

**Zeitschrift:** Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

**Herausgeber:** Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

**Band:** 39 (1961)

**Heft:** 10

**Artikel:** Court aperçu de la recherche opérationnelle (operation research) = Brevi nozioni di ricerca operativa (operation research)

**Autor:** Fontanellaz, G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-875262>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Court aperçu de la recherche opérationnelle (Operations Research)\*

### Brevi nozioni di ricerca operativa (Operations Research)

65.012.122

On a vu se développer ces dernières années un nouveau domaine des connaissances humaines: la recherche opérationnelle. La recherche opérationnelle est une discipline qui étudie la planification, l'organisation et prépare scientifiquement les décisions importantes dans de grandes entreprises. L'évolution de l'industrie mène à un entrelacement toujours plus dense des différents moyens de production. Tandis que dans de petits ateliers le chef dispose encore de la supervision, il est par contre difficile de reconnaître dans leur ensemble les interdépendances dans de grandes entreprises.

La recherche opérationnelle a été utilisée tout d'abord par les Etats-Unis et l'Angleterre pendant la deuxième guerre mondiale à des fins militaires. Après la guerre, l'application des nouvelles méthodes d'investigation a été étendue aux problèmes de l'économie d'entreprise.

En anglais, cette nouvelle discipline est appelée «Operational Research» ou «Operations Research». En allemand, on utilise souvent les expressions «betriebswirtschaftliche Verfahrensforschung» ou «Planungsforschung»; on désigne plus exactement et plus simplement l'ensemble de cette méthode par «Unternehmensforschung». En français, nous nous servons de la dénomination «recherche opérationnelle» qui est généralement utilisée. La recherche se concentre sur des actions ou des opérations déterminées au sein d'une entreprise, d'une exploitation ou d'une administration publique.

La recherche opérationnelle a pour but, avec l'aide de procédés scientifiques, de mettre à disposition de la direction d'une entreprise des indications l'aidant à prendre des décisions importantes. Pour remplir cette tâche, on s'efforce tout d'abord de réunir par des observations ou des essais des données numériques sur les faits importants de l'exploitation, ensuite, se fondant sur ces données, de trouver les meilleures solutions aux problèmes économiques posés pour les mettre à la disposition de la direction.

Les problèmes à résoudre étant de nature quantitative, la recherche opérationnelle utilise les mathématiques dans une large mesure. Ce sont surtout les méthodes statistiques et la solution des équations algébriques qui rendent les meilleurs services.

Le plus gros avantage des méthodes mathématiques appliquées à la recherche opérationnelle réside dans le fait que chaque fonction peut être analysée individuellement et être exprimée sous forme d'équations; la synthèse est alors recherchée objectivement par une

La recherche operativa è nata e si è sviluppata questi ultimi anni. Questo nuovo ramo della scienza applicata studia i problemi relativi alla pianificazione e all'organizzazione aziendale e presiede alle importanti decisioni nelle grandi aziende. Il progresso industriale crea un tale intreccio dei vari mezzi di produzione che – sebbene il capo d'una piccola azienda sia ancora in grado di esercitarne la supervisione – la complessità strutturale della grande azienda moderna rende assai difficile la vista d'insieme.

La ricerca operativa fu dapprima utilizzata a scopi puramente strategici dagli Stati Uniti e dall'Inghilterra, durante la seconda guerra mondiale. Alla fine del conflitto, i nuovi metodi d'investigazione scientifica sono stati estesi anche ai problemi d'economia aziendale.

In inglese, la nuova scienza è chiamata «Operational Research» o «Operations Research». Questa denominazione è stata tradotta in tedesco con «betriebswirtschaftliche Verfahrensforschung», «Planungsforschung» oppure – in modo più breve e più preciso – con «Unternehmensforschung». In italiano, l'espressione «ricerca operativa» è comunemente usata (francese: recherche opérationnelle). Le ricerche concernono determinate operazioni o azioni nel seno di un'azienda, impresa o amministrazione pubblica.

Scopo della ricerca operativa è di fornire, con metodi scientifici, i dati di cui deve disporre la direzione di un'azienda per poter prendere una decisione importante. Per conseguire questo fine occorre, in una prima fase, raccogliere – con osservazioni ed esperimenti – dei dati numerici sui fatti importanti dell'esercizio dell'azienda. In una seconda fase, e in base alle cifre raccolte, si cercherà la migliore soluzione dei problemi di carattere economico.

Siccome i compiti sono di natura quantitativa, la ricerca operativa fa ampiamente ricorso alla matematica. In particolare, i metodi statistici e la soluzione algebrica dei sistemi d'equazioni rendono notevoli servizi.

Il vantaggio principale dell'applicazione della matematica ai problemi di ricerca operativa sta nel fatto che ogni rapporto può essere esaminato individualmente e rappresentato mediante singole equazioni, la cui sintesi può essere determinata matematicamente in modo oggettivo. La soluzione ottima tiene quindi conto d'ogni problema parziale.

La disposizione chiara dei dati numerici conduce a sistemi di equazioni, cioè al cosiddetto «modello matematico» rispecchiante la struttura dell'azienda.

I problemi e i metodi della ricerca operativa sono in generale così complessi e svariati che soltanto la

\* Die Originalfassung dieses Artikels (Kurze Einführung in die Unternehmensforschung) ist in den Technischen Mitteilungen PTT, 1960, Nr. 11, S. 384 ff., erschienen.

méthode mathématique. La solution la meilleure (optimum) est ainsi obtenue en tenant compte de tous les problèmes partiels.

La disposition claire des données numériques conduit à des équations qui, sous la forme d'un «modèle mathématique», donnent une image de l'exploitation.

Les problèmes à résoudre et les méthodes utilisées par la recherche opérationnelle sont en général si complexes que seuls des spécialistes de différents services, travaillant en collaboration très étroite, peuvent trouver une solution aux questions posées. Etant donné que les domaines les plus divers apportent leur participation, il est indispensable que le travail s'effectue en équipes.

#### *Problèmes de la recherche opérationnelle*

Les problèmes posés par l'économie d'entreprise et dont la solution peut être trouvée par les méthodes de la recherche opérationnelle peuvent être groupés dans les catégories suivantes :

- Problèmes de répartition et de distribution
- Problèmes de stocks (d'approvisionnement)
- Problèmes de maintenance et de remplacement
- Problèmes concernant les phénomènes d'attente
- Problèmes de décisions et jeux stratégiques

Un problème de répartition concerne l'exécution de différentes tâches ou prestations avec des moyens limités. Comme exemple, nous citerons une entreprise désire fabriquer une certaine quantité de produits; elle ne dispose cependant pour la fabrication que de moyens limités (par exemple: matières premières, machines, main-d'œuvre). Quel est, en tenant compte de toutes les circonstances connues, le programme de production assurant le plus grand bénéfice?

Dans ce premier groupe, nous trouvons également les problèmes de transports. Une entreprise dispose, par exemple, d'un certain nombre de fabriques et doit effectuer des transports entre ces fabriques et les lieux de vente; les frais de transport, ainsi que la quantité de marchandises à transporter sont connus. Comment organiser les transports pour que les frais totaux soient aussi réduits que possible?

Les problèmes de stocks traitent de la quantité de marchandises qu'il faut tenir en magasin en vue d'une consommation future. Dans une petite fabrique, par exemple, une certaine quantité de produits sont fabriqués, mais pas simultanément. Plus la période pendant laquelle un produit peut être fabriqué sans interruption est longue, plus son prix de revient peut être maintenu bas. Par contre, plus les stocks sont importants, plus les frais d'emménagement sont élevés. On recherche quels sont le programme et les durées de fabrication des divers produits qui, considérés dans l'ensemble, occasionnent les frais les plus réduits. Ces problèmes ne sont pas toujours simples à résoudre, parce qu'il est difficile de prévoir la consommation future des produits.

Un autre problème de stocks est celui-ci: la direction d'une entreprise désire augmenter la vente. Le chef du service de vente croit pouvoir atteindre ce but

stretta collaborazione tra specialisti d'ogni ramo scientifico consente di venirne a capo.

#### *Problemi della ricerca operativa*

I problemi d'economia aziendale, da risolvere con metodi di ricerca operativa, possono essere raggruppati nel modo seguente:

- Problemi di attribuzione e di distribuzione
- Problemi d'approvvigionamento
- Problemi di manutenzione e di sostituzione
- Problemi relativi alle attese
- Problemi di decisione e giochi strategici.

I problemi d'attribuzione concernono l'esecuzione di diversi compiti o prestazioni con mezzi limitati. Per esempio, una ditta desidera fabbricare una quantità determinata di prodotti. Essa dispone soltanto di mezzi limitati (materie prime, macchinari, mano d'opera, ecc.). Il quesito è il seguente: Quale è il programma di produzione permettente di realizzare il maggior guadagno, tenendo conto delle circostanze note?

Il primo gruppo include pure i cosiddetti problemi di trasporto. Un'impresa possiede p.es. un numero determinato di fabbriche e deve trasportare merci tra le stesse e i negozi di vendita; le spese di trasporto e le quantità di merci da trasportare sono note in ogni caso particolare. Come organizzare i trasporti in modo da ridurre il costo al minimo?

Nei problemi d'approvvigionamento si desidera determinare quali partite di merci vanno mantenute in magazzino per far fronte al consumo. Una piccola fabbrica produce p.es. un numero determinato di manufatti, ma non contemporaneamente. Le spese di fabbricazione risultano tanto più ridotte quanto più a lungo e senza interruzione si fabbrica un prodotto. Per contro, se le provvisioni sono grandi, le spese di magazzinaggio aumentano. Si ricerca pertanto il programma di fabbricazione dei diversi prodotti, per il quale gli oneri complessivi siano ridotti al minimo. Siccome il presunto consumo futuro è difficilmente determinabile, la soluzione di questi problemi non è sempre semplice.

Un secondo problema di approvvigionamento è il seguente: la direzione di un'azienda desidera aumentare lo smercio. Il capo del servizio di vendita crede di poter conseguire lo scopo con un maggior assortimento di prodotti, il capo del servizio fabbricazione ritiene che la soluzione del problema consiste nel fabbricare delle serie più grandi, per poter ridurre i prezzi. Chi ha ragione? Per un'azienda che fabbrica diversi prodotti e possiede diversi equipaggiamenti di produzione, il quesito è il seguente: da quali quantità dei singoli prodotti può essere tratto il maggior guadagno, e a quanto ammonta codesto guadagno tenendo conto delle condizioni del mercato.

Nei problemi di manutenzione e di sostituzione, le spese di mantenimento vengono comparate agli oneri di sostituzione. Quale esempio possiamo citare la scelta della miglior data per sostituire i pali di legno

en mettant à la disposition des clients un assortiment plus varié, le chef de fabrication, par contre, veut atteindre le même objectif en fabriquant de plus grandes séries, afin de pouvoir baisser les prix. A qui faut-il donner raison? Dans une entreprise qui fabrique divers produits et qui dispose de différents moyens de production, la question peut se poser de savoir quelles sont les quantités de chaque produit qui laissent le plus gros bénéfice et quelle est l'importance de ce bénéfice en tenant compte des conditions du marché.

Dans les problèmes de maintenance et de remplacement, on calcule les frais d'entretien et on les compare avec les frais de remplacement. On pourrait citer comme exemple de problème de remplacement le calcul du moment le plus favorable pour remplacer les poteaux en bois pour lignes électriques. Sitôt qu'une ligne de transmission a atteint un certain âge et que des défauts se produisent fréquemment aux poteaux, il est plus avantageux de remplacer tous les poteaux, même ceux qui sont encore utilisables, pour ensuite n'avoir plus de frais d'entretien pendant un certain temps. La question se pose donc de savoir quel est le moment le plus propice pour remplacer tous les poteaux d'une ligne de transmission et jusqu'à quel moment il est plus avantageux de remplacer individuellement les poteaux défectueux?

Des problèmes d'attente se posent chaque fois que, durant une certaine période, des irrégularités dues au hasard et observées statistiquement produisent des encombrements ou des temps d'attente. Comme exemple, nous citerons le service à un guichet postal. Si un client se présente trop tôt, c'est-à-dire si la personne qui le précède n'est pas encore servie, il devra attendre; si, par contre, il se présente trop tard, c'est-à-dire si la personne qui l'a précédé a déjà été servie, c'est le fonctionnaire qui doit attendre; des attentes sont donc inévitables. La recherche opérationnelle essaye, en se fondant sur le temps moyen nécessaire pour servir un client et sur la répartition dans le temps de l'arrivée des clients, de déterminer quel sera le nombre de personnes qui attendront dans la file et la durée de l'attente; on pourra alors proposer les meilleures solutions pour résoudre les questions que posent les phénomènes d'attente. Un problème semblable se dégage, par exemple, à un croisement de rues pour l'installation d'une signalisation lumineuse. La périodicité des signaux doit être réglée en sorte que le flux du trafic puisse s'écouler dans toutes les directions si possible sans difficultés et, d'autre part, que les conducteurs de véhicules reconnaissent sans ambiguïté comment ils doivent réagir lorsque les signaux changent. La durée des périodes intermédiaires, pendant lesquelles les lumières jaunes apparaissent, doit être adaptée à la vitesse du flux de trafic, à l'importance du croisement, à la vitesse de réaction des conducteurs, à la longueur du chemin de freinage, à la possibilité d'accélération et enfin aux dimensions des véhicules.

Dans les problèmes de décision, il y a plusieurs (généralement deux) parties en jeu, qui disposent

d'une ligne aerea. Se la palificazione è stata stabilita già da un certo tempo, la necessità di sostituire singoli pali difettosi diventa sempre più frequente. Convieni allora sostituire tutti i pali, quindi anche quelli ancora utilizzabili, per sopprimere ogni spesa di manutenzione durante un certo tempo. Il quesito è il seguente: Quando conviene sostituire tutti i pali d'una linea di trasmissione, e fino a quale limite vale la pena di sopportare le spese di scambio di singoli pali?

Esistono problemi d'attesa allorchè certe irregolarità fortuite si producono nel decorso d'una certa operazione, in un determinato periodo di tempo. La ripartizione di queste irregolarità, provocanti ingombri o tempi d'attesa, può essere osservata statisticamente. A titolo d'esempio, osserviamo il servizio a uno sportello postale. Se un cliente si presenta troppo presto, o se arriva troppo tardi, cioè quando l'utente precedente non è ancora stato servito oppure è già stato servito, il cliente o il funzionario dello sportello dovrà attendere: gli intervalli di attesa sono inevitabili. Per ridurli al minimo si rilevano dati sulle code di clienti in attesa e sulle perdite di tempo, osservando quali sono i tempi necessari per servire i clienti e come sono ripartiti gli arrivi degli utenti. Una situazione analoga esiste a un crocevia ove si desidera installare un impianto semaforico. Il ciclo dei segnali va regolato in modo che il traffico sia il più possibile fluido in tutte le direzioni e i conducenti reagiscano subito e senza equivoci al cambiare delle luci. L'intervallo di tempo durante il quale appaiono le luci gialle dev'essere adeguato alla velocità dei veicoli, all'importanza dell'incrocio, al tempo di reazione dei conduttori, allo spazio di frenata, all'accelerazione ed alle dimensioni dei veicoli.

Nei problemi di decisione parecchie parti (generalmente due) sono in scena; esse dispongono liberamente di parecchie possibilità di decisione. La particolarità di quest'ultimo gruppo di problemi sta nel fatto che il successo d'un provvedimento preso da una parte dipende dal comportamento dell'altra. Per esempio, un'azienda deve immediatamente procurarsi le materie prime necessarie per fabbricare un articolo ordinato da un cliente. Nella speranza di ottenere altre ordinazioni, vengono intavolate trattative con altre ditte. Siccome l'esito di queste è ancora incerto, la direzione dell'azienda non sa ancora se deve procedere all'acquisto delle materie prime anche per le ordinazioni complementari (dubbie). Il compito della ricerca operativa consiste nel trasporre in cifre i rischi per i diversi casi, tenendo conto d'ogni circostanza, nel soppesare e confrontare le possibilità di perdita e di guadagno e infine nel fornire delle direttive sull'attitudine probabilmente migliore da adottare.

#### *Sviluppo matematico dei problemi*

Siccome intendiamo risolvere i problemi di ricerca operativa con l'ausilio della matematica, dobbiamo trasporre i fatti in concetti aritmetici. Occorre pertanto determinare dapprima grandezze fisse o variabili

librement de plusieurs possibilités de décision. La particularité de cette dernière catégorie de problèmes réside dans le fait que le succès d'une mesure prise dépend de l'attitude de l'autre partie. Une entreprise doit, par exemple, acheter les matières premières pour confectionner un article qui lui a été commandé. Afin d'obtenir si possible des commandes complémentaires, cette entreprise entre en pourparlers avec d'autres clients éventuels. Le résultat de ces entretiens est encore incertain, de sorte que la direction de l'entreprise ne sait pas si elle doit acheter également les matières premières pour les commandes supplémentaires éventuelles. La tâche de la recherche opérationnelle consiste alors à traduire en chiffres les risques encourus dans les divers cas en tenant compte de toutes les données, à comparer les possibilités de pertes et de gains et à mettre à la disposition de la direction des directives permettant d'atteindre probablement le meilleur résultat.

### *Développements mathématiques des problèmes*

Puisque nous désirons trouver la solution des problèmes posés à la recherche opérationnelle au moyen des mathématiques, il faut que nous englobions les faits dans des concepts mathématiques. Pour obtenir ce résultat, il faut que nous disposions de grandeurs fixes et variables reliées entre elles par des fonctions mathématiques. Ensuite, se fondant sur les faits et sur les relations à analyser, on établira des programmes de calculs pour déterminer les grandeurs variables entraînant soit un minimum de coût ou de frais ou assurant un maximum de bénéfice. Il s'agit donc d'un problème avec recherche de valeurs extrêmes tenant compte de conditions auxiliaires (contraintes). Du fait qu'il n'est pas toujours possible d'établir des relations fonctionnelles simples, l'établissement du programme représente une tâche assez ardue. Les modèles mathématiques doivent être établis de manière qu'ils permettent d'obtenir des résultats utilisables tout en ne provoquant qu'un travail de calcul raisonnable.

Le procédé adopté peut être expliqué à la lumière d'un exemple simple :

Nous supposons qu'une firme puisse fabriquer des quantités  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de divers produits pour lesquels elle peut réaliser, après déduction de tous les frais, un gain par pièce  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . La fabrication des divers produits nécessite différentes installations et moyens tels que matières premières, machines, main-d'œuvre, ceux-ci ne se trouvent cependant à disposition que jusqu'à un certain maximum. On peut se demander quel sera pour cette firme le meilleur programme de fabrication si, pour une période donnée, on désire réaliser le plus gros bénéfice.

La relation de base ou fonction économique est, dans notre exemple, le bénéfice total  $Q$ , fonction du gain par pièce et du nombre de pièces. Ce bénéfice  $Q$  doit atteindre une valeur maximum, compte tenu de ce que les moyens de fabrication sont limités.

D'autres relations contiendront des conditions

reciproquement legate da rapporti esprimibili con formule matematiche. D'altra parte, fondandosi sui fatti e sulle relazioni da analizzare, vanno allestiti dei programmi di calcolo per determinare da quali grandezze variabili dipende un minimo di oneri o di spese oppure un massimo di guadagno. Trattasi pertanto d'un problema di ricerca di valori estremi nel quale intervengono condizioni ausiliarie. Siccome non è sempre possibile stabilire delle relazioni funzionali semplici, l'allestimento del programma rappresenta spesso un compito assai difficile. I modelli matematici vanno costituiti in modo che conducano a soluzioni praticamente utilizzabili con un lavoro di calcolo rimanente entro limiti ragionevoli.

Il procedimento può essere spiegato con un esempio semplice :

Supponiamo che una ditta possa fabbricare un certo numero di prodotti, nelle quantità  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dai quali possa trarre un guadagno al pezzo di  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , dopo deduzione di tutte le spese. Per fabbricare i diversi prodotti occorrono vari equipaggiamenti e mezzi di produzione, quali macchinari, materie prime, mano d'opera, ecc. disponibili entro certi limiti estremi. Qual è il miglior programma di produzione per ricavare il maggior guadagno in un dato periodo.

Quale relazione fondamentale abbiamo, nel nostro esempio, l'utile totale  $Q$  in funzione del guadagno per pezzo e del numero di pezzi. Questo utile  $Q$  deve assumere il valore massimo, tenendo conto del fatto che i mezzi di fabbricazione sono limitati.

Quali condizioni marginali o ausiliarie abbiamo quindi altre relazioni dalle quali risalta che i singoli mezzi di produzione sono disponibili soltanto fino a un certo limite massimo. D'altra parte (questa condizione ausiliaria è evidente), i numeri di pezzi o quantità negativi sono esclusi:  $x$  è quindi sempre positivo.

Come si vede, se si desidera formulare matematicamente un problema di ricerca operativa, sorgono le questioni seguenti :

1. Qual è la grandezza  $Q$  (p.es. oneri, spese, ricavo, utile) di cui dobbiamo ricercare un valore massimo o minimo ?
2. Da quali grandezze fisse o variabili dipende la grandezza  $Q$ ? Le grandezze variabili vanno per quanto possibile scelte in modo da essere indipendenti l'una dall'altra.
3. I dati numerici concernenti queste grandezze sono disponibili? Come determinarli se necessario ?
4. Quale relazione esiste tra queste grandezze e secondo quale regola esse sono funzione della grandezza  $Q$  ?
5. Quale programma di calcolo occorre scegliere per determinare un massimo o un minimo di  $Q$ , tenendo conto delle condizioni ausiliarie ?
6. Quale è il valore delle grandezze variabili per il valore estremo di  $Q$  ?

auxiliaires ou des contraintes, qui indiquent que les divers moyens de production sont limités et ne se trouvent à disposition que jusqu'à concurrence d'une certaine valeur maximum. Une autre contrainte, évidente celle-là, et que nous n'indiquons que pour mémoire, réside dans le fait que l'on ne peut obtenir un nombre de pièces ou une quantité négative;  $x$  doit donc toujours avoir une valeur positive.

On voit donc que, lorsqu'on désire établir la formule mathématique de problèmes de la recherche opérationnelle, les questions suivantes se posent toujours:

1. Quelle est la grandeur  $Q$  (par exemple: charges, frais, recette, bénéfice) que l'on se propose de rendre maximum ou minimum?
2. Quelles sont les grandeurs fixes et les variables qui influencent la valeur de  $Q$ ? Les grandeurs variables doivent être choisies si possible de manière qu'elles ne s'influencent pas mutuellement.
3. Ces grandeurs sont-elles à disposition? Comment peut-on éventuellement les déterminer?
4. Quel est le rapport qui existe entre ces grandeurs et quelle est la règle qui régit la relation entre ces grandeurs et la grandeur  $Q$ ?
5. Quel est le programme mathématique à choisir pour obtenir une valeur maximum ou minimum de  $Q$ , en tenant compte des contraintes?
6. Quelle est la valeur des grandeurs variables pour la valeur optimum de  $Q$ ?

Afin de répondre à ces questions, il est indispensable de bien séparer les causes et les effets. Une certaine cause ne doit pas influencer une autre cause. D'autre part, il faut se rappeler que l'on ne pourra juger sainement d'un phénomène d'exploitation que si l'on connaît exactement les causes qui régissent les variations.

Généralement, les grandeurs fixes (facteurs) et souvent aussi les relations de cause à effet ne sont pas connues dans tous les détails, il est de ce fait fréquemment nécessaire d'admettre des simplifications pour obtenir des équations qui peuvent être résolues.

Les mathématiques statistiques sont certainement le moyen le plus important à notre disposition pour résoudre les questions posées. Les méthodes statistiques rendent d'excellents services pour déterminer les chiffres de base et préciser certaines relations. Nous en donnerons donc ci-après un aperçu:

#### *Méthodes statistiques*

Les procédés statistiques sont généralement utilisés partout où une grandeur ou une variable atteint différentes valeurs qui dépendent d'une certaine probabilité. Les statistiques mathématiques analysent ces distributions de probabilité et définissent les unités qui s'y rapportent. La moyenne (en tant que valeur moyenne) et l'écart type (ou écart quadratique moyen) sont par exemple de telles unités.

Les lois de probabilité prennent une place fondamentale dans les mathématiques statistiques; pour étudier les grandeurs aléatoires, on les rapporte à des

Per rispondere a queste domande è indispensabile separare nettamente le cause e gli effetti. Una certa causa non deve influenzarne un'altra. Bisogna inoltre rammentarsi che è possibile giudicare correttamente un'operazione d'esercizio soltanto se si conoscono effettivamente le cause che ne determinano le variazioni.

Siccome non è in generale possibile indicare con precisione assoluta le grandezze fisse (fattori) e sovente anche le relazioni tra causa e effetto, bisogna frequentemente ricorrere a supposizioni semplificanti il problema, per formulare dei sistemi d'equazioni risolvibili.

Quale importante ausiliaria per risolvere i quesiti, abbiamo la matematica statistica. Per rilevare dei dati numerici e determinare certe relazioni, i metodi statistici possono rendere buoni servizi. Vogliamo quindi parlarne brevemente.

#### *Metodi statistici*

I procedimenti statistici sono applicati generalmente ove il valore di un fattore o di una variabile ubbidisce a determinate probabilità. La statistica matematica analizza la ripartizione di codeste probabilità e definisce le cifre che le rappresentano. La media (valore medio) e lo scarto (differenza quadratica media) sono per esempio simili cifre.

Le leggi della probabilità sono per così dire alla base della matematica statistica; l'applicazione del calcolo delle probabilità ai numeri raccolti statisticamente è detta stocastica. I metodi statistici combinati al calcolo delle probabilità permettono di analizzare i rilevamenti statistici e in particolare di discriminare i rapporti importanti da quelli che non lo sono.

Grazie a prove sistematiche e osservazioni è possibile determinare un certo numero di valori singoli. L'insieme d'un numero infinito di simili valori singoli, determinati nelle medesime condizioni, è denominata complesso fondamentale o distribuzione fondamentale. In pratica, i rilevamenti statistici forniscono però soltanto un numero limitato di valori singoli; sono pertanto stati elaborati procedimenti speciali che permettono di trarre delle deduzioni sul complesso fondamentale da un numero limitato di prove saltuarie.

Se si ripetono i rilevamenti, capita spesso che i nuovi dati non concordino con quelli primitivi. Grazie a metodi d'investigazione statistica è possibile verificare se gli scarti rilevati sono dovuti al caso oppure a cause ben stabilite. La teoria delle prove saltuarie indica come vanno eseguiti i sondaggi per ottenere i migliori risultati. Bisogna soprattutto badare che nessun errore sistematico possa introdursi.

Alcune formule di statistica matematica possono sovente simulare direttamente certe situazioni aziendali caratteristiche. La formula di Poisson indicante la frequenza di certi avvenimenti rari è per esempio utilizzata vantaggiosamente quale modello matema-

processus dits stochastiques. Les méthodes statistiques combinées au calcul des probabilités permettent d'analyser les relevés statistiques et plus spécialement de distinguer les relations importantes de celles qui sont négligeables.

Au moyen d'analyses, de séries d'essais ou d'observations, on obtient une certaine quantité de valeurs individuelles. La totalité d'une infinité de valeurs individuelles qui auraient été obtenues dans des conditions semblables est appelée totalité de base ou distribution de base. Etant donné qu'en pratique on est contraint d'effectuer des relevés statistiques qui ne fournissent qu'un nombre limité de valeurs individuelles, on a développé au sein de la théorie de l'échantillonnage des procédés d'essais spéciaux qui permettent, partant d'échantillons, de procéder à des déductions sur la totalité de base.

Si l'on répète les essais, il arrive fréquemment que les nouveaux résultats ne concordent pas avec les anciens. Au moyen des méthodes d'investigation statistiques, il est possible de reconnaître si les écarts constatés sont dus au hasard ou si les différences obtenues proviennent de causes fondamentales bien établies. La théorie de l'échantillonnage indique comment prélever des échantillons pour obtenir les meilleurs résultats. Il y a lieu surtout de prendre garde qu'aucune erreur de principe ne s'introduise dans le système.

Certains processus des mathématiques statistiques simulent souvent directement les phénomènes d'exploitation. Ainsi la loi de Poisson, qui s'applique à la probabilité des arrivées au hasard, est fréquemment utilisée comme modèle mathématique de ce qui se passe à un guichet postal. Les problèmes de files et de temps d'attente peuvent alors être étudiés directement sur ce modèle.

Si nous nous trouvons placés devant plus d'une variable, c'est-à-dire si deux ou trois variables sont en jeu, on doit se poser la question de la dépendance réciproque de ces grandeurs. Il n'existe pas alors de rapport fonctionnel exact et la statistique mathématique se trouve face à des relations stochastiques. Comme exemple, nous citerons le rapport qui existe entre la vitesse et le chemin de freinage d'un véhicule à moteur. Si nous portons en abscisse la vitesse et en ordonnée le chemin de freinage, nous obtiendrons suivant le nombre des essais effectués un essaim plus ou moins dense de points. En examinant cet essaim, on peut supputer une relation entre la vitesse et le chemin de freinage.

Certains procédés statistiques, par exemple le calcul de corrélation, servent à examiner ces relations stochastiques et à les interpréter correctement. Un calcul approprié permet de déterminer pour chaque vitesse un chemin de freinage moyen et de fixer les limites dans lesquelles, pour une vitesse déterminée, on trouvera par exemple 90% des chemins de freinage.

On a développé pour l'industrie des méthodes particulières aidant à définir avec des moyens réduits un certain nombre de facteurs importants.

tico per rappresentare la situazione a uno sportello postale. Il problema delle code e dei tempi di attesa può essere studiato direttamente su questo modello.

Se il problema contiene due o parecchie variabili, sorge immediatamente la questione della dipendenza reciproca. La particolarità della statistica risiede allora nel fatto che non esistono rapporti funzionali esatti ma soltanto cosiddette relazioni stocastiche, cioè dipendenti dal caso. A titolo d'esempio, rammentiamo la relazione tra la velocità di un veicolo e lo spazio di frenata. Se riportiamo la velocità in ascissa e lo spazio di frenata in ordinata, dopo un certo numero di prove otterremo uno sciame più o meno grande di punti. Osservando questo sciame è possibile dedurre la relazione tra la velocità e lo spazio di frenata.

Certi procedimenti statistici, come per esempio il calcolo di correlazione, servono a esaminare queste relazioni stocastiche e ad interpretarle correttamente. Un calcolo adeguato permette di determinare uno spazio di frenata medio per ogni velocità e di fissare i limiti entro i quali troveremo per esempio il 90% degli spazi di frenata corrispondenti a una certa velocità.

Dei metodi particolari sono stati elaborati per l'industria. Essi consentono di definire un numero abbastanza elevato di fattori d'influenza con mezzi relativamente limitati.

Se vogliamo esprimere in una relazione funzionale esatta la dipendenza reciproca di diverse variabili, dobbiamo operare una regressione. Questa trasposizione in un rapporto matematico esplicito è molto importante e necessaria per compilare le equazioni che ci occorrono. Dei metodi matematici particolari sono stati sviluppati per l'analisi dei rapporti reciproci. La regressione consiste sempre nel definire una curva in cui la somma degli scarti quadratici dei singoli valori misurati sia ridotta al minimo. Il metodo più noto è quello per determinare l'equazione lineare di regressione nel caso di due variabili. Secondo le relazioni supposte o determinate possiamo quindi formare vari gruppi di problemi, per ognuno dei quali esiste un metodo specifico di risoluzione dipendente dalla natura dei sistemi di equazioni.

Includeremo nel primo gruppo tutti i problemi con equazioni lineari. Si tratta indubbiamente del gruppo più importante. I quesiti di questo genere vengono risolti ricorrendo a «programmazioni lineari».

Il secondo gruppo comprenderà i problemi comprendenti equazioni non lineari. I quesiti vengono risolti grazie a «programmazioni dinamiche».

### *Programmazione lineare*

I problemi rappresentati da sistemi d'equazioni lineari vengono risolti con il metodo di «programmazione lineare». Questo genere di programmazione ha acquisito una grande importanza questi ultimi anni. Il metodo viene applicato vantaggiosamente ove

Le fait d'exprimer dans un rapport fonctionnel exact diverses variables dépendantes les unes des autres est appelé régression. Cette transposition dans une formule mathématique exactement définie est très importante, elle est utilisée pour établir les équations nécessaires. Des méthodes mathématiques particulières furent développées pour analyser les rapports réciproques de diverses grandeurs. La régression se traduit toujours par la recherche d'une ligne courbe pour laquelle la somme des écarts quadratiques des mesures individuelles est minimum. Le procédé le plus connu est celui qui consiste à déterminer l'équation linéaire de régression dans le cas de deux variables.

Suivant les indications à disposition, qu'il s'agisse de rapports évalués ou connus, on procédera à un groupement des systèmes d'équations qui, d'après leur nature, permettront d'appliquer l'une ou l'autre des diverses méthodes conduisant à une conclusion.

Nous rassemblerons dans le premier groupe tous les problèmes avec des équations linéaires. Il s'agit du groupe le plus fréquent et le plus important. Les problèmes de cette catégorie seront résolus au moyen des «programmes linéaires».

Le deuxième groupe sera formé des problèmes qui contiennent des équations non linéaires. Ceux-ci sont résolus au moyen de «programmes dynamiques».

#### *Programmes linéaires*

Les problèmes qui s'expriment par un système d'équations linéaires sont résolus par le procédé de «programmation linéaire». Ce moyen de programmation a acquis une grande importance ces dernières années. Il est utilisé avec avantage quand plusieurs objectifs, qui sont unis par l'exploitation, doivent atteindre des valeurs maximums, à condition toutefois que les grandeurs soient liées entre elles par des relations linéaires.

Retournons à l'exemple de la firme qui fabrique divers produits en quantités  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Après déduction de tous les frais, elle réalise un gain par pièce  $p_1, p_2 \dots p_n$ . Les divers moyens de production (machines, main-d'œuvre, etc.) se trouvent à disposition jusqu'à concurrence des valeurs limites A, B, C... On cherche le programme de production optimum qui permet de réaliser le plus gros bénéfice.

Nous pouvons poser la fonction économique suivante:

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i x_i - K$$

Q représente le bénéfice total qui satisfait aux différentes contraintes et qui doit atteindre une valeur maximum.

K représente une participation aux frais de valeur constante qui peut être négligée si l'on considère des quantités maximums.

Les moyens de production, qui sont limités et que nous désignons par «contraintes», sont indiqués sous forme d'inéquations.

occorra trovare la miglior soluzione per lo svolgimento di parecchie operazioni, reciprocamente legate nell'esercizio dell'azienda, a condizione naturalmente che le relazioni tra le grandezze in giuoco siano lineari.

Osserviamo di nuovo l'esempio della ditta che fabbrica diversi prodotti, nelle quantità  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Dopo deduzione di tutte le spese, essa ottiene un guadagno netto di  $p_1, p_2 \dots p_n$  il pezzo. I diversi mezzi di produzione (macchinari, mano d'opera, ecc.) sono disponibili fino ai limiti massimi A, B, C... Si cerca ora il programma di fabbricazione che permetta di conseguire il massimo guadagno.

Possiamo immediatamente formulare l'equazione principale

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i x_i - K$$

ove:

Q è il guadagno totale che va reso massimo tenendo conto delle limitazioni citate;

K rappresenta un importo costante di oneri che può essere tralasciato se si considerano valori ottimi.

I mezzi di produzione, i quali sono limitati, ci danno le condizioni accessorie sotto forma di disuguaglianze

$$\text{Per il 1° mezzo di produzione } \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A$$

$$\text{Per il 2° mezzo di produzione } \sum_{i=1}^n b_i x_i \leq B$$

a, b... sono i cosiddetti fattori di produzione indicanti in qual misura un mezzo di produzione è utilizzato per ogni unità prodotta.

Per poter illustrare la programmazione lineare graficamente su un piano, ammettiamo che la ditta fabbrichi soltanto due prodotti. Le due variabili descrivono pertanto un sistema di coordinate  $x_1-x_2$ . Abbiamo quindi l'equazione principale:

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

e, per 3 mezzi di produzione, le seguenti condizioni accessorie:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 &\leq A \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 &\leq B \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 &\leq C \end{aligned}$$

Siccome la cifra di produzione non può essere negativa, abbiamo ancora le condizioni evidenti seguenti:

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Tenendo conto delle condizioni accessorie, si tratta ora di trovare un valore massimo di Q e di determinare i valori rispettivi di  $x_1$  e  $x_2$ .

Su un piano, i rapporti lineari possono essere rappresentati mediante rette. I punti corrispondenti a una disuguaglianza si trovano in un semipiano ben definito, limitato da una retta. Tutte le disuguaglianze risultanti dalle condizioni accessorie dimo-

Pour le 1<sup>er</sup> produit de fabrication  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A$

Pour le 2<sup>e</sup> produit de fabrication  $\sum_{i=1}^n b_i x_i \leq B$

$a, b, \dots$  représentent des «facteurs de production», ceux-ci font apparaître dans quelle mesure un moyen de production est mis à contribution par unité produite.

Afin de pouvoir représenter graphiquement dans un plan ce que l'on entend par programmation linéaire, nous admettrons que la firme en question ne fabrique que deux produits. Les deux variables se situent dans ce cas dans un système de deux coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ . Nous obtenons pour la fonction économique la formule suivante:

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

et pour les divers moyens de production les contraintes ci-après:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 &\leq A \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 &\leq B \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 &\leq C \end{aligned}$$

Etant donné que l'on ne peut obtenir de quantité négative pour la production, nous devons encore poser les conditions évidentes suivantes:

$$x_1 > 0 \quad x_2 > 0$$

On se propose, tenant compte des contraintes, de rechercher une valeur maximum pour  $Q$  et de déterminer les valeurs correspondantes de  $x_1$  et de  $x_2$ .

Dans un plan, les relations linéaires sont représentées par des droites. Les points satisfaisant aux conditions d'une inéquation se trouvent dans un demi-plan bien défini, limité par une droite. Toutes les inéquations résultant des contraintes indiquent dans notre exemple que la solution doit se trouver dans l'aire limitée par  $P_0, P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  (voir *figure 1*). On se rend immédiatement compte que le polygone limité par les solutions d'inéquations doit présenter une forme convexe.

Nous avons vu que la fonction que l'on se propose de rendre maximum est linéaire. Pour une certaine valeur de  $Q$ , nous obtenons dans la figure 1 la droite  $Q_1$ . Diverses valeurs de  $Q$  conduisent à un groupe de droites parallèles. Le problème consiste donc à déterminer le point se trouvant dans la surface englobant les solutions possibles et donnant une valeur optimum de  $Q$ . Dans notre exemple, c'est le point  $P_3$ . En examinant la figure, on voit que le point cherché donnant la solution doit se trouver à la périphérie de la surface en question.

Si l'on exclut le parallélisme entre la droite  $Q$  et l'une quelconque des lignes de démarcation, la solution ne peut se trouver en principe qu'à l'un des sommets  $P_1, P_2, P_3$  ou  $P_4$  des angles du polygone. Ces constatations conduisent à utiliser pour le calcul

strano nel nostro esempio che la soluzione deve trovarsi nell'area limitata da  $P_0, P_1, P_2, P_3$  (*fig. 1*). Si intravede subito che la linea che limita l'area ove si trova la soluzione, linea risultante da disuguaglianze lineari, deve sempre essere convessa.

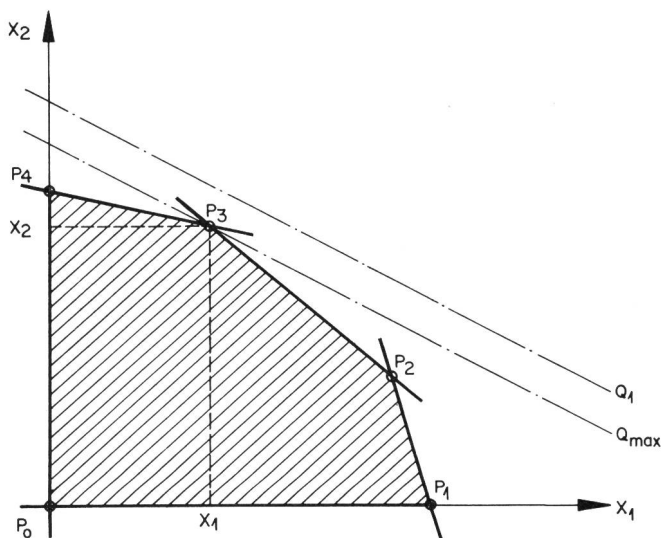


Fig. 1.

Secondo quanto premesso, anche la funzione di massimo è lineare. Per un determinato valore di  $Q$  otteniamo una retta  $Q_1$  in figura 1. Per diversi valori di  $Q$  otterremo una serie di rette parallele. Il nostro compito è ora di trovare un punto nell'area di possibile soluzione, per il quale il valore di  $Q$  sia il più elevato.

Nel nostro esempio, si tratta di  $P_3$ . Come risulta dalla figura, il punto rappresentante la soluzione deve trovarsi esclusivamente al margine dell'area di possibile soluzione. Se escludiamo il parallelismo tra le rette  $Q$  e qualsiasi altra linea limite, la soluzione può di massima essere rappresentata soltanto dai vertici  $P_1, P_2, P_3$  o  $P_4$ . Questo fatto ci conduce a un metodo ben determinato di soluzione delle programmazioni lineari, il cosiddetto metodo «simplex».

Esso consiste nel cominciare a un qualsiasi angolo dell'area a limite convesso e di procedere fino al prossimo vertice nella direzione in cui l'aumento del valore  $Q$  è il più grande possibile; il punto raggiunto serve da nuovo punto di partenza, e così via fino al punto rappresentante la soluzione.

Il medesimo principio è applicabile anche se occorre cercare un minimo. In tali problemi, le condizioni accessorie vietano di scendere al disotto d'un minimo determinato per certi valori. L'area di soluzione possibile determinata dalle condizioni accessorie si trova quindi tra le rette limiti e l'infinito (*fig. 2*).

A titolo d'esempio, citiamo un'azienda elettrica che desidera coprire il fabbisogno d'energia dei suoi utenti mediante un certo numero di centrali tipo. L'azienda

des programmes linéaires une méthode caractéristique, la méthode du «simplex».

La méthode du simplex consiste à commencer à un angle quelconque du polygone convexe et à se déplacer si possible dans la direction donnant une augmentation de  $Q$  jusqu'au prochain angle; ensuite à prendre ce nouvel angle comme point de départ et ainsi de suite jusqu'au point maximum recherché.

Exactement le même principe peut être adopté si, au lieu d'un problème où il faut rechercher un maximum, on se propose de trouver une valeur minimum. Les problèmes de ce genre sont caractérisés par des contraintes représentant des grandeurs qui ne peuvent descendre au-dessous d'une certaine valeur. La surface englobant les solutions possibles se trouve alors entre les droites formant la démarcation et l'infini (voir figure 2).

Pour illustrer un tel problème, nous citons l'exemple d'une compagnie d'électricité qui désire couvrir les besoins de sa clientèle en énergie électrique par un certain nombre d'usines types. La compagnie dispose d'usines hydrauliques et thermiques. Les quantités d'énergie à fournir sont définies par:

- A l'énergie maximum utilisée en hiver,
- B l'énergie maximum utilisée pendant les heures de pointe,
- C l'énergie totale nécessaire annuellement.

La puissance, les frais de capitaux et d'exploitation des diverses usines sont également connus. On cherche le nombre d'usines de chacun des deux types  $x_1$  et  $x_2$ , capables de fournir avec des frais minimums l'énergie nécessaire des diverses catégories.

Nous posons la fonction économique suivante:

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$Q$  représentant la somme de tous les frais, on cherchera une valeur minimum;  $p_1$  et  $p_2$  sont les frais de chaque usine type.

Pour satisfaire aux exigences de la consommation, on est conduit à poser les inéquations suivantes:

- pour l'énergie d'hiver  $a_1 x_1 + a_2 x_2 > A$
- pour l'énergie de pointe  $b_1 x_1 + b_2 x_2 > B$
- pour l'énergie totale annuelle  $c_1 x_1 + c_2 x_2 > C$

Dans ces formules,  $a_1, b_1, c_1$  ainsi que  $a_2, b_2, c_2$  représentent les possibilités de production des deux genres d'usines.

En procédant exactement comme dans l'exemple précédent, on trouvera la solution du problème correspondant au point  $P_2$  (voir figure 2), cela permet de définir également les valeurs pour  $x_1$  et  $x_2$ .

Pour faciliter la compréhension des exemples, nous avons admis qu'il n'y avait dans nos problèmes que deux produits, c'est-à-dire deux variables en jeu. Souvent cependant les questions à résoudre sont sensiblement plus compliquées, ce qui entraîne immédiatement un plus grand nombre d'inconnues et d'inéquations. Au lieu d'une surface plane, nous obtenons alors un volume de «n» dimensions.

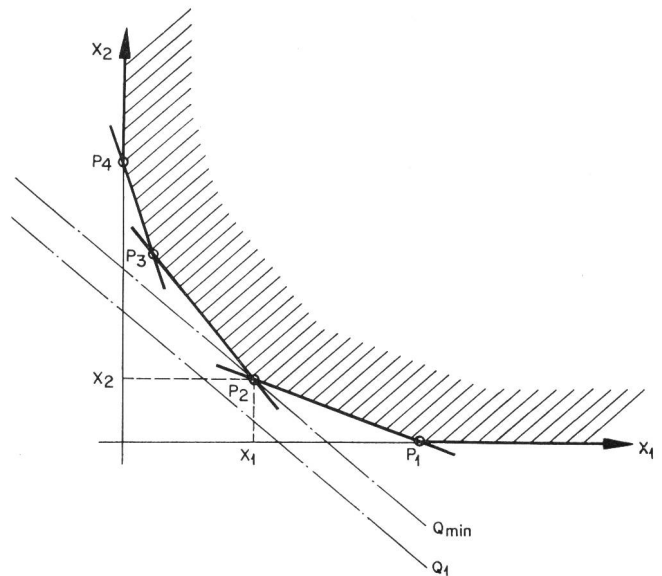


Fig. 2.

dispone di centrali termiche e di centrali idroelettriche. Le quantità d'energia da fornire sono definite con

- A energia massima utilizzata in inverno
- B energia massima utilizzata alle ore di punta
- C energia totale necessaria annualmente.

La potenza e gli oneri di capitale e d'esercizio per centrale tipo sono pure noti. Determinare il numero di centrali d'ognuno dei due tipi  $x_1$  e  $x_2$  capaci di fornire con le minime spese l'energia necessaria delle diverse categorie sopracitate.

Abbiamo l'equazione principale:

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

ove  $Q$  è la somma di tutti gli oneri, somma da ridurre al minimo, e  $p_1$  e  $p_2$  gli oneri per centrale tipo.

Per soddisfare ai bisogni d'energia, abbiamo le disuguaglianze seguenti:

- per l'energia invernale  $a_1 x_1 + a_2 x_2 > A$
- per l'energia di punta  $b_1 x_1 + b_2 x_2 > B$
- per l'energia totale annua  $c_1 x_1 + c_2 x_2 > C$

ovè  $a_1, b_1, c_1$  e  $a_2, b_2, c_2$  rappresentano le quote di produzione d'energia dei due tipi di centrali.

Il punto  $P_2$  corrispondente alla soluzione può essere determinato (fig. 2) esattamente come nell'esempio precedente, anche in questo caso. Simultaneamente otteniamo pure i valori di  $x_1$  e  $x_2$ .

Per facilitare la comprensione degli esempi, abbiamo supposto soltanto l'esistenza di due prodotti, cioè di due variabili. Spesso i problemi da risolvere sono notevolmente più complicati; avremo quindi un maggior numero d'incognite e di disuguaglianze. Invece d'una superficie piana otterremo uno spazio a «n» dimensioni. Un sistema di parecchie equazioni lineari con altrettanti incognite può essere risolto matematicamente con il metodo delle matrici. Grazie alle matrici possiamo rappresentare in modo semplice

Pour trouver la solution d'un système d'équations avec un grand nombre d'équations linéaires et autant d'inconnues, nous disposons du calcul matriciel. Les matrices nous permettent de présenter simplement et clairement des systèmes d'équations linéaires compliquées et de déterminer les inconnues suivant un schéma simple, au moyen du calcul des déterminants.

On obtient par exemple pour le système d'équations:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

les solutions suivantes pour l'inconnue  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Afin de pouvoir utiliser également le calcul matriciel pour des problèmes de planification, il faut transformer, au moyen d'un petit artifice, les inéquations en équations. On peut le faire en introduisant des variables d'écart qui complètent ce qui manque pour obtenir l'égalité, on dispose ainsi dans la programmation des systèmes d'équation suivants pour  $m$  contraintes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + y_1 &= A \\ \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + y_2 &= B \end{aligned}$$

Les  $y$  sont les variables d'écart inconnues. Dans ce système à  $m$  équations et  $n + m$  inconnues, on peut poser d'avance des valeurs supposées à  $n$  inconnues et le système peut être résolu pour les  $m$  inconnues qui restent. On porte alors les valeurs de  $x_1$  à  $x_n$  dans la fonction économique pour déterminer  $Q$ . Le théorème fondamental de la méthode simplex définit que pour obtenir des valeurs maximums ou minimums de  $Q$  dans la fonction économique, les variables qui ont été posées préalablement doivent être de valeur zéro. Si nous transposons ces conditions sur notre graphique, cela signifie simplement que seul le sommet d'un angle peut entrer en ligne de compte pour une solution optimum. La méthode simplex recommande également un procédé de mise à zéro des variables qui permet d'atteindre rapidement le point optimum.

Même pour un grand nombre d'invariables, les principes de base de la programmation linéaire et de la recherche des solutions au moyen de la méthode simplex restent inchangés. Les calculs à effectuer deviennent cependant alors si complexes que des calculateurs électroniques doivent être mis à contribution pour résoudre les problèmes.

#### Programmes dynamiques

Nous expliquerons succinctement au moyen de l'exemple qui suit l'essentiel de la programmation dynamique.

e chiaro dei sistemi complicati di equazioni lineari. Grazie alle regole di calcolo dei determinanti, le incognite possono essere trovate secondo uno schema semplice.

Per il sistema d'equazioni

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

otteniamo, per esempio, le soluzioni seguenti per l'incognita  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Per poter applicare il calcolo delle matrici anche ai problemi di pianificazione, le disuguaglianze devono essere trasformate in equazioni mediante un piccolo artificio. Si introducono cosiddette variabili di scarto che completano gli importi mancanti fino ad ottenere l'uguaglianza, ottenendo il seguente sistema d'equazioni lineari per  $m$  condizioni accessorie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + y_1 &= A \\ \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + y_2 &= B \end{aligned}$$

ove le  $y$  rappresentano le variabili di scarto incognite. In questo sistema di  $m$  equazioni e  $n + m$  incognite,  $n$  incognite possono essere determinate a piacimento, indi il sistema può essere risolto per le rimanenti  $m$  incognite. I valori da  $x_1$  a  $x_n$  possono poi essere introdotti nell'equazione principale per determinare  $Q$ . Nel teorema fondamentale del metodo simplex è detto che per ottenere dei valori massimi o minimi di  $Q$  nell'equazione principale, le variabili predeterminate devono essere uguali a zero. Se ci riportiamo alla nostra rappresentazione grafica, ciò significa che soltanto un vertice può entrare in linea di conto quale soluzione ottima. Il metodo simplex comprende inoltre un procedimento per porre uguali a zero le variabili che consente di trovare rapidamente il punto rappresentante la miglior soluzione.

Anche per un numero elevato d'invariabili, i principi di base della programmazione lineare e della soluzione con il metodo simplex restano gli stessi. I calcoli da effettuare diventano però molto complessi; soltanto le calcolatrici elettroniche possono razionalmente venire a capo.

#### Programmazione dinamica

Spiegheremo ora, con un esempio semplice, l'essenziale della programmazione dinamica.

All'inizio di un anno un contadino possedeva un armento  $M_1$ . Egli vende immediatamente un certo numero di bestie  $x_1$ , traendone un ricavo  $f_1(x_1)$ . La mandra rimanente  $y_1 = M_1 - x_1$  aumenta nel corso dell'anno ed è di  $M_2 = a \cdot y_1$  all'inizio del secondo

Au début d'une année, un paysan possédait un troupeau de bestiaux  $M_1$ . Il vend immédiatement un certain nombre de bêtes  $x_1$  et réalise ainsi une recette  $f_1(x_1)$ . L'effectif restant  $y_1 = M_1 - x_1$  augmente dans le courant de l'année pour atteindre  $M_2 = a \cdot y_1$ . Au début de la deuxième année, une quantité  $x_2$  est à nouveau vendue et il en résulte une recette  $f_2(x_2)$ . Cela se reproduit les années suivantes. Après un certain nombre d'années  $n-1$ , le paysan, devenu vieux, désire abandonner l'élevage et vend à la fin de cette période le solde de son troupeau. Le problème posé à la recherche opérationnelle consiste à indiquer au paysan une politique de vente qui lui permette de retirer un bénéfice maximum de son élevage. Les relations n'étant pas linéaires, il n'est pas possible d'utiliser la «programmation linéaire». Par contre, la «programmation dynamique» nous offre un moyen d'atteindre le but recherché. La fonction économique s'exprime:

Le revenu total  $Q$  se compose de la somme de diverses fonctions

$$Q = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

Pour  $Q$ , il y a lieu de trouver la valeur extrême (maximum ou minimum) compte tenu des contraintes et on se propose de déterminer les valeurs pour  $x_1 \dots x_n$ . Une contrainte simple s'énonce par exemple:

$$x_1 + x_2 \dots + x_n \leq M$$

Un tel problème de valeurs extrêmes ne peut être résolu en une seule étape. Pour obtenir les valeurs optimums, il faut procéder pas à pas en subdivisant l'ensemble en problèmes partiels.

Le premier problème partiel s'énonce:

la grandeur partielle  $Q_1 = f_1(x_1)$  doit atteindre une valeur maximum pour  $x_1 \leq M$ . Ce maximum est dépendant de  $M$ . Nous obtenons donc une fonction

$$Q_1 \text{ max.} = F_1(M)$$

Pour chaque  $M$ , il y a une valeur de  $x_1$  bien déterminée.

Dans la deuxième étape, on recherche une valeur maximum de  $Q_2 = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ , tout en ayant  $x_1 + x_2 \leq M$ . Ce qui revient à écrire

$$Q_2 = f_2(x_2) + F_1(M-x_2)$$

Le maximum de  $Q_2$  est lui aussi dépendant de  $M$ . Nous obtenons

$$Q_2 \text{ max.} = F_2(M)$$

La fonction  $F_2(M)$  peut donc être tirée de  $F_1(M)$ . De même, les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$  correspondent à une valeur déterminée de  $M$ . Par analogie, on obtiendra pour l'étape  $k$ :

$$Q_k = f_k(x_k) + F_{k-1}(M-x_k)$$

et  $Q_k \text{ max.} = F_k(M)$

Nous obtenons ainsi un système d'équations fonctionnelles qui permet d'obtenir le résultat cherché à l'aide d'un calcul récursif  $F_k(M)$ .

Ce procédé, qui consiste à atteindre la solution optimum en procédant par étapes, peut être illustré par l'exemple que nous avons cité précédemment.

anno. Il contadino vende allora di nuovo una quantità  $x_2$  di bestiame e ne trae un ricavo  $f_2(x_2)$ . E così via, negli anni seguenti. Passati alcuni anni  $n-1$ , il contadino invecchiato desidera cessare l'allevamento e vende il bestiame rimanente. Compito della ricerca operativa è di indicare al contadino una politica di vendita che gli permetta di conseguire l'utile massimo. Siccome le relazioni non sono lineari, non è possibile ricorrere alla «programmazione lineare». La «programmazione dinamica» consente invece di trovare la soluzione cercata. La funzione generale è la seguente:

Il ricavo totale  $Q$  corrisponde alla somma di diverse funzioni

$$Q = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

Si tratta ora di trovare il valore estremo (massimo o minimo) di  $Q$ , tenendo conto delle condizioni accessorie, e di determinare i valori corrispondenti a  $x_1 \dots x_n$ . Quale semplice condizione accessoria abbiamo per esempio

$$x_1 + x_2 \dots + x_n \leq M$$

Un simile problema di valore estremo non può essere risolto in una sola fase. Il valore ottimo dev'essere ricercato gradualmente, ripartendo il quesito in problemi parziali.

Il primo problema è il seguente:

La grandezza parziale  $Q_1 = f_1(x_1)$  deve raggiungere un valore massimo per  $x_1 \leq M$ . Questo massimo dipende da  $M$ . Abbiamo quindi una funzione

$$Q_1 \text{ mass.} = F_1(M)$$

Ogni valore di  $x_1$  corrisponde a un valore ben determinato di  $M$ . Nella seconda fase si ricerca un valore massimo di

$$Q_2 = f_1(x_1) + f_2(x_2) \text{ con } x_1 + x_2 \leq M$$

cioè

$$Q_2 = f_2(x_2) + F_1(M-x_2)$$

Il massimo di  $Q_2$  dipende pure da  $M$ . Otteniamo

$$Q_2 \text{ mass.} = F_2(M)$$

La funzione  $F_2(M)$  può pertanto essere determinata partendo da  $F_1(M)$ . Simultaneamente, a un certo valore di  $M$  corrispondono determinati valori di  $x_1$  e  $x_2$ . Analogamente, per la  $K$ -esima fase avremo

$$Q_k = f_k(x_k) + F_{k-1}(M-x_k)$$

e  $Q_k \text{ mass.} = F_k(M)$

Otteniamo così un sistema d'equazioni funzionali che possono condurci alla soluzione desiderata con il calcolo ricorrente di  $F_k(M)$ .

Questo procedimento di ricerca della soluzione ottima procedendo fase per fase può essere illustrato grazie all'esempio precedente. Per le vendite scaglionate nel tempo, il processo di ripartizione è già stabilito.

Per maggior semplicità, ammettiamo che le funzioni dei ricavi parziali siano identiche e date da

$$f(x) = x^b \text{ ove } b \leq 1$$

Etant donné que les ventes sont réparties dans le temps, le système de répartition est fixé.

Pour plus de simplicité, nous admettons que les fonctions des recettes partielles sont identiques et données par

$$f(x) = x^b \text{ tout en ayant } b \leq 1$$

Ainsi la fonction principale s'écrit

$$Q = x_0^b + x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b = \sum_{k=0}^n x_k^b$$

Nous procédons encore à un changement de numérotation et désignons par  $x_0$  la vente effectuée à la fin de la dernière année et par  $x_n$  la vente qui a eu lieu au début de la première année. On se propose de trouver la valeur maximum de  $Q$ , tenant compte des contraintes suivantes:

$$0 \leq x_k \leq M_k \text{ avec } M_{k-1} = a(M_k - x_k) \\ k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ et } M_0 = x_0, M_n = M$$

Etant donné que la valeur limite  $M_{k-1}$  dépend de la quantité  $x_k$  vendue précédemment, on remarque clairement le dynamisme du problème.

Nous commençons le calcul par la dernière année, lorsqu'on vend le solde ( $x_0 = M_0$ ) et nous obtenons le problème partiel indiqué par la première ligne du tableau I; nous en déterminons la fonction  $F_0(M_0)$ . Ensuite, nous revenons en arrière d'un an et nous traitons le problème partiel indiqué par la deuxième ligne.

Comme nous l'avons déjà mentionné,  $F_1(M_1)$  peut être déterminé au moyen de  $F_0(M_0)$  en tenant compte des contraintes correspondantes. Pour faciliter la vue d'ensemble, on a introduit dans le tableau le coefficient  $q$ .

$$q = a^{1-b}$$

L'équation principale si scrive

$$Q = x_0^b + x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b = \sum_{k=0}^n x_k^b$$

Procediamo ancora a un cambiamento di denominazione, designando con  $x_0$  la vendita effettuata alla fine dell'ultimo anno e con  $x_n$  la vendita avvenuta all'inizio del primo anno. Si desidera trovare il valore massimo di  $Q$ , con le condizioni ausiliarie

$$0 \leq x_k \leq M_k \text{ con } M_{k-1} = a(M_k - x_k) \\ K = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } M_0 = x_0, M_n = M$$

Siccome il valore limite  $M_{k-1}$  dipende dalla quantità  $x_k$  venduta precedentemente, la dinamica del problema risalta chiaramente.

Cominciando con l'ultimo anno, in cui tutto viene venduto ( $x_0 = M_0$ ), otteniamo il problema parziale indicato nella prima linea della *tabella I*, dal quale ricaviamo la funzione  $F_0(M_0)$ . In seguito facciamo un passo d'un anno indietro e trattiamo il problema parziale indicato nella seconda linea.

Come già detto,  $F_1(M_1)$  può essere determinato per il tramite di  $F_0(M_0)$ , tenendo conto delle condizioni accessorie. Per maggior chiarezza, abbiamo introdotto il coefficiente  $q$  nella tabella.

$$q = a^{1-b}$$

Procedendo passo a passo arriviamo alla  $n$ -esima linea e otteniamo

$$Q \text{ mass} = F_n = M^b \left[ \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]^{1-b}$$

Per determinare le singole quantità da vendere, calcoliamo procedendo a rovescio alternativamente i valori di  $x_k$  e di  $M_k$ , ove

$$M_{k-1} = a(M_k - x_k)$$

Tableau I — Tabella I

Année Anno	$Q_k = f_0(x_0) + f_1(x_1) + \dots + f_k(x_k) = F_{k-1}(M_k - x_k) + f_k(x_k)$	Q max. à Q mass. per	F (M)
n	$Q_0 = x_0^b = O + x_0^b$	$x_0 = M_0$	$F_0 = M_0^b$
n-1	$Q_1 = x_0^b + x_1^b = F_0 \left\{ M_0 = a(M_1 - x_1) \right\} + x_1^b$	$x_1 = \frac{1}{1+q} \cdot M_1$	$F_1 = M_1^b (1+q)^{1-b}$
	$Q_2 = x_0^b + x_1^b + x_2^b = F_1 \left\{ M_1 = a(M_2 - x_2) \right\} + x_2^b$	$x_2 = \frac{1}{1+q+q^2} \cdot M_2$	$F_2 = M_2^b (1+q+q^2)^{1-b}$
	$\vdots$		
1	$Q_{n-1} = x_0^b + x_1^b + \dots + x_{n-1}^b = F_{n-2} \left\{ M_{n-2} = a(M_{n-1} - x_{n-1}) \right\} + x_{n-1}^b$	$x_{n-1} = \frac{q-1}{q^{n-1}} \cdot M_{n-1}$	$F_{n-1} = M_{n-1}^b \left[ \frac{q^n - 1}{q - 1} \right]^{1-b}$
	$Q_n = x_0^b + x_1^b + \dots + x_n^b = F_{n-1} \left\{ M_{n-1} = a(M_n - x_n) \right\} + x_n^b$	$x_n = \frac{q-1}{q^{n+1}-1} \cdot M_n$	$F_n = M_n^b \left[ \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]^{1-b}$

Par opérations successives, on atteint la n<sup>me</sup> ligne et on obtient

$$Q \text{ max.} = F_n = M^b \left[ \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]^{1-b}$$

Pour déterminer les différentes quantités vendues, on calcule en arrière alternativement les valeurs  $x_k$  et  $M_k$  tout en ayant  $M_{k-1} = a (M_k - x_k)$ .

Si nous posons par exemple

$$a = 2, b = 0,5, n = 6, M = 127$$

nous obtiendrons la recette maximum de la façon suivante:

$$Q \text{ max.} = F_6 = \sqrt{127} \cdot \sqrt{\frac{2^7-1}{2-1}} = 127$$

et les quantités partielles vendues:

Années	0	1	2	3	4	5	6	
Effectif $M_k$	127	252	496	960	1792	3072	4096	
Quantité vendue $x_k$	1	4	16	64	256	1024	4096	
Recette	1	2	4	8	16	32	64	= 127

Puisque, par l'exemple choisi, on n'a tenu qu'à expliquer le principe de la programmation dynamique, on a négligé, pour simplifier le problème, les frais supplémentaires occasionnés pour abriter un cheptel plus nombreux.

Tous les problèmes qui peuvent se décomposer en un certain nombre d'étapes  $n$  et pour lesquels chaque étape est caractérisée par des faits bien définis sont susceptibles d'être traités par la méthode de la programmation dynamique. Il est important de noter que des modifications apportées au cours d'une certaine étape peuvent influencer les étapes suivantes, mais en aucun cas elles ne doivent pouvoir exercer une action sur une étape précédente. La programmation dynamique se fonde sur le fait que dans un problème à plusieurs phases, chaque problème partiel de recherche d'une valeur maximum de l'étape  $k_n$  a le même déroulement qu'il soit considéré seul avec ses contraintes propres ou qu'il fasse partie d'un problème d'ensemble de recherche optimum.

#### Méthode de simulation

Bien souvent, les problèmes posés à la recherche opérationnelle ne s'expriment pas par des systèmes d'équations que l'on puisse résoudre au moyen de programmes linéaires ou dynamiques. En pareil cas, on essayera par simulation ou en utilisant des modèles adroitement choisis d'imiter aussi bien que possible les phénomènes à étudier, par exemple la distribution de Poisson pour des problèmes de temps d'attente et de files d'attente. Ces méthodes nous donnent la possibilité de comparer entre eux différents procédés d'exploitation et de trouver en procédant à des essais les meilleures solutions économiques. A l'aide des méthodes de simulation et en utilisant des modèles, on peut par exemple organiser sur le papier des divisions entières de production et on peut y procéder à toutes sortes d'investigations.

Se poniamo per esempio:

$$a = 2 \quad b = 0,5 \quad n = 6 \quad M = 127$$

il ricavo massimo sarà

$$Q \text{ mass} = F_6 = \sqrt{127} \cdot \sqrt{\frac{2^7-1}{2-1}} = 127$$

e le singole quantità da vendere saranno:

Anni	0	1	2	3	4	5	6	
Effettivo $M_k$	127	252	496	960	1792	3072	4096	
Quantità da vendere $x_k$	1	4	16	64	256	1024	4096	
Ricavo	1	2	4	8	16	32	64	= 127

Poichè nel nostro esempio abbiamo voluto limitarci a spiegare il principio della programmazione dinamica, per semplificare il problema abbiamo tralasciato gli oneri supplementari di asilo d'una mandra più numerosa.

Tutti i problemi che possono essere suddivisi in un certo numero  $n$  di fasi ognuna delle quali sia caratterizzata da fatti ben definiti, possono essere risolti con il metodo della programmazione dinamica. Importa però che le modificazioni intervenenti in una certa fase possano influenzare quelle seguenti, ma non le fasi che procedono. La programmazione dinamica è fondata sul fatto che in un problema a parecchie fasi, ogni problema parziale di ricerca d'un valore ottimo nella fase  $k_n$  si svolge nello stesso modo, tanto se considerato da solo con le proprie condizioni marginali, quanto se considerato quale processo parziale nel problema d'insieme del quale si ricerca la soluzione ottima.

#### Metodo di simulazione

Sovente non è possibile esprimere i problemi di ricerca operativa con sistemi di equazioni risolvibili grazie alla programmazione lineare o dinamica. In questi casi bisogna tentare di rappresentare il più esattamente possibile lo svolgimento delle operazioni da studiare mediante simulazione oppure con campioni abilmente scelti, per esempio la ripartizione di Poisson per i problemi di attesa e delle code di attesa. Questi metodi ci offrono la possibilità di comparare tra di loro diversi fenomeni d'esercizio aziendale e di trovarne sperimentalmente le migliori soluzioni economiche. Grazie ai metodi di simulazione e ricorrendo a campioni, è per esempio possibile organizzare a tavolino intere divisioni di produzione, procedendovi a qualsiasi desiderabile investigazione.

L'elaborazione dei sistemi matematici di simulazione non è facile e richiede molta esperienza. Non esistono ancora procedimenti applicabili in ogni caso. Ogni problema deve invece essere esaminato e trattato individualmente.

Molto sovente, simili problemi sono legati a meccanismi aleatori non esprimibili mediante una funzione matematica. In questo caso si utilizza il metodo detto

La réalisation de systèmes de simulation n'est pas aisée et demande beaucoup d'expérience. Il n'existe pas encore de procédés qui puissent être utilisés dans tous les cas. Chaque problème au contraire doit être examiné et traité individuellement.

Très souvent, les problèmes posés sont liés à des mécanismes aléatoires qui ne peuvent être rendus par une fonction mathématique. Dans ce cas, on utilise la méthode appelée de «Monte-Carlo». Cette méthode consiste à simuler sur un échantillon artificiel des phénomènes aléatoires, par exemple l'arrivée des clients à un guichet postal, la mise hors service de forces de travail ou de machines. Le principe de la méthode de Monte-Carlo est l'utilisation de chiffres apparaissant au hasard et qui imitent un phénomène statistique.

### *Jeux stratégiques*

On parle de jeux stratégiques dans un problème de décision, les participants (généralement deux) s'efforcent d'atteindre le même but, mais s'excluent mutuellement, c'est-à-dire qu'un seul peut atteindre le but recherché. Le succès d'un participant est lié à la défaite de l'autre. Dans ces problèmes, le résultat atteint par la stratégie d'un joueur dépend de la stratégie utilisée par son adversaire. Lorsqu'on recherche la solution optimum, il y a donc lieu de tenir compte d'influences étrangères au parti considéré. Des problèmes de ce genre se rencontrent entre autres dans des situations stratégiques militaires ou dans certains jeux de société (par exemple les jeux d'échecs ou de cartes).

Les règles du jeu définissent pour chaque combinaison possible de stratégies un perdant et un gagnant. Du fait que chaque joueur ne peut décider que de sa propre stratégie et non de celle de son partenaire, le résultat d'un jeu ne peut être connu d'avance. La tâche de la recherche opérationnelle consiste à déterminer la ou les stratégies qu'un joueur doit utiliser pour obtenir le gain le plus élevé sans que l'on connaisse préalablement la stratégie qui sera utilisée par l'adversaire.

Pour traiter les questions qui apparaissent dans les jeux, diverses théories ont été établies. Elles admettent que le gain total des deux joueurs est zéro, et que le gain d'un joueur A peut être indiqué pour chaque combinaison de toutes les stratégies. On cherche alors les probabilités avec lesquelles le joueur A doit utiliser les différentes stratégies pour jouer d'une façon optimum.

Les études sont entreprises généralement en admettant que l'adversaire joue également d'une façon optimum. Si celui-ci n'adopte pas une attitude optimum, le joueur A gagnera en général d'autant plus sûrement.

Etant donné que différentes stratégies sont possibles, à la suite de chacun des coups joués, et qu'en plus les stratégies d'un joueur doivent être combinées avec les stratégies possibles de l'adversaire, il en résulte un grand nombre d'équations qui peuvent

di «Montecarlo» che consiste nel simulare artificialmente dei fenomeni dipendenti dal caso, per esempio l'arrivo dei clienti allo sportello postale, la ricezione di ordinazioni, le assenze del personale, guasti dei macchinari, ecc. La base del metodo di Montecarlo è appunto l'uso delle cosiddette cifre casuali imitanti un fenomeno statistico.

### *Giochi strategici*

Si parla di giuoco strategico allorchè, in un problema di decisione, le parti interessate (generalmente due) si sforzano di conseguire il medesimo fine escludendosi mutualmente. Il guadagno d'una parte corrisponde a una perdita per l'altra. Il risultato della strategia d'un giocatore dipende inoltre dalla strategia dell'avversario. Nella ricerca delle migliori soluzioni bisogna pertanto tener conto delle influenze estranee. I problemi di questo genere sono tra l'altro presenti in situazioni strategiche militari o in certi giochi di società (per esempio gli scacchi o le carte).

Per ogni possibile combinazione di strategie, le regole del giuoco definiscono un perdente e un vincitore. Siccome ogni giocatore può determinare soltanto la propria strategia, ma non quella del suo avversario, l'esito di una partita non può esser noto in anticipo. Compito della ricerca operativa è quindi di determinare la o le strategie di cui un giocatore dovrà servirsi per ottenere il guadagno più elevato, senza conoscere la strategia che l'avversario utilizzerà.

Per trattare le questioni di giuoco, diverse teorie sono state elaborate. Esse ammettono che il guadagno totale di due giocatori è uguale a zero e che i guadagni di un giocatore A possono essere indicati per ogni combinazione di tutte le strategie. Si cercano allora le probabilità in cui il giocatore A deve utilizzare le diverse strategie per giocare nel miglior modo. Si studiano normalmente i casi in cui anche l'avversario gioca nel miglior modo. Se questi non gioca nel miglior modo, il giocatore A vincerà tanto più sicuramente.

Siccome le diverse strategie dipendono dalla combinazione delle singole mosse, e le strategie d'un giocatore devono inoltre essere combinate con le strategie possibili dell'avversario, ne risulta un gran numero di equazioni che possono essere rappresentate con matrici. Le diverse colonne rappresentano allora per esempio le strategie di un giocatore o i provvedimenti presi dallo stesso, le linee orizzontali le diverse strategie dell'avversario. Il guadagno risultante dalla combinazione di due strategie (corrispondente alla perdita subita dell'avversario) è riportato al suo posto nella matrice. Grazie alla programmazione lineare o dinamica è quindi possibile risolvere i sistemi d'equazioni rappresentati dalle matrici e stabilire le regole del comportamento che assicurino il miglior risultato.

Le diverse strategie e le loro influenze sono spesso difficilissime da descrivere e da trasporre in cifre. Per questo motivo la maggior difficoltà dei problemi relativi alle teorie di giuoco consiste appunto nel trovare le equazioni adeguate.

être présentées par des matrices. Les différentes colonnes représentent alors par exemple les stratégies ou les mesures prises par un joueur, les lignes horizontales les différentes stratégies de l'adversaire. Le gain résultant de la combinaison de deux stratégies (qui représente également la perte subie par l'adversaire) est indiqué à l'endroit correspondant dans la matrice. A l'aide de la programmation linéaire ou dynamique, il est possible de résoudre les systèmes d'équations représentés par les matrices et il est possible d'établir les règles de comportement assurant un résultat optimum.

Les diverses stratégies et leurs influences sont souvent très difficiles à décrire et à indiquer par des chiffres. Cela implique que la plus grosse difficulté des problèmes se rapportant aux théories de jeux est d'établir les équations correspondantes.

## Bibliographie / Bibliografia

- C. W. Churchman, R. L. Ackhoff, E. L. Arnoff*: Introduction to operations research; 1957, Verlag John Wiley & sons, London/New York.
- A. Kaufmann*: Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle; 1959, Editions Dunod, Paris.
- E. P. Billeter*: Hauptprobleme der Unternehmensforschung; Unternehmensforschung, Band I, Heft 4, 1956/57, Physica-Verlag, Würzburg.
- A. Linder*: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure; 1946 und 1951, Verlag Birkhäuser, Basel.
- W. Krelle, H. P. Künzi*: Lineare Programmierung; 1958, Verlag Industrielle Organisation, Zürich.
- F. Ferschl*: Grundzüge des «Dynamic Programming»; Unternehmensforschung, Band 3, Heft 2, 1959, Physica-Verlag, Würzburg.
- F. Ferschl*: Entscheidungsproblem und Strategische Spiele; Unternehmensforschung, Band 2, Heft 2, 1958, Physica-Verlag, Würzburg.

## Verschiedenes — Divers — Notizie varie

### Vom technischen Aufwand der PTT anlässlich der Radweltmeisterschaften 1961

Die Übertragungen sportlicher Ereignisse zählen zu den wichtigsten Sendungen der Eurovision. Nachdem unser Land in diesem Winter die internationalen Lauberhornrennen (Wengen) und die Eishockey-Weltmeisterschaften (Genf/Lausanne) an die Eurovision beigesteuert hatte, vermittelte es Ende August/Anfang September eine weitere grosse sportliche Veranstaltung: die Radweltmeisterschaften 1961.

Ob Fernsehzuschauer, Radiohörer oder Zeitungsleser, sie alle sind sich heute gewohnt, über derartige Sportereignisse rasch und zuverlässig orientiert zu werden. Die Berichterstattung ist heute eine Selbstverständlichkeit und niemand macht sich über deren technische Bewältigung viele Gedanken. Es dürfte daher von Interesse sein, einmal den durch die PTT geleisteten Beitrag vor Augen zu führen, wie er für die Berichterstattung von diesem sportlichen Ereignis nötig war.

Die Radweltmeisterschaften bestehen bekanntlich aus zwei voneinander unabhängigen Wettbewerben, den Bahnrennen, die vom 25. bis 30. August im Stadion Zürich-Oerlikon stattfanden, und den Strassenrennen, die auf der auf 13 km erweiterten Bremgarten-Rennstrecke bei Bern am 2. und 3. September ausgetragen wurden.

#### 1. Die Bahnrennen in Zürich-Oerlikon

Aus dem Stadion Zürich-Oerlikon konnten sieben Übertragungen auf die Bildschirme der Schweiz sowie neun weiterer europäischer Sendegesellschaften gegeben werden. Die Fernsehaufnahmen besorgte die Tessiner Equipe des Schweizer Fernsehens mit ihrem neuen, kürzlich von der PTT übergebenen Reportagezug.

Da es zum gesetzlich geregelten Pflichtenkreis der PTT-Betriebe gehört, die elektrischen und radioelektrischen Einrichtungen zur öffentlichen Verbreitung von Fernseh- und Radioprogrammen zur Verfügung zu halten, war es auch in diesem Fall Aufgabe der PTT, für die Übertragungseinrichtungen für Bild und Ton besorgt zu sein.

Die Bildübertragung zwischen der Rennbahn Örlikon und dem nächsten Einspeisepunkt in das bestehende drahtlose Bildübertragungsnetz (Uetliberg) wurde mit einer mobilen Mikrowellenverbindung bewerkstelligt. Da diese Verbindungen auf optische Sicht zwischen Sender und Empfänger angewiesen sind, wurde der Sender etwa 100 m von der eigentlichen Bildquelle entfernt, auf dem sich in der Nähe befindlichen Hallenstadion, aufgestellt. Die Verbindung zwischen Reportagewagen und Mikrowellensender geschah durch ein Koaxialkabel.

Die Tonübertragungen erforderten die Bereitstellung einer grossen Zahl von Verbindungen, was einmal dadurch bedingt war, dass nicht nur für jede Sendegesellschaft, sondern für jedes angeschlossene Sprachgebiet die notwendigen Kanäle zur Verfügung gehalten werden mussten. So benötigte allein die Schweiz für dasselbe Fernsehbild drei verschiedene Begleitkommentare, zu denen noch ebensoviele Leitungen für Radio kamen. Insgesamt waren 14 Sprechkabinen für Fernsehkommentatoren nötig. Jede von ihnen war mit je einer Sprech- und einer Rückmeldeleitung und selbstverständlich mit einem Fernsehmonitor ausgerüstet. Für das Radio wurden 15 Sprechkabinen mit derselben Tonausrüstung, das heisst je einer Sprech- und Rückmeldeleitung, benötigt. Ausserdem wurden bereitgestellt: 9 Telexanschlüsse, 1 Bildtelegraph, 21 Pressesprechkabinen mit 3 Vermittlungsstellen, 18 feste Presseanschlüsse sowie die dafür notwendigen Dienstleitungen, so dass sich die stattliche Zahl von über 125 erstellten Anschlüssen ergab. Dass bei diesem Bedarf die an Ort und Stelle vorhandenen Anschlussmöglichkeiten nicht ausreichten, kann daher nicht verwundern. Aus diesem Grunde war es notwendig, ein 600 m langes 80 × 2paariges Kabel zu verlegen.

#### 2. Die Strassenrennen in Bern

Die Verhältnisse auf der Bremgarten-Rundstrecke waren, bedingt durch die Ausdehnung und die topographischen Gegebenheiten, besonders was die Bildübertragung betraf, merklich komplizierter als in Zürich-Oerlikon. Einen Überblick vermittelt Fig. 1.

Längs der Rundstrecke standen neun feste Fernsehcameras im Einsatz. Sechs stammten aus dem Bestand der Reportagewagen der deutschen, beziehungsweise der französischen Schweiz, die restlichen drei stellten die PTT aus ihrer Einsatzreserve zur Verfügung.

Ursprünglich hoffte das Schweizer Fernsehen, zusätzlich zu den festen, auch bewegliche Kameras zum Einsatz bringen zu können, welche die Strecke mit den Wettkämpfern abgefahren hätten. Abgesehen von der allgemeinen Geländebeschaffenheit, verläuft der grösste Teil der Rundstrecke im Hochwald. Damit war der Hauptteil des ganzen Parcours, der für eine Mikrowellenverbindung unerlässlich optischen Sicht mit dem Einspeisepunkt (Bantiger) entzogen. Aus diesem Grund wurden durch die PTT Versuche mit anderen Verbindungsmitteln durchgeführt, die aber zeigten, dass mit vernünftigen Mitteln nicht zum Ziele zu gelangen sei. Die Idee der fahrenden Kameras musste daher fallengelassen werden.