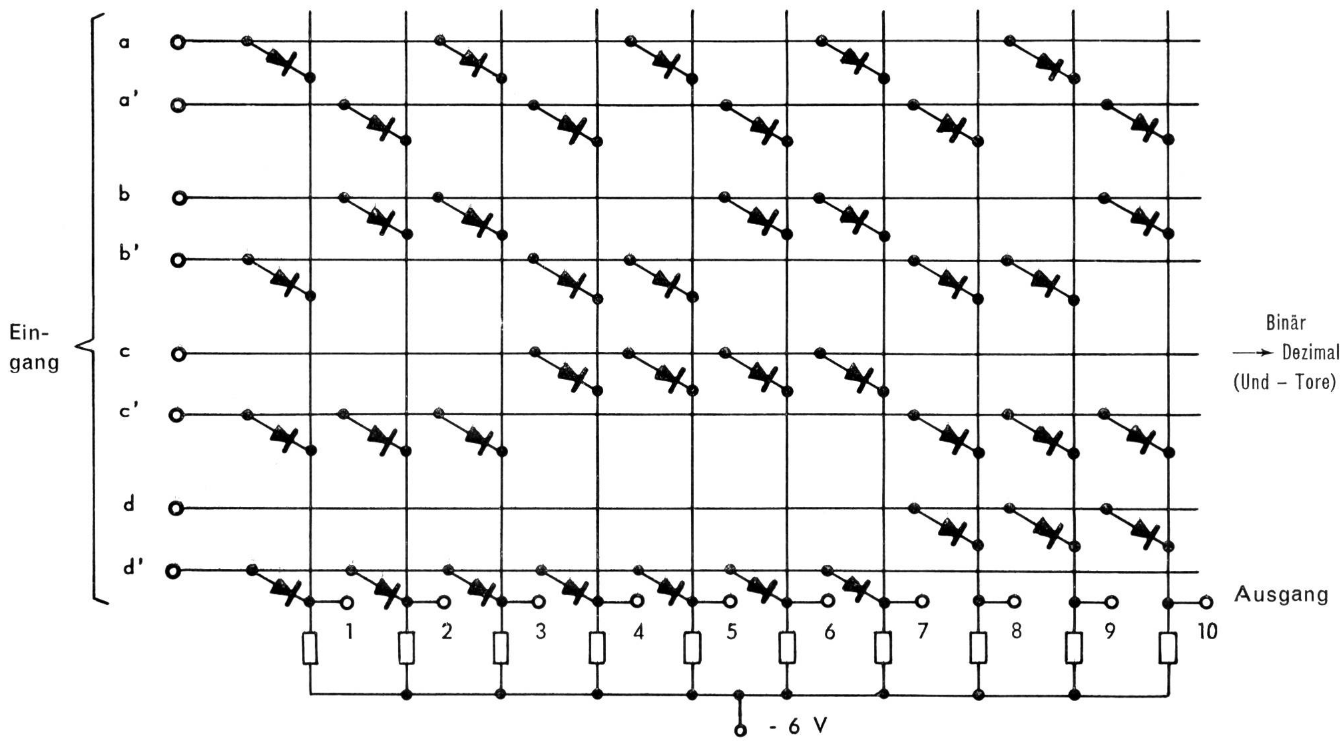
Funktion	Mathematische Symbole		Bemerkungen	Wertetafel a 0 0 1 1 / b 0 1 0 1
y_0	0	0	Leerlauf	0 0 0 0
y_1	a b	a & b	Und (And) Koinzidenz Konjunktion	0 0 0 1
y_2	a b′	a & $\overline{b}$	Sperrung Inhibition	0 0 1 0
y_3	a	a		0 0 1 1
y_4	a′ b	$\overline{a}$ & b	Sperrung Inhibition	0 1 0 0
y_5	b	b		0 1 0 1
y_6	a′b + ab′	a ⋀ b a ⊕ b	Ungleich Exclusiv Oder Antivalenz	0 1 1 0
y_7	a + b	a ⋁ a	Oder (Or) Mischung Disjunktion	0 1 1 1
y_8	a′ b′ (a + b)′	a ↓ b	Weder noch (Nor)	1 0 0 0
y_9	ab + a′ b′	a ≡ b	Gleich Äquivalenz	1 0 0 1
y_{10}	b′	$\overline{b}$		1 0 1 0
y_{11}	a + b′	a → b	Wenn, dann Implikation	1 0 1 1
y_{12}	a′	$\overline{a}$		1 1 0 0
y_{13}	a′ + b	a ← b	Wenn, dann Implikation	1 1 0 1
y_{14}	a′ + b′ (ab)′	a | b	Nicht Und (Not And)	1 1 1 0
y_{15}	1	1	Kurzschluss	1 1 1 1
y	a′	$\overline{a}$	Nicht (Not) Negation, Inversion Komplement	a 0 1 y 1 0



Tafel IX. Logikfunktionen

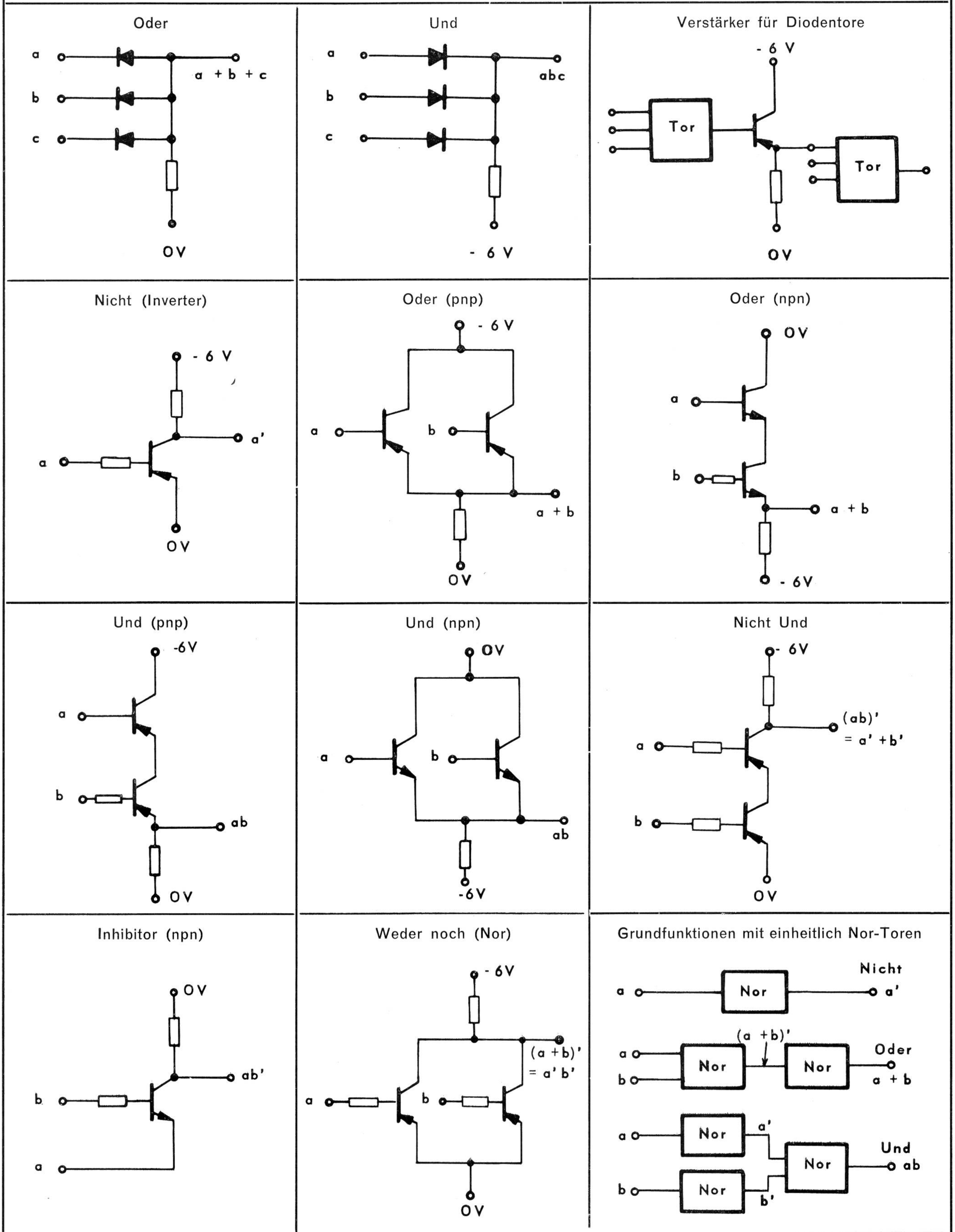
Zuordnung											
Dezimal ⟶		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Binär											
a	(1)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
b	(2)	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
c	(4)	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
d	(8)	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
		(0 V)									(-6 V)





Tafel X. Diodenmatrix (Codewandler Dezimal ⇄ Binär)

Festlegung — Zustand 0 : ≈ 0V — Zustand 1 : ≈ − 6 V



Tafel XI. Beispiele logischer Verknüpfungsschaltungen mit Dioden und Transistoren