

Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

Band: 38 (1960)

Heft: 11

Artikel: Kurze Einführung in die Unternehmensforschung (Operations Research)

Autor: Fontanellaz, G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-874632>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kurze Einführung in die Unternehmensforschung (Operations Research)

65.012.122

In den letzten Jahren entwickelte sich ein neuer Wissenszweig: die Unternehmensforschung. Sie ist eine angewandte Wissenschaft und erforscht die Probleme, die im Zusammenhang mit der Planung und Organisation von Masseneinsätzen in grossen Unternehmen stehen. Die fortschreitende Entwicklung der Wirtschaft führte zu einer immer umfangreicheren Verflechtung der verschiedenen Produktionsstellen. Während in kleineren Betrieben der Leiter sein Unternehmen noch überblicken kann, sind die Zusammenhänge in ihrer Gesamtheit bei grossen Betrieben nicht mehr ohne weiteres erkennbar.

Zuerst wurde die Unternehmensforschung von den USA und England während des Zweiten Weltkrieges für militärische Zwecke betrieben. Nach dem Kriege erweiterte sich die Anwendung der neuen Forschungsmethoden auch auf betriebswirtschaftliche Probleme.

Im englischen Sprachgebrauch wird der neue Wissenszweig mit «Operational Research» oder mit «Operations Research» bezeichnet. Vielfach wird dieser Ausdruck mit «betriebswirtschaftliche Verfahrensforschung» oder mit «Planungsforschung» übersetzt. Der Inhalt lässt sich deutsch aber besser und einfacher durch das Wort «Unternehmensforschung» wiedergeben. Die Erforschung bezieht sich auf einzelne Unternehmen im Sinne von Operation oder Aktion innerhalb einer Unternehmung, eines Betriebes oder einer öffentlichen Verwaltung.

Die Unternehmensforschung macht sich zur Aufgabe, mit Hilfe wissenschaftlicher Methoden eine Grundlage für die weittragenden Entscheidungen einer Unternehmungsführung zu geben. Beim Lösen dieser Aufgabe gilt es, in einem ersten Schritt durch Beobachtungen und Versuche zahlenmässige Unterlagen über die für einen Betrieb wichtigen Vorgänge zu beschaffen und in einem zweiten Schritt, gestützt auf diese Unterlagen, zu Handen der leitenden Organe optimale Lösungen für die gestellten betriebswirtschaftlichen Probleme zu finden.

Da die Aufgaben quantitativer Art sind, bedient sich die Unternehmensforschung in grossem Masse der Mathematik. Insbesondere sind es die statistischen Methoden und algebraischen Lösungsverfahren für Gleichungssysteme, die wertvolle Dienste leisten.

Der Hauptvorteil der mathematischen Behandlung von Planungsproblemen besteht darin, dass jede einzelne Abhängigkeit für sich untersucht und in Form von Einzelgleichungen angegeben werden kann; die Synthese lässt man dann durch ein mathematisches Lösungsverfahren objektiv durchführen. Die optimale Lösung wird unter Berücksichtigung aller Teilprobleme gefunden.

Die übersichtliche Darstellung der zahlenmässigen Unterlagen führt zu Gleichungssystemen, die eine

Art Abbild des Betriebes in Form eines «mathematischen Modells» darstellen.

Die Probleme und Methoden in der Unternehmensforschung sind im allgemeinen so mannigfaltig, dass die gestellten Aufgaben nur in engster Zusammenarbeit von verschiedenen Fachleuten bewältigt werden können. Da Teile aus allen möglichen Wissensgebieten ihren Beitrag leisten müssen, ist ein «Team-work» unumgänglich.

Probleme der Unternehmensforschung

Betriebswirtschaftliche Probleme, die durch die Methoden der Unternehmensforschung gelöst werden können, lassen sich in folgende Gruppen unterteilen:

- Zuordnungs- oder Zuteilungsprobleme,
- Lagerhaltungsprobleme,
- Unterhalts- oder Ersatzprobleme,
- Wartezeitprobleme,
- Entscheidungsprobleme und strategische Spiele.

Bei einem Zuordnungsproblem handelt es sich um die Durchführung mehrerer Aufgaben oder Leistungen mit beschränkt verfügbaren Mitteln. Eine Firma will beispielsweise bestimmte Mengen ihrer Produkte fabrizieren. Für die Produktion stehen ihr aber nur beschränkt verfügbare Mittel (z. B. Rohmaterialien, Maschinen, Arbeitskräfte) zur Verfügung. Welches ist unter den gegebenen Bedingungen das Produktionsprogramm mit dem grössten Gewinn?

In die erste Gruppe gehören auch die sogenannten Transportprobleme. Ein Unternehmen verfügt beispielsweise über eine bestimmte Zahl Fabriken und muss Warentransporte zwischen den Fabriken und den Verkaufsstellen durchführen; sowohl die Transportkosten als auch die zu transportierenden Warenmengen seien im einzelnen bekannt. Wie sind die Transporte zu organisieren, dass die Gesamtkosten möglichst klein werden?

Bei den Lagerhaltungsproblemen wird die Menge gesucht, die angesichts eines künftigen Konsums auf Lager zu halten ist. In einer kleinen Fabrik wird beispielsweise eine bestimmte Zahl Produkte hergestellt, und zwar nicht gleichzeitig. Je länger ein Produkt ohne Unterbruch hergestellt wird, je kleiner werden seine Gestehungskosten. Im Gegensatz dazu steigen bei grossen Lagerbeständen die Kosten der Lagerhaltung. Gesucht wird die zeitliche Anordnung der Fabrikation der verschiedenen Produkte, die, im ganzen betrachtet, minimale Kosten verursacht. Da der Konsum einer unbekannten Zukunft schwer zu erfassen ist, sind die Probleme dieser Art nicht immer einfach zu lösen.

Ein weiteres Lagerhaltungsproblem ist folgendes: Die Leitung eines Betriebes möchte den Umsatz steigern. Der Verkaufschef glaubt dies durch ein gröss-

res Sortiment, der Fabrikationschef aber durch grössere Serien erreichen zu können. Wer hat recht? Bei einem Betrieb, der verschiedene Erzeugnisse herstellt und verschiedene Produktionseinrichtungen besitzt, stellt sich etwa die Frage: Welches sind die Mengen der einzelnen Produkte, die den höchstmöglichen Gewinn ergeben, und wie gross ist dieser Gewinn unter der Voraussetzung, dass die Marktbedingungen berücksichtigt werden?

Bei den Unterhalts- oder Ersatzproblemen werden die Unterhaltskosten gegenüber Neuanschaffungskosten abgewogen. Als Beispiel für ein Ersatzproblem kann etwa der beste Ersatzpunkt für hölzerne Leitungs Masten angeführt werden. Sobald eine Übertragungsleitung ein gewisses Alter hat, so dass die Einzelausfälle der Masten eine bestimmte Häufigkeit erreichen, wird es wirtschaftlicher, sämtliche Masten, also auch die vorläufig noch brauchbaren, zu ersetzen, um nachher mit dieser Leitung wieder Ruhe zu haben. Die Frage lautet: Wann ist es wirtschaftlich, die Masten einer Übertragungsleitung gesamthaft zu ersetzen, und wie weit lohnt es sich, die kostspieligen Einzelausfälle in Kauf zu nehmen?

Die Wartezeitprobleme treten überall dort auf, wo im zeitlichen Ablauf eines Vorganges gewisse statistisch verteilte Unregelmässigkeiten beobachtet werden, die zu Stockungen oder Wartezeiten führen. Als Beispiel nehmen wir die Bedienung an einem Postschalter. Je nachdem, ob ein Kunde zu früh oder zu spät eintrifft, der Vordermann noch nicht oder schon bedient worden ist, muss er oder der Beamte warten; es entstehen unvermeidliche Wartezeiten. Die Unternehmensforschung versucht aus der Verteilung der Bedienungszeiten und der Verteilung der eintreffenden Kunden Rückschlüsse auf die Warteschlangen und die Zeitverluste zu ziehen, um damit die besten Lösungen für die Abwicklung der zeitlichen Vorgänge anzugeben. Ein ähnliches Problem stellt sich beispielsweise auch an einer Strassenkreuzung mit einer Lichtsignalanlage. Die Zeiten der Lichtsignalanlage sind so einzuregulieren, dass einerseits die Verkehrsströme in allen Richtungen möglichst ungestört fließen können, anderseits die Motorfahrzeugführer beim Wechseln der Lichter sofort wissen, wie sie sich zu verhalten haben. Beispielsweise sind die Zwischenperioden mit gelbem Licht der Geschwindigkeit des Fahrzeugstromes, der Grösse der Kreuzung, der Reaktionszeit der Führer, der Bremswege, der Beschleunigungsfähigkeit und der Grösse der Fahrzeuge anzupassen.

Bei den Entscheidungsproblemen sind mehrere (vielfach zwei) Parteien vorhanden, die mehrere Verhaltensmöglichkeiten zur freien Verfügung haben. Das Besondere dieser letzten Problemgruppe liegt darin, dass der Erfolg einer Massnahme der einen Partei vom Verhalten der andern Partei abhängig ist. Zum Beispiel muss ein Unternehmen für die Herstellung eines bestellten Artikels sofort die notwendigen Rohstoffe beschaffen. In der Hoffnung,

noch weitere Aufträge zu erhalten, werden gleichzeitig Besprechungen mit andern Firmen durchgeführt. Da der Ausgang dieser Besprechungen aber noch unsicher ist, weiss die Unternehmensleitung noch nicht, ob sie auch die Rohstoffe für die (fraglichen) Zusatzaufträge einkaufen soll. Aufgabe der Unternehmensforschung ist es dann, die Risiken für die verschiedenen Fälle, unter Berücksichtigung aller Gegebenheiten, zahlenmässig zu erfassen, Verlust- und Gewinnmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen und Richtlinien für das wahrscheinlich beste Verhalten anzugeben.

Mathematische Formulierung der Probleme

Da wir die Probleme der Unternehmensforschung mit Hilfe der Mathematik lösen wollen, müssen wir die Vorgänge durch mathematische Begriffe umschreiben. Dazu brauchen wir einmal feste und variable Grössen, die durch eine mathematisch formulierbare Beziehung miteinander verknüpft sind. Zum andern sind auf Grund der Gegebenheiten und der zu untersuchenden Zusammenhänge Rechenprogramme zu erstellen, um mit ihrer Hilfe Werte für die variablen Grössen zu bestimmen, die ein Minimum an Aufwand, an Kosten oder ein Maximum an Gewinn ergeben. Es handelt sich somit um ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen. Da nicht immer einfache funktionelle Zusammenhänge angegeben werden können, bildet das richtige Programmieren oft eine recht schwierige Aufgabe. Die mathematischen Modelle sind so zu gestalten, dass sie mit erträglichem Aufwand an Rechenarbeit zu praktisch brauchbaren Lösungen führen.

Zum besseren Verständnis sei an Hand eines einfachen Beispiels das Vorgehen näher erläutert:

Wir nehmen an, eine Firma kann eine Anzahl Produkte mit den Mengen x_1, x_2, \dots, x_n herstellen, für die sie nach Abzug aller Kosten einen Nettopreis p_1, p_2, \dots, p_n je Stück lösen kann. Für die Produktion der einzelnen Produkte benötigt sie verschiedene Produktionseinrichtungen und Mittel, so Rohstoffe, Maschinen, Arbeitskräfte, die ihr nur bis zu bestimmten Höchstwerten zur Verfügung stehen. Welches ist nun das beste Produktionsprogramm für die Firma, wenn sie in einer zu betrachtenden Periode den grössten Gewinn erzielen will.

Als Grundbeziehung haben wir in unserem Beispiel den Gesamtgewinn Q als Funktion der Nettopreise und der Stückzahl. Dieser Gewinn Q soll maximal werden unter der Voraussetzung, dass die Fabrikationsmittel beschränkt sind.

Als Rand- oder Nebenbedingungen erhalten wir deshalb Beziehungen, die aussagen, dass die einzelnen Produktionsmittel nur bis zu einem Maximalwert zur Verfügung stehen. Als zweite selbstverständliche Nebenbedingung sei hier der Vollständigkeit halber noch erwähnt, dass negative Stückzahlen beziehungsweise Mengen ausgeschlossen sind; x muss somit immer positiv sein.

Wie man sieht, stellen sich bei der mathematischen Formulierung der Probleme in der Unternehmensforschung immer die folgenden Fragen:

1. Welches ist die Grösse Q (z. B.: Aufwand, Kosten, Ertrag, Gewinn), für die ein Maximum beziehungsweise ein Minimum zu suchen ist?
2. Von welchen festen und von welchen veränderlichen Grössen ist die Grösse Q abhängig? Die veränderlichen Grössen sind dabei möglichst so zu wählen, dass sie voneinander unabhängig sind.
3. Stehen diese Grössen zur Verfügung; wie kann man sie gegebenenfalls ermitteln?
4. Welche Beziehung besteht zwischen diesen Grössen und in welcher gesetzmässigen Abhängigkeit stehen sie zur Grösse Q ?
5. Welches Rechenprogramm ist zu wählen, um für Q , unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen, ein Maximum beziehungsweise ein Minimum zu finden.
6. Welche Werte besitzen die veränderlichen Grössen beim Extremwert von Q ?

Für die Beantwortung dieser Fragen ist es wichtig, Ursache und Wirkung immer genau auseinander zu halten. Beispielsweise darf eine Ursache eine andere Ursache nicht beeinflussen. Ferner muss man sich vergegenwärtigen, dass eine richtige Beurteilung eines betrieblichen Vorganges nur gewährleistet ist, wenn die massgebenden Ursachen, die zu Veränderungen führen, auch tatsächlich bekannt sind.

Da meistens die festen Grössen (Faktoren) und oft auch die Abhängigkeiten zwischen Ursache und Wirkung nicht absolut genau angegeben werden können, müssen vielfach vereinfachende Annahmen getroffen werden, um lösbare Gleichungssysteme zu erhalten.

Als erstes wichtiges Hilfsmittel in der Behandlung der aufgeworfenen Fragen besitzen wir die statistische Mathematik. Sowohl bei der Ermittlung der zahlenmässigen Unterlagen, als auch bei der Bestimmung gewisser Abhängigkeiten, können die statistischen Methoden wertvolle Dienste leisten. Sie seien deshalb hier kurz gestreift.

Statistische Methoden

Statistische Verfahren werden einmal überall dort verwendet, wo eine Grösse oder Veränderliche verschiedene Werte mit gewissen Wahrscheinlichkeiten annehmen kann. Die mathematische Statistik untersucht die entsprechenden Verteilungen und definiert Masszahlen zu deren Kennzeichnung. Der Durchschnitt (als Mittelwert) und die Streuung (als mittlere quadratische Abweichung) sind zum Beispiel solche Masszahlen.

In der statistischen Mathematik nehmen die Wahrscheinlichkeitsgesetze eine grundlegende Stellung ein, bedeutet doch stochastisch, die von der Wahrscheinlichkeitstheorie ausgehende Betrachtungsweise statistisch erfassbarer Massen. Die statistischen Methoden verbunden mit Wahrscheinlichkeitsrechnungen erlauben an statistischen Erhebungen Untersuchun-

gen durchzuführen und insbesondere wesentliche von unwesentlichen Abhängigkeiten zu unterscheiden.

Aus Versuchen oder Versuchsreihen und aus Beobachtungen gewinnt man eine Anzahl Einzelwerte. Die Gesamtheit unendlich vieler solcher Einzelwerte, die unter den gleichen Bedingungen erhalten wurden, bezeichnet man als Grundgesamtheit oder Grundverteilung. Da man in der Praxis gezwungen ist, statistische Erhebungen nur mit einer beschränkten Anzahl von Einzelwerten durchzuführen, wurden in der Theorie der Stichproben spezielle Prüfverfahren entwickelt, die es ermöglichen, aus Stichproben Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit zu ziehen.

Werden statistische Erhebungen wiederholt, so stimmen die neuen Ergebnisse nicht immer mit den früheren überein. Mit Hilfe statistischer Untersuchungsmethoden kann dann geprüft werden, ob die Unterschiede zufälliger Art sind, oder ob die erhaltenen Unterschiede als gesichert betrachtet werden können. Die Stichprobentheorie gibt auch Aufschluss, wie Stichprobenerhebungen am besten durchzuführen sind. Vor allem ist darauf zu achten, dass sich keine systematischen Fehler einschleichen.

Bestimmte Verteilungen der mathematischen Statistik können oft auch gewisse betriebliche Gegebenheiten direkt darstellen. So wird beispielsweise die *Poissonsche* Verteilung, die die Häufigkeit seltener Ereignisse angibt, mit Vorteil als mathematisches Modell für die Vorgänge beim Postschalter verwendet. Die Probleme der Warteschlangen und Wartezeiten lassen sich dann an diesem Modell untersuchen.

Wenn wir es nicht nur mit einer einzigen Veränderlichen zu tun haben, sondern zwei oder mehr Variable im Spiele sind, stellt sich sofort die Frage der gegenseitigen Abhängigkeit. Die Eigenart der Statistik liegt dann darin, dass nicht exakte funktionale Beziehungen, sondern sogenannt stochastische Abhängigkeiten gegeben sind. Als Beispiel sei hier auf die Abhängigkeit zwischen Fahrgeschwindigkeit und Bremsweg eines Motorfahrzeuges hingewiesen. Tragen wir auf der Abszisse beispielsweise die Geschwindigkeit und auf der Ordinate den Bremsweg auf, so erhalten wir je nach der Anzahl Versuche einen grösseren oder kleineren Punktschwarm. Beim Betrachten dieses Punktschwarms lässt sich eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg vermuten.

Bestimmte statistische Verfahren, wie beispielsweise die Korrelationsrechnung, dienen dazu, solche stochastische Abhängigkeiten zu untersuchen und richtig zu beurteilen. Eine entsprechende Rechnung ermöglicht es, zu jedem Geschwindigkeitswert einen mittleren Bremsweg anzugeben und die Grenzen zu bestimmen, innerhalb derer beispielsweise 90% der zu diesem Geschwindigkeitswert gehörenden Bremswege zu finden sind.

Für die Industrie wurden besondere Methoden entwickelt, die mit geringem Aufwand eine grössere Zahl von Einflussfaktoren festzustellen helfen.

Sobald wir die voneinander abhängigen Veränderlichen in eine exakte funktionale Beziehung bringen wollen, sprechen wir von Regression. Diese Zurückführung auf eine mathematisch eindeutige Beziehung ist sehr wichtig; wir brauchen sie zum Aufstellen der nötigen Gleichungen. Besondere mathematische Methoden wurden entwickelt, um gegenseitige Abhängigkeitsmasse zu untersuchen. Es handelt sich bei der Regression immer um das Auffinden einer Kurve, für die die Summe der quadratischen Abweichungen der gemessenen Einzelwerte ein Minimum wird. Am bekanntesten ist das Verfahren zur Bestimmung der linearen Regressionsgleichung im Fall von zwei Veränderlichen.

Je nach den angenommenen oder gefundenen Beziehungen können wir dann eine Gruppierung der Probleme vornehmen, die entsprechend dem Aufbau der Gleichungssysteme unterschiedliche Lösungsverfahren besitzen.

In der ersten Gruppe wollen wir alle Probleme mit linearen Gleichungen zusammenfassen. Es ist die weitaus grösste und wichtigste Gruppe. Aufgaben dieser Art werden mit Hilfe des «linearen Programmierens» gelöst.

Die zweite Gruppe soll die Probleme mit nicht-linearen Beziehungen enthalten. Diese zweite Gruppe löst man mit dem Verfahren des «dynamischen Programmierens».

Lineare Programmierung

Probleme, die auf lineare Gleichungssysteme führen, löst man mit dem Verfahren des «linearen Programmierens». Diese Programmierart hat in den letzten Jahren eine grosse Bedeutung erlangt. Das Verfahren wird mit Erfolg überall dort angewendet, wo mehrere Vorgänge, die miteinander betrieblich verbunden sind, optimal gestaltet werden müssen. Voraussetzung ist lediglich die lineare gegenseitige Abhängigkeit der Grössen.

Als Beispiel nehmen wir wieder die Firma, die Produkte mit den Mengen x_1, x_2, \dots, x_n herstellt. Nach Abzug aller Kosten löst sie einen Nettopreis pro Stück von p_1, p_2, \dots, p_n . Die verschiedenen Produktionsmittel (Maschinen, Arbeitskräfte usw.) stehen ihr bis zu den Maximalwerten A, B, C, \dots zur Verfügung. Gesucht ist nun das optimale Herstellungsprogramm, das den grössten Gewinn erzielt.

Wir können sofort die folgende Hauptgleichung anschreiben:

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i x_i - K$$

Q ist der Gesamtgewinn und soll mit der erwähnten Einschränkung maximal werden.

K ist ein konstanter Kostenbeitrag und kann bei Optimumsbetrachtungen weggelassen werden.

Die beschränkt zur Verfügung stehenden Produktionsmittel geben uns die Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen.

Für das 1. Produktionsmittel $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A$

Für das 2. Produktionsmittel $\sum_{i=1}^n b_i x_i \leq B$

a, b, \dots sind die sogenannten Produktionsfaktoren und geben an, in welchem Mass ein Produktionsmittel je Produkteinheit beansprucht wird.

Damit wir das Lösungsverfahren des linearen Programmierens in der Ebene graphisch erläutern können, wollen wir annehmen, die Firma besitze nur zwei Produkte. Die beiden Veränderlichen beschreiben dann ein x_1 - x_2 -Koordinatensystem. Wir erhalten für die Hauptgleichung

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

und für drei Produktionsmittel die folgenden Nebenbedingungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq A$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 \leq B$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq C$$

Da wir keine negativen Produktionsmengen erhalten dürfen, müssen wir zusätzlich noch die folgenden trivialen Bedingungen fordern

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen ist für Q nun ein Maximum zu finden und sind die dazugehörigen Werte für x_1 und x_2 zu bestimmen.

In der Ebene lassen sich die linearen Beziehungen durch Geraden darstellen. Die Punkte, welche eine Ungleichung erfüllen, liegen in einer ganz bestimmten Halbebene, die durch eine Gerade begrenzt ist. Die Gesamtheit aller aus den Nebenbedingungen hervorgegangenen Ungleichungen sagt aus, dass in unserem Beispiel nur Punkte im Gebiet P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4 als Lösung in Frage kommen (siehe Fig. 1). Man kann leicht einsehen, dass die Begrenzungslinie eines aus linearen Ungleichungen bestimmten Lösungsgebietes immer konvexer Art sein muss.

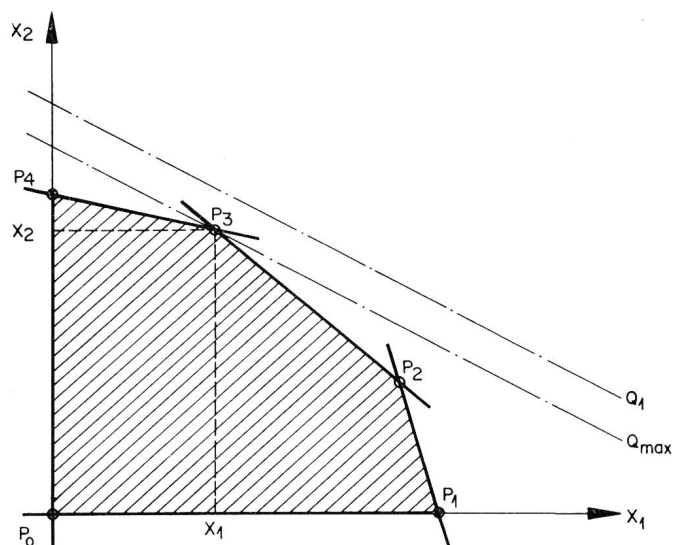


Fig. 1.

Nach der Voraussetzung ist auch die Maximumsbedingung linear. Für einen bestimmten Wert von Q erhalten wir eine Gerade Q_1 in der Figur 1. Verschiedene Werte von Q führen zu einer Schar von parallelen Geraden. Die Aufgabe besteht nun darin, den Punkt im zulässigen Bereich zu suchen, für den Q den grössten Wert annimmt.

In unserem Beispiel ist es der Punkt P_3 . Wie aus der Figur ersichtlich ist, kann der gesuchte Lösungspunkt immer nur am Rande des zulässigen Bereiches liegen. Wird die Parallelität zwischen der Q -Geraden zu irgendeiner andern Begrenzungslinie ausgeschlossen, so kommen grundsätzlich nur die Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 als Lösungen in Frage. Diese Tatsache führt in der linearen Programmierung zu einem ganz bestimmten Lösungsverfahren, der sogenannten Simplex-Methode.

Die Simplex-Methode besteht darin, dass man bei irgendeinem beliebigen Eckpunkt des gegebenen konvexbegrenzten Bereiches beginnt und dann in Richtung möglichst stark steigender Q zur nächsten Ecke fortschreitet; den neuen Punkt zum neuen Ausgangspunkt macht und so bis zum gesuchten Lösungspunkt fortschreitet.

Genau das gleiche Prinzip lässt sich auch anwenden, wenn an Stelle einer Maximum- eine Minimumaufgabe zu lösen wäre. Bei solchen Problemen fordern die Nebenbedingungen, dass gewisse Grössen nicht unterschritten werden dürfen. Das mit den Nebenbedingungen bestimmte Lösungsgebiet liegt dann zwischen den Begrenzungsgeraden und dem Unendlichen (siehe Fig. 2).

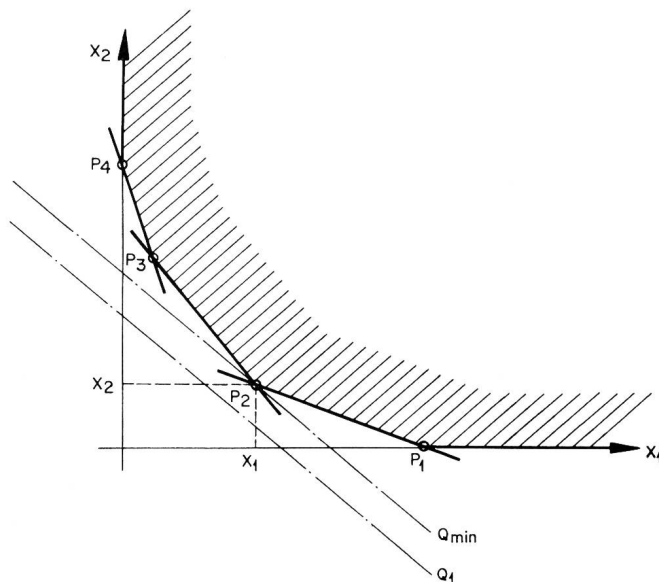


Fig. 2.

Als Beispiel eines solchen Problems nehmen wir eine Elektrizitätsgesellschaft, die den Bedarf ihrer Kunden an elektrischer Energie mit Hilfe einer gewissen Zahl von Einheitskraftwerken decken will. Der Gesellschaft stehen hydraulische und thermische Kraftwerke zur Verfügung. Die zu liefernden Leistungen sind gegeben durch:

A für die maximalbenötigte Winterleistung,
B für die maximalbenötigte Spitzenleistung,
C für die total erforderliche Jahresenergie.

Die Leistungen, die Kapital- und Betriebskosten je Einheitswerk sind ebenfalls bekannt. Gesucht ist die Anzahl der beiden Kraftwerkstypen x_1 und x_2 , die mit minimalen Kosten die benötigten verschiedenen Leistungsarten erzeugen können.

Wir erhalten als Hauptgleichung:

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Q ist die Summe aller Kosten und soll minimal werden. p_1 und p_2 sind die Kosten je Einheitskraftwerk.

Der Bedarf der verschiedenen Leistungen führt zu den folgenden Ungleichungen:

$$\text{für die Winterleistung: } a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq A$$

$$\text{für die Spitzenleistung: } b_1 x_1 + b_2 x_2 \geq B$$

$$\text{für die totale Jahresenergie: } c_1 x_1 + c_2 x_2 \geq C$$

Dabei sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Produktionsquoten der beiden Kraftwerkstypen.

Genau wie im früheren Beispiel lässt sich auch hier der entsprechende Lösungspunkt P_2 finden (siehe Fig. 2). Mit ihm sind die gesuchten Werte für x_1 und x_2 gegeben.

In unseren Beispielen haben wir einfachheitshalber nur zwei Produkte, zwei Veränderliche angenommen. Vielfach sind die Probleme aber bedeutend umfangreicher, was sofort eine grössere Zahl von Unbekannten und Ungleichungen zur Folge hat. An Stelle einer Fläche erhalten wir dann einen n -dimensionalen Raum.

Zum Auflösen eines Gleichungssystems mit einer grösseren Zahl linearer Gleichungen und ebensovielen Unbekannten stellt uns die Algebra die Matrizenrechnung zur Verfügung. Mit Matrizen können wir komplizierte lineare Gleichungssysteme einfach und übersichtlich darstellen und mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten die Unbekannten nach einem einfachen Schema ermitteln.

Beispielsweise erhält man für das Gleichungssystem:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

die folgenden Lösungen für die Unbekannte x_1 :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Damit sich die Matrizenrechnung auch bei den Planungsaufgaben verwenden lässt, müssen die Ungleichungen mit einem kleinen Kunstgriff in Gleichungen umgewandelt werden. Man tut dies, indem man sogenannte Schlupfvariable einführt, die die fehlenden Restbeträge bis zum Gleichheitszeichen ergänzen und erhält dann in der Programmieraufgabe das folgende lineare Gleichungssystem für die m -Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + y_1 = A$$

$$\sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + y_2 = B$$

Dabei sind y die unbekannten Schlupfvariablen. In diesem Gleichungssystem mit m -Gleichungen und $n+m$ -Unbekannten können n -Unbekannte beliebig vorbestimmt, und das System kann dann für die restlichen m -Unbekannten gelöst werden. Mit den Werten für x_1 bis x_n geht man dann in die Hauptgleichung für Q . Das grundlegende Theorem der Simplex-Methoden lautet nun, dass für die Lösung, bei der Q in der Hauptgleichung maximal oder minimal wird, vorbestimmte Variable null sein müssen. Auf unsere graphische Darstellung übertragen, bedeutet dies nichts anderes, als dass nur ein Eckpunkt des zulässigen Flächenbereiches als optimale Lösung in Frage kommt. Die Simplex-Methode empfiehlt ferner ein Vorgehen für das Nullsetzen der Veränderlichen, um auf raschem Wege zum optimalen Lösungspunkt zu gelangen.

Auch bei sehr vielen Unveränderlichen bleiben die Grundprinzipien der linearen Programmierung und das Auffinden der Lösungen mit Hilfe des Simplex-Verfahrens unverändert. Die auszuführenden Rechnungen werden dann aber so umfangreich, dass zum rationellen Lösen der Probleme Elektronenrechner eingesetzt werden müssen.

Dynamische Programmierung

An Hand eines einfachen Beispiels sei das Wesen der dynamischen Programmierung kurz erläutert.

Am Anfang eines Jahres besitze ein Bauer einen Viehbestand M_1 . Davon verkauft er sofort eine Anzahl Tiere x_1 und löst daraus einen Ertrag $f_1(x_1)$. Der restliche Bestand $y_1 = M_1 - x_1$ vergrößert sich im Laufe des Jahres auf $M_2 = a \cdot y_1$. Am Anfang des zweiten Jahres wird neuerdings eine Menge x_2 verkauft und daraus $f_2(x_2)$ gelöst. So auch in den nächsten Jahren. Nach $n-1$ Jahren will der Bauer aus Altersgründen keine Viehwirtschaft mehr betreiben und verkauft am Ende der Periode den ganzen restlichen Viehbestand. Aufgabe der Unternehmensforschung ist es nun, dem Bauer eine Verkaufspolitik anzugeben, bei der er aus seiner Viehwirtschaft einen maximalen Erlös erzielt. Da die Beziehungen nicht linear sind, versagt hier die Methode des «linearen Programmierens». Dagegen besitzen wir im dynamischen Programmieren ein Lösungsverfahren, das zum Ziele führt. Der allgemeine Ansatz lautet:

Der Gesamtertrag Q besteht aus einer Summe von beliebigen Funktionen

$$Q = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

Für Q soll unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen der Extremwert (Maximum oder Minimum) gefunden, und die dazugehörigen Werte sollen für $x_1 \dots x_n$ bestimmt werden. Als einfache Nebenbedingung besitzt man beispielsweise

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq M$$

Ein solches Extremwertproblem kann nicht in einem Schritt gelöst werden. Die Erreichung des Optimums muss stufenweise geschehen, indem man eine Unterteilung in Teilprobleme vornimmt.

Das erste Teilproblem lautet:

die Teilgrösse $Q_1 = f_1(x_1)$ soll mit $x_1 \leq M$ ein Maximum werden. Dieses Maximum ist von M abhängig. Wir erhalten eine Funktion

$$Q_1 \max. = F_1(M)$$

Dabei entspricht jedem M ein bestimmtes x_1 .

Im zweiten Schritt soll

$Q_2 = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ mit $x_1 + x_2 \leq M$ ein Maximum werden.

Offenbar ist $Q_2 = f_2(x_2) + F_1(M - x_2)$

Das Maximum von Q_2 ist wieder von M abhängig. Wir erhalten

$$Q_2 \max. = F_2(M)$$

Die Funktion $F_2(M)$ kann also aus $F_1(M)$ berechnet werden. Gleichzeitig sind bei einem gegebenen Wert von M die Werte für x_2 und x_1 festgelegt. Analog gilt für den k -ten Schritt:

$$Q_k = f_k(x_k) + F_{k-1}(M - x_k)$$

$$\text{und } Q_k \max. = F_k(M)$$

Wir erhalten so ein System von Funktionalgleichungen, das mit Hilfe der rekursiven Berechnung von $F_k(M)$ zur gesuchten Lösung führt.

Am Beispiel der vorerwähnten Aufgabe lässt sich dieses stufenweise Erreichen der optimalen Lösung anschaulich zeigen. In den zeitlich gestaffelten Verkäufen ist der Aufteilungsprozess schon festgelegt.

Einfachheitshalber seien die einzelnen Ertragsfunktionen gleich und gegeben durch

$$f(x) = x^b \text{ wobei } b \leq 1$$

Damit lautet die Hauptgleichung

$$Q = x_0^b + x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b = \sum_{k=0}^n x_k^b$$

Wir nehmen dabei noch eine Umnummerierung vor und bezeichnen mit x_0 den Verkauf am Ende des letzten Jahres und mit x_n den Verkauf zu Beginn des ersten Jahres. Für Q ist das Maximum zu finden.

Als Nebenbedingungen haben wir:

$$0 \leq x_k \leq M_k \text{ mit } M_{k-1} = a(M_k - x_k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ und } M_0 = x_0, M_n = M$$

Da der Grenzwert M_{k-1} von der vorher verkauften Menge x_k abhängig ist, kommt die Dynamik des Problems besonders deutlich zum Ausdruck.

Wir beginnen im letzten Jahr, wo alles verkauft wird ($x_0 = M_0$), erhalten das in der ersten Zeile der *Tabelle 1* angegebene Teilproblem und bestimmen daraus die Funktion $F_0(M_0)$. Anschliessend gehen wir ein Jahr zurück und behandeln das in der zweiten Zeile angegebene Teilproblem.

Wie bereits erläutert, kann $F_1(M_1)$ mit Hilfe von $F_0(M_0)$ und der gegebenen Nebenbedingung ermittelt werden. Der Übersichtlichkeit wegen wurde in der Tabelle der Koeffizient q eingeführt.

$$q = a^{\frac{b}{1-b}}$$

Tabelle 1

Jahr	$Q_k = f_0(x_0) + f_1(x_1) + \dots + f_k(x_k) = F_{k-1}(M_{k-1} - x_k) + f_k(x_k)$	Q max. bei	F (M)
n	$Q_0 = x_0^b = O + x_0^b$	$x_0 = M_0$	$F_0 = M_0^b$
n-1	$Q_1 = x_0^b + x_1^b = F_0 \left\{ M_0 = a(M_1 - x_1) \right\} + x_1^b$	$x_1 = \frac{1}{1+q} \cdot M_1$	$F_1 = M_1^b (1+q)^{1-b}$
	$Q_2 = x_0^b + x_1^b + x_2^b = F_1 \left\{ M_1 = a(M_2 - x_2) \right\} + x_2^b$	$x_2 = \frac{1}{1+q+q^2} \cdot M_2$	$F_2 = M_2^b (1+q+q^2)^{1-b}$
	\vdots		
1	$Q_{n-1} = x_0^b + x_1^b + \dots + x_{n-1}^b = F_{n-2} \left\{ M_{n-2} = a(M_{n-1} - x_{n-1}) \right\} + x_{n-1}^b$	$x_{n-1} = \frac{q-1}{q^{n-1}-1} \cdot M_{n-1}$	$F_{n-1} = M_{n-1}^b \left[\frac{q^n-1}{q-1} \right]^{1-b}$
	$Q_n = x_0^b + x_1^b + \dots + x_n^b = F_{n-1} \left\{ M_{n-1} = a(M_n - x_n) \right\} + x_n^b$	$x_n = \frac{q-1}{q^{n+1}-1} \cdot M_n$	$F_n = M_n^b \left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \right]^{1-b}$

Durch schrittweises Vorgehen gelangt man bis zur n-ten Zeile und erhält für

$$Q_{\max.} = F_n = M^b \left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \right]^{1-b}$$

Zur Bestimmung der einzelnen Verkaufsmengen, rechnet man dann rückwärts abwechselungsweise die x_k und M_k aus.

Dabei ist $M_{k-1} = a(M_k - x_k)$

Setzen wir beispielsweise:

$$a = 2 \quad b = 0,5 \quad n = 6 \quad M = 127$$

so betragen der maximale Erlös

$$Q_{\max.} = F_6 = \sqrt{127} \cdot \sqrt{\frac{2^7-1}{2-1}} = 127$$

und die einzelnen Verkaufsmengen

Jahre . . .	0	1	2	3	4	5	6	
Bestand M_k .	127	252	496	960	1792	3072	4096	
Verkaufsmenge x_k .	1	4	16	64	256	1024	4096	
Erlös	1	2	4	8	16	32	64	= 127

Da es in unserm Beispiel nur um das Prinzip des dynamischen Programmierens geht, wurden einfachheitshalber die Kosten für die Unterbringung eines erhöhten Bestandes unberücksichtigt gelassen.

Alle Probleme, die durch einen n-stufigen Prozess gegeben sind und in denen jede Stufe durch gewisse Angaben eindeutig charakterisiert werden kann, sind dem Lösungsverfahren des «dynamischen Programmierens» zugänglich. Dabei ist wesentlich, dass Änderungen auf einer bestimmten Stufe wohl die nachfolgenden Prozesse, nicht aber den vorhergehenden Ablauf beeinflussen können. Das dynamische Programmieren wertet die Tatsache aus, dass bei einem solchen mehrstufigen Prozess ein optimal verlaufender Teilprozess auf der k-ten Stufe denselben

Verlauf besitzt, ob er für sich allein mit den ihm zugeordneten Randbedingungen oder als Teilprozess im optimalen Gesamttaublauf betrachtet wird.

Simulierungsmethode

Oft lassen sich in der Unternehmensforschung die Probleme nicht durch Gleichungssysteme ausdrücken, die mit Hilfe der linearen oder dynamischen Programmierung gelöst werden können. In diesen Fällen muss man versuchen, durch Simulationen oder geschickt gewählte Modelle die gewünschten Vorgänge möglichst genau nachzubilden. Zum Beispiel: Poissonsche Verteilung bei Wartezeit- und Warteschlangenproblemen. Diese Methoden geben uns die Möglichkeit, verschiedene betriebliche Anordnungen miteinander zu vergleichen und wirtschaftlich gute Lösungen durch Probieren zu finden. Mit Hilfe der Simulationsverfahren und der Verwendung von Modellen lassen sich unter anderem ganze Produktionsabteilungen oder andere Einheiten auf dem Papier organisieren und alle wünschbaren Untersuchungen an ihnen durchführen.

Das Aufstellen von mathematischen Simulierungssystemen ist nicht leicht und verlangt grosse Erfahrung. Allgemein gültige Verfahren gibt es noch nicht. Jeder einzelne Fall muss gesondert untersucht und behandelt werden.

Sehr oft sind solche Probleme mit Zufallsmechanismen verbunden, die nicht durch eine mathematisch gegebene Verteilfunktion zu beschreiben sind. In diesem Fall verwendet man die sogenannte «Monte-Carlo-Methode». Diese Methode läuft darauf hinaus, den Vorgang eines regellosen Mechanismus – zum Beispiel: Zustrom der Kunden am Postschalter, Eingang von Bestellungen, Ausfall von Arbeitskräften oder Maschinen – künstlich nachzuahmen. Grundlage der Monte-Carlo-Methode sind deshalb sogenannte Zufallszahlen, die eine statistische Gegebenheit nachbilden.

Strategische Spiele

Konkurrenzieren sich bei einem Entscheidungsproblem die beteiligten (meist zwei) Parteien, indem sie das gleiche Ziel anstreben, sich am Ziel aber gegenseitig ausschliessen, nennt man dies ein strategisches Spiel. Gewinn der einen Partei bedeutet Verlust für die andere. Dabei ist das Resultat einer Strategie des einen Spielers abhängig von der Strategie der Gegenspieler. Beim Suchen der optimalen Lösungen sind deshalb parteifremde Einflüsse zu berücksichtigen. Probleme dieser Art treten auf unter anderen in militärisch strategischen Situationen und auch bei gewissen Gesellschaftsspielen (zum Beispiel Schach, Kartenspiele).

Die Spielregeln definieren für jede mögliche Kombination von Strategien einen Verlierer und einen Gewinner. Da jeder Spieler nur seine eigene Strategie bestimmen kann, nicht aber die seines Partners, steht das Ergebnis eines Spiels nicht von vornherein fest. Die Aufgabe für die Unternehmensforschung liegt darin, die Strategie beziehungsweise die Strategien und die Häufigkeit ihrer Anwendung zu bestimmen, die ein Spieler benützen muss, um den grösstmöglichen Gewinn zu erreichen, ohne dass die Strategiewahl des Gegners zum Voraus bekannt ist.

Zur Behandlung der Spielfragen wurden gewisse Theorien entwickelt. Ihnen liegt die Annahme zugrunde, dass die gesamte Gewinnsumme zweier Spieler null ist und die Gewinne eines Spielers A für jede Kombination sämtlicher Strategien angegeben werden kann. Gesucht sind dann die Wahrscheinlichkeiten, mit denen der Spieler A die verschiedenen Strategien bei optimaler Spielweise spielen soll. Die Studien werden normalerweise für den Fall durchgeführt, dass auch der Gegner optimal spielt. Verhält er sich dann nicht optimal, so wird der Spieler A im allgemeinen nur um so sicherer gewinnen.

Da die verschiedenen Strategien aus der Kombination der einzelnen Züge hervorgehen, und zudem

die Strategien des einen Spielers mit den möglichen Strategien des Gegenspielers in Verbindung gebracht werden müssen, entstehen sehr umfangreiche Gleichungssysteme, die durch Matrizen dargestellt werden können. Die einzelnen Kolonnen bedeuten dann etwa die Strategien beziehungsweise Massnahmen des einen Spielers, die einzelnen Zeilen die verschiedenen Strategien des Gegenspielers. Das aus der Kombination zweier Strategien resultierende Gewinnergebnis für den einen Spieler (Verlustergebnis für den Gegner) wird in der Matrix am entsprechenden Ort eingetragen. Mit Hilfe der linearen oder dynamischen Programmierung lassen sich dann die durch die Matrizen dargestellten Gleichungssysteme lösen und optimale Verhaltensmassregeln bestimmen.

Die verschiedenen Strategien und ihre Einflüsse sind meistens sehr schwer zu beschreiben und zahlenmässig anzugeben. Dies führt dazu, dass die Hauptschwierigkeit bei den spieltheoretischen Problemen im Finden der Gleichungsansätze liegt.

Bibliographie

- C. W. Churchmann, R. L. Ackhoff, E. L. Arnoff: Introduction to operations research, 1957, Verlag John Wiley, New York.
- A. Kaufmann: Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. 1959, Verlag Dunod, Paris.
- E. P. Billeter: Hauptprobleme der Unternehmensforschung. Unternehmensforschung, Band I (1956/57), Heft 4 (Physica-Verlag, Würzburg).
- A. Linder: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. 1946 und 1951, Verlag Birkhäuser Basel.
- W. Krelle und H. P. Kunzi: Lineare Programmierung. 1958, Verlag Industrielle Organisation, Zürich.
- F. Ferschl: Grundzüge des «Dynamic Programming». Unternehmensforschung, Band 3 (1959), Heft 2 (Physica-Verlag, Würzburg).
- F. Ferschl: Entscheidungsproblem und Strategische Spiele, Unternehmensforschung, Band 2 (1958), Heft 2 (Physica-Verlag, Würzburg).

A.-V.-J. MARTIN, Paris

Satellites pour Communications*

621.396.934

Les systèmes de communication existants sont particulièrement sensibles aux dispositifs de brouillages, qu'ils soient d'origine humaine ou naturelle. Par exemple, à grande distance, où l'on utilise la réflexion sur les couches ionisées de la haute atmosphère, une simple variation des propriétés de ces couches peut parfaitement mettre en défaut un système de communication.

Or, les couches ionisées de la haute atmosphère sont essentiellement instables, et il suffit d'un accroissement d'activité solaire pour que les communications soient immédiatement supprimées dans les liaisons à grande distance. Si l'on ajoute que l'on peut parfaitement produire de façon artificielle le même résultat en faisant exploser une bombe atomique à haute altitude, ainsi que cela a été expérimentalement démontré, on conçoit que les militaires ne soient pas tranquilles du tout quant à la sûreté de leurs communications à grande distance, au cas de conflagration mondiale.

Même si l'on ne veut pas s'en tenir à des horizons aussi noirs, il faut bien constater que les communications commerciales à grande distance sont sujettes à des anomalies telles que les messages ne sont acheminés que pendant une faible fraction du temps, ce qui conduit à une exploitation particulièrement peu économique des réseaux.

De ces amères constatations est née l'idée suivante. Si l'on ne peut compter sur les réflexions ionosphériques, en raison du caractère instable qui leur est propre, pourquoi ne pas remplacer une ionosphère instable par quelque chose susceptible de la remplacer, et de plus insensible aux brouillages d'origine électromagnétique?

C'est ainsi qu'est née l'idée d'utiliser des satellites orbitant autour de la terre pour relayer les télécommunications à grande distance.

Emploi des satellites

Que des satellites puissent être employés pour transmettre des informations, cela ne fait aucun doute. En dehors des in-

* Reproduction autorisée de «Radio Electronique professionnelle», Paris, n° 297, septembre 1960.