

Zeitschrift:	Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri
Herausgeber:	Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe
Band:	39 (1961)
Heft:	10
Artikel:	Die Bestimmung des zeitlichen Mittekwertes einer statistischen Rechteckwelle mittels Abtastung
Autor:	Müller, A.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-875261

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

15 Jahre Erfahrung mit Leitungsdurchschaltern in schweizerischen Telephonnetzen haben den Beweis für die Vorteile und den Nutzen dieser Einrichtungen erbracht. Mit der Konstruktion des neuen Typs 99-15-3 wurde einem verbreiteten Bedürfnis in zweckmässiger Weise entsprochen. Zusammen mit den bestehenden kleineren Typen ermöglicht diese Einrichtung den Fernmeldediensten, dem Mangel an Teilnehmerleitungen auf wirtschaftliche und den verschiedenen Verhältnissen angepasste Weise zu begegnen.

Bibliographie

- [1] Kurz, E. Leitungsdurchschalter. Le connecteur automatique de lignes. Technische Mitteilungen PTT, 1950, Nr. 6, S. 228 ff.
- [2] Gyger, P. Leitungsdurchschalter 19-3-0 mit Pendelsteuerung. Connecteur automatique de lignes 19-3-0 commandé par pendules. Technische Mitteilungen PTT, 1956, Nr. 5, S. 217 ff.
- [3] Häni, P., und Trachsel, F. Das neue Telephonsystem Trachsel-Gfeller mit Kreuzwählern. Le nouveau système téléphonique Trachsel-Gfeller à sélecteurs crossbars. Technische Mitteilungen PTT, 1955, Nr. 3, S. 115 ff.

A. Müller, Zürich

Die Bestimmung des zeitlichen Mittelwertes einer statistischen Rechteckwelle mittels Abtastung*

DK : 621.317.018.752

Der Mittelwert a_0 der Rechteckwelle berechnet sich dann zu

$$a_0 = z \frac{T}{T_0} \quad 0 \leq a_0 \leq 1 \quad (1-1)$$

wobei z die Anzahl der während der Messzeit T_0 gezählten Koinzidenzimpulse bedeutet.

Eine Berechnung des bei dieser Methode auftretenden Messfehlers scheint in der Literatur nicht vorzu-

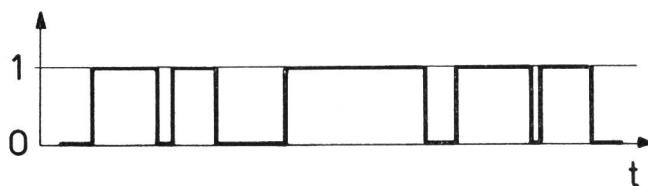


Fig. 1. Statistische Rechteckwelle

Betrachten wir beispielsweise eine Telefonleitung und identifizieren den Zustand 0 mit «unbelegt» und den Zustand 1 mit «belegt», so ergibt der Mittelwert der Rechteckwelle die mittlere Belegung der Leitung.

Zur Bestimmung des Mittelwertes über eine bestimmte Messzeit T_0 kann man folgendermassen vorgehen: Man erzeugt eine Koinzidenz zwischen der Rechteckwelle und einem mit der Repetitionsfrequenz $1/T$ auftretenden sehr kurzen Abtastimpuls. Die von der Koinzidenzschaltung abgegebenen Impulse werden gezählt (vgl. Figur 2).

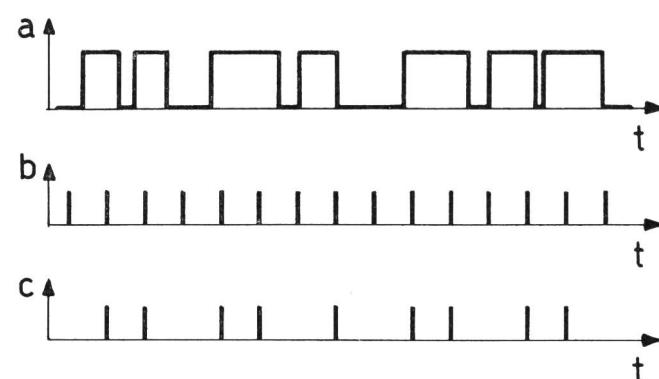


Fig. 2. Das Abtastverfahren
a) Statistische Rechteckwelle
b) Abtastimpulse
c) Koinzidenzimpulse

* Mitteilung aus dem Institut für Fernmeldetechnik der ETH.

kommen. Dem Autor ist einzig ein Artikel von C. Palm¹ bekannt, in dem eine ähnliche Berechnung durchgeführt ist, jedoch unter wesentlich spezielleren Voraussetzungen.

Die Beziehung (1-1) ist streng genommen nur richtig, wenn die Zeitdauer der Abtastimpulse verschwindend klein ist. Praktisch bedeutet dies, dass diese Dauer mehrere Größenordnungen kleiner sein muss als die kürzeste auftretende Dauer eines der beiden Zustände der Rechteckwelle.

Tasten wir die gleiche Rechteckwelle mit verschiedenen Impulsreihen der gleichen Frequenz, aber verschiedener Phasenlage ab, so werden wir im allgemeinen verschiedene Werte für z erhalten. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass die Verteilungsdichte $f(z)$ der z -Werte eine Normalverteilung ist (vgl. Figur 3). Mit Hilfe der Streuung σ dieser Verteilung lässt sich der durch die Abtastung erzeugte Fehler berechnen.

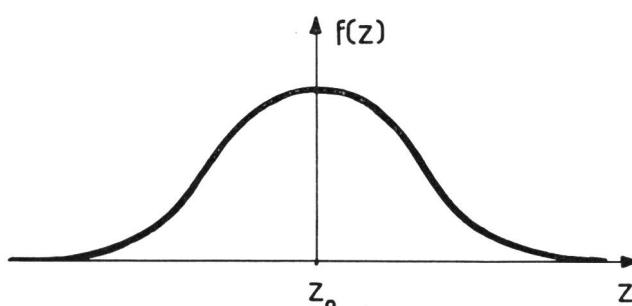


Fig. 3. Die Verteilungsdichte $f(z)$ der z -Werte

2. Genauigkeit der Abtastmethode

In Figur 4 sind die wirkliche Rechteckwelle, die gemessene fiktive Rechteckwelle und der Messfehler dargestellt.

Man sieht, dass je «1»-Zustand zwei Fehler ϵ_i und ϵ'_i auftreten, wobei

$$\begin{aligned} -T < \epsilon_i &\leq 0 \\ 0 &\leq \epsilon'_i < +T \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für den je «1»-Zustand sich ergebenden Fehler

$$\delta_i = \epsilon_i + \epsilon'_i$$

Im Anhang 1 wird gezeigt, dass dieser Fehler δ_i unter sehr allgemeinen Bedingungen die folgende Verteilungsdichte hat (vgl. Figur 5):

$$\begin{aligned} f(\delta_i) &= \frac{T + \delta_i}{T^2} \quad \text{im Intervall } (-T, 0) \\ &= \frac{T - \delta_i}{T^2} \quad \text{im Intervall } (0, +T) \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \quad (2-1)$$

Der gesamte Messfehler δ ist gleich der Summe aller während der Messzeit auftretenden δ_i . Alle δ_i haben dieselbe Verteilungsdichte $f(\delta_i)$, und wir setzen

¹ Palm, C.: Mättnoggrannhet vid bestämnig av trafikmängd enligt genomsökningsförfarandet. Tekniska meddelanden från Kungl. telegrafstyrelsen Nr. 7-9, 1941.

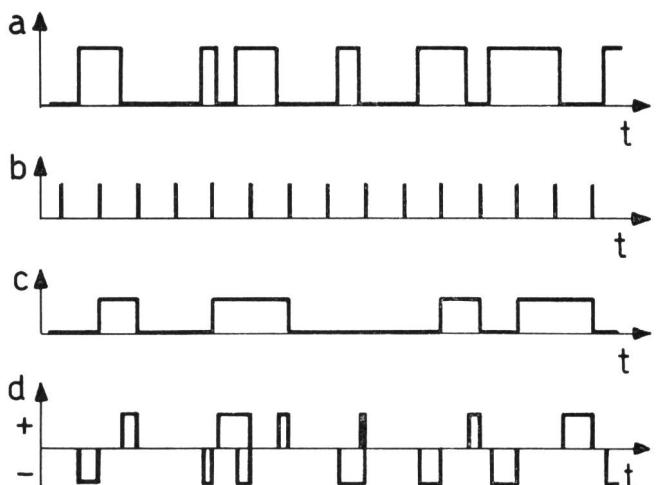


Fig. 4. Zur Berechnung des Abtastfehlers

- a) Statistische Rechteckwelle
- b) Abtastimpulse
- c) Gemessene fiktive Rechteckwelle
- d) Fehler

voraus, dass sie statistisch unabhängig sind. Es ist deshalb möglich, den Mittelwert m und die Streuung σ^2 der Verteilungsdichte $f(\delta)$ des Fehlers zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} m &= \sum_i m_i = k \cdot m_i \\ \sigma^2 &= \sum_i \sigma_i^2 = k \cdot \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (2-2)$$

wobei k die Anzahl der während der Messzeit auftretenden «1»-Zustände ist. Für m_i und σ_i^2 erhält man

$$\begin{aligned} m_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_i \cdot f(\delta_i) \cdot d\delta_i = 0 \\ \sigma_i^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_i - m_i)^2 \cdot f(\delta_i) \cdot d\delta_i = \frac{T^2}{6} \end{aligned} \quad (2-3)$$

Somit wird

$$\begin{aligned} m &= 0 \\ \sigma^2 &= \frac{k \cdot T^2}{6} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Eine Aussage über den Verlauf der Verteilungsdichte $f(\delta)$ liefert der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dieser besagt folgendes: Es sei $X = A_1 + A_2 + \dots + A_k$, wobei die A_i statistisch unabhängige Zufallsgrößen sind. Dann nähert sich die Verteilungsdichte $f(X)$ mit zunehmendem k immer stärker einer Normalverteilung (Figur 6).

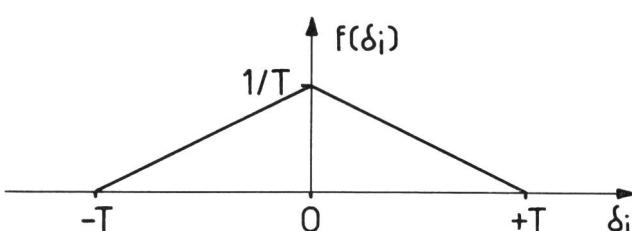


Fig. 5. Die Verteilungsdichte $f(\delta_i)$

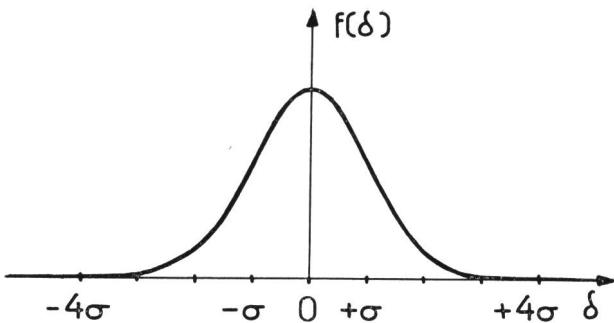


Fig. 6. Die Normalverteilung

In der Folge soll k so gross sein, dass wir $f(\delta)$ als Normalverteilung betrachten können. Für die Normalverteilung ist bekannt, dass Werte ausserhalb von $\pm 4\sigma$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $6 \cdot 10^{-5}$ angenommen werden. Für uns bedeutet dies, dass der grösste Fehler, der auftreten kann, praktisch gleich $\pm 4\sigma$ ist, also

$$|\delta_{\max}| = 4\sigma = 4 \cdot T \sqrt{\frac{k}{6}} \quad (2-5)$$

Jetzt ist es einfach, den relativen Messfehler δ_{rel} zu berechnen. Es ist

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{4 \cdot T \sqrt{k/6}}{a_o \cdot T_o} \leq b \quad (2-6)$$

wobei a_o = Mittelwert der Rechteckwelle

T_o = Messzeit

b = zulässiger relativer Fehler

In der Praxis sind meist b und T_o gegeben und T gesucht. Man erhält aus (2-6)

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{b \cdot a_o \cdot T_o}{\sqrt{k}} \quad (2-7)$$

3. Die Genauigkeit bei gleichzeitiger Messung von n Kanälen

Es soll die Summe der Mittelwerte von n verschiedenen Rechteckwellen auf einem Instrument angezeigt werden. Die Messeinrichtung weist also n Eingänge auf, an die je eine Rechteckwelle angeschlossen werden kann. Wir interessieren uns wieder für den relativen Fehler der Anzeige.

Der Berechnungsgang ist genau gleich, wie er in Abschnitt 2 für einen Kanal durchgeführt wurde. Setzen wir

$$K = \sum_{i=1}^n k_i \quad (3-1)$$

$$A_o = \sum_{i=1}^n a_{oi}$$

so erhalten wir für den maximalen praktisch auftretenden Fehler $|\Delta_{\max}|$ (vgl. 2-5)

$$|\Delta_{\max}| = 4 \cdot T \sqrt{\frac{K}{6}} \quad (3-2)$$

$1/T$ ist dabei die Frequenz, mit der jede einzelne Leitung abgetastet wird. Der relative Fehler Δ_{rel} wird (vgl. 2-6)

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{4 \cdot T \sqrt{K/6}}{A_o \cdot T_o} \leq b \quad (3-3)$$

Sind b und T_o gegeben, so erhält man aus (3-3) für T (vgl. 2-7)

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{b \cdot A_o \cdot T_o}{\sqrt{K}} \quad (3-4)$$

4. Messung auf weniger als n Kanälen mit einer Messeinrichtung, die für n Kanäle vorgesehen ist

Gegeben sei eine Messapparatur zur gleichzeitigen Messung auf n Kanälen. Sie weist also n Eingänge auf. Wir setzen voraus, dass diese n -Eingänge mit einer Frequenz $1/nT$ zyklisch abgetastet werden. Jeder einzelne Kanal wird dann, wie in Abschnitt 3 vorausgesetzt, mit der Frequenz $1/T$ abgetastet. Wir wollen nun den relativen Messfehler berechnen, der entsteht, wenn mit dieser Apparatur auf m Kanälen ($m < n$) gemessen wird.

Zur Vereinfachung der Darstellung führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{n}{m} = s, s > 1 \quad (4-1)$$

$$[s] = \text{ganzer Teil von } s \\ = \text{grösste ganze Zahl } \leq s \quad (4-2)$$

Weiterhin setzen wir voraus, dass jede der m Rechteckwellen an $[s]$ Eingänge der Messeinrichtung angeschlossen sei, und zwar an die Eingänge

$$x, x + \frac{n}{[s]}, x + \frac{2n}{[s]}, \dots, x + \frac{([s]-1) \cdot n}{[s]}$$

Jede Rechteckwelle wird dann mit der Frequenz $[s]/T$ abgetastet.

Mit den Abkürzungen

$$K' = \sum_{i=1}^m k_i \quad (4-3)$$

$$A'_o = \sum_{i=1}^m a_{oi}$$

erhält man für den relativen Fehler Δ_{rel} und für T

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{4 \cdot T/[s] \cdot \sqrt{K'/6}}{A'_o \cdot T_o} \leq b \quad (4-4)$$

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{b \cdot A'_o \cdot T_o}{\sqrt{K'}} \cdot [s] \quad (4-5)$$

5. Berücksichtigung der Anzeige-Unsicherheit

Die Beziehungen (2-7) und (3-4) ergeben für kleine Werte von a_o beziehungsweise A_o sehr hohe Werte für die Abtastfrequenz $1/T$. Für kleine Werte von a_o beziehungsweise A_o ist aber das Kriterium des relativen Fehlers meistens nicht mehr wichtig, da dann der absolute Fehler kleiner wird als die Anzeige-Unsicherheit der Messeinrichtung.

Wir nehmen nun an, der gemessene Wert von $A_o \cdot T_o$ (in der Folge werden wir nur noch A_o , K und Δ schreiben, obwohl die gleichen Beziehungen auch für a_o , k und δ gelten) werde von der Messeinrichtung nur auf $\pm \varepsilon$ genau angezeigt. Der zulässige Fehler $|\Delta_{\max}|$ hat dann die in *Figur 7* dargestellte Abhängigkeit von A_o .

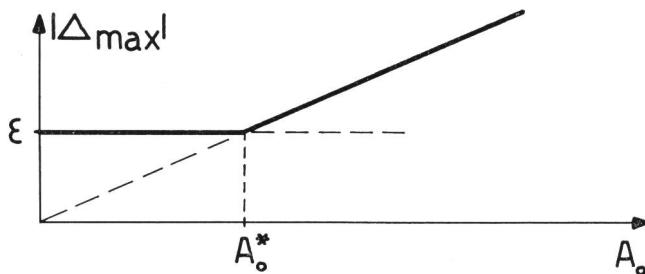


Fig. 7. Der zulässige Messfehler Δ_{\max} in Abhängigkeit von A_o ($T_o = \text{Konstant}$)

Für $A_o \leq A_o^*$ ist $|\Delta_{\max}| = \varepsilon$. Für $A_o \geq A_o^*$ ist $|\Delta_{\max}| = b \cdot A_o \cdot T_o$.

A_o^* ist gegeben durch

$$\begin{aligned} b \cdot A_o^* \cdot T_o &= \varepsilon \\ T_o \cdot A_o^* &= \frac{\varepsilon}{b} \end{aligned} \quad (5-1)$$

Für $A_o \leq A_o^*$ erhalten wir T aus der Beziehung

$$\varepsilon \geq |\Delta_{\max}| = 4 \cdot T \cdot \sqrt{\frac{K}{6}} \quad (5-2)$$

Also

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}} \quad (5-3)$$

Für $A_o \geq A_o^*$ ist T durch (3-4) beziehungsweise (4-5) gegeben.

Wir können noch (3-4) und (5-3) zusammenfassen und setzen

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \text{Maximum} \left\{ \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}}, \frac{b \cdot A_o \cdot T_o}{\sqrt{K}} \right\} \quad (5-4)$$

Für den Fall der Messung auf weniger als n Kanälen mit einer für n Kanäle vorgesehenen Messeinrichtung müssen wir (5-2) ersetzen durch

$$\varepsilon \geq |\Delta_{\max}| = 4 \cdot \frac{T}{[s]} \cdot \sqrt{\frac{K'}{6}} \quad (5-2a)$$

Also wird

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{K'}} \cdot [s] \quad (5-3a)$$

Wir erhalten also für diesen Fall durch Zusammenfassen von (4-5) und (5-3a)

$$T \leq \frac{[s] \cdot \sqrt{6}}{4} \cdot \text{Maximum} \left\{ \frac{\varepsilon}{\sqrt{K'}}, \frac{b \cdot A_o' \cdot T_o}{\sqrt{K'}} \right\} \quad (5-4a)$$

6. Berechnung eines Spezialfalles

In diesem Abschnitt wenden wir die abgeleiteten allgemeinen Formeln auf einen wichtigen Spezialfall an.

Wir setzen voraus, dass

$$T_o \cdot A_o = d \cdot K \quad (6-1)$$

Dies bedeutet, dass für alle möglichen Werte von $A_o \cdot T_o$ die mittlere Dauer der «1»-Zustände stets gleich d ist. Mit Hilfe dieser Annahme lässt sich K aus den bisherigen Formeln eliminieren. Man erhält für (3-4)

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{b \cdot A_o \cdot T_o}{\sqrt{A_o \cdot T_o}} = \frac{b}{4} \sqrt{6 \cdot A_o \cdot T_o \cdot d}, \quad A_o \geq A_o^* \quad (6-2)$$

und für (5-3)

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{T_o \cdot A_o}{d}}} = \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{6 \cdot d}{A_o \cdot T_o}}, \quad A_o \leq A_o^* \quad (6-3)$$

Für gegebene Werte von ε , b und d werden beide Ausdrücke minimal für $T_o \cdot A_o = T_o \cdot A_o^*$. Der grösste zulässige Wert für T wird also bestimmt durch

$$T \leq \frac{b}{4} \sqrt{6 \cdot A_o^* \cdot T_o \cdot d} = \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{6 \cdot d}{A_o^* \cdot T_o}} \quad (6-4)$$

Setzt man noch A_o^* aus (5-1) ein, so erhält man

$$T \leq \frac{b}{4} \sqrt{6 \cdot T_o \cdot d \cdot \frac{\varepsilon}{b \cdot T_o}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{b \cdot \varepsilon \cdot d} \quad (6-5)$$

Die Formel (6-5) gilt sowohl für die Messung auf einem Kanal als auch für die Messung auf n Kanälen mit einer für n Kanäle vorgesehenen Messeinrichtung.

Entsprechende Resultate für die Messung auf m -($m < n$) Kanälen mit einer für n Kanäle vorgesehenden Messeinrichtung lassen sich aus (4-5) und (5-3) berechnen. Man erhält aus (4-5)

$$T \geq \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{b \cdot A_o' \cdot T_o}{\sqrt{\frac{A_o' \cdot T_o}{d}}} [s] = \frac{b}{4} \sqrt{6 \cdot A_o' \cdot T_o \cdot d} [s], \quad A_o' \geq A_o^{*\prime} \quad (6-2a)$$

und aus (5-3)

$$T \leq \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\varepsilon \cdot [s]}{\sqrt{\frac{T_o \cdot A_o'}{d}}} = \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{6 \cdot d}{A_o' \cdot T_o}} \cdot [s], \quad A_o' \leq A_o^{*\prime} \quad (6-3a)$$

Für gegebene Werte von ε , b , d und s werden beide Ausdrücke minimal für $T_o \cdot A_o' = T_o \cdot A_o^{*\prime} = \varepsilon/b$ (vgl. 5-1). Wie in (6-4) sind dann die durch (6-2a) und (6-3a) gegebenen Grenzen für T gleich (vgl. auch *Figur 7*). Man erhält deshalb

$$T \leq \frac{b}{4} \sqrt{6 \cdot d \cdot \frac{\varepsilon}{b} \cdot [s]} = \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{b \cdot \varepsilon \cdot d} \cdot [s] \quad (6-5a)$$

Anhang 1

Berechnung der Verteilungsdichte $f(\delta_i)$

Wir betrachten einen «1»-Zustand der Rechteckwelle mit der Länge $d = mT + r$, wobei m = ganze Zahl ≥ 0 .

Wir wollen berechnen, welcher Fehler δ_i bei der Abtastung mit Impulsreihen verschiedener Phasenlage entsteht. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden: es können entweder m oder $(m+1)$ Abtastimpulse innerhalb der Dauer des Zustandes auftreten (*Figur 8*).

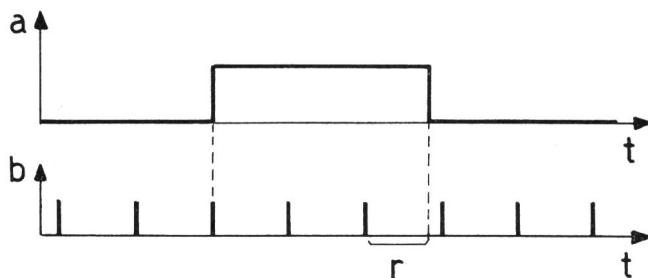


Fig. 8. Zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeiten

- a) Rechteckwelle
- b) Abtastimpulse

1. Fall: $(m+1)$ Impulse. Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit r/T auf. Der fiktive «1»-Zustand ist stets $(T-r)$ länger als der wirkliche.
2. Fall: m Impulse. Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-r/T)$ auf. Der fiktive Zustand ist hier stets um r kürzer als der wirkliche.

Figur 9 zeigt diese Wahrscheinlichkeiten.

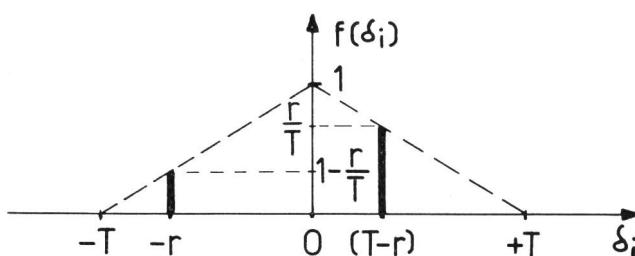


Fig. 9. Fehlerwahrscheinlichkeiten

Unter der Annahme, die wirkliche Rechteckwelle sei so beschaffen, dass alle Werte von r mit der gleichen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{T} \text{ im Intervall } (0, +T) \\ &= 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

vorkommen, erhalten wir für die Verteilungsdichte $f(\delta_i)$ des Fehlers δ_i (vgl. *Figur 2-2*).

$$\begin{aligned} f(\delta_i) &= \frac{T + \delta_i}{T^2} \text{ im Intervall } (-T, 0) \\ &= \frac{T - \delta_i}{T^2} \text{ im Intervall } (0, +T) \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

Anhang 2

Beispiel

Es sei die totale Dauer der Belegung einer Telefonader während einer Stunde zu messen. Der zulässige relative Messfehler sei 2% und die Anzeige-Unsicherheit $\pm 0,005$ Erlang (1 Erlang = 1 Leitung während einer Stunde belegt). Die mittlere Dauer der Belegungen sei 30 Sekunden.

Aus (6-5) folgt für das grösste zulässige Abtastintervall:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{b \cdot \varepsilon \cdot d} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{0,02 \cdot 0,005 \cdot \frac{1}{120}} \text{ Stunden} \\ &= 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ Stunden} = 20,16 \text{ Sekunden} \end{aligned}$$

Die Leitung muss also mit einer Frequenz von $\frac{1}{20,16}$ Hz abgetastet werden.

Adresse des Autors:

Arno Müller, dipl. phys. ETH, Institut für Fernmeldetechnik der ETH, Zürich.