**Zeitschrift:** Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

**Herausgeber:** Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

**Band:** 37 (1959)

**Heft:** 8

**Artikel:** L'influence de l'inductivité résiduelle des bobines Pupin sur les caractéristiques de transmission du circuit fantôme = Über den Einfluss der Streuinduktivität der Pupinspulen auf die Übertragungseigenschaften ds Phantomkreises

**Autor:** Goldschmidt, R.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-875454

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

R. GOLDSCHMIDT, Pully-Lausanne

# L'influence de l'inductivité résiduelle des bobines Pupin sur les caractéristiques de transmission du circuit fantôme *

# Über den Einfluss der Streuinduktivität der Pupinspulen auf die Übertragungseigenschaften des Phantomkreises *

621.315.2.054.3

**Résumé.** *Des formules – exactes et approximatives – sont développées, montrant l'effet des inductivités résiduelles des bobines Pupin des circuits de base sur les caractéristiques du circuit fantôme. A l'aide de ces formules, les valeurs pour le circuit fantôme d'un câble régional (quarte 4 × 1mm ∅) sont calculées pour des bobines d'une inductivité de 88,5 mH pour le circuit de base. Trois types de bobines, se distinguant par l'arrangement de leurs demi-enroulements, sont pris en considération. On voit que l'effet d'irrégularité de l'impédance et de la constante de propagation disparaît pratiquement pour une bobine à enroulement bifilaire. Depuis bientôt trois ans, ce type de bobines est utilisé par l'administration des PTT suisses.*

**Zusammenfassung.** *Es werden genaue und Näherungsformeln aufgestellt, die den Einfluss der Restinduktivität der Stammspulen auf die Eigenschaften des Phantomkreises zu berechnen gestatten. Mit Hilfe dieser Formeln werden die Eigenschaften des Phantomkreises eines Sternvierers (4 × 1 mm ∅) berechnet, dessen Stammkreise mit Spulen von 88,5 mH belastet sind. Drei Spulentypen verschiedener Wicklungsanordnung werden diesen Berechnungen zugrunde gelegt. Man erkennt, dass die Unregelmässigkeiten des Wellenwiderstandes und des Übertragungsbelages praktisch verschwinden, wenn die Spule bifilar gewickelt ist. Die Schweizerische PTT-Verwaltung benutzt seit fast drei Jahren solche Spulen.*

## Introduction

En 1900, *Michael Pupin* fit breveter aux Etats-Unis d'Amérique son invention concernant la charge inductive des circuits téléphoniques[1]. Depuis lors, dans tous les pays du monde qui possèdent leur propre réseau téléphonique, on a monté de telles «bobines Pupin», et ces dernières ont fortement contribué au développement technique rapide du trafic téléphonique national et international.

En même temps, ces bobines, qui possèdent un noyau magnétique de forme et de caractéristiques particulières, ont donné l'occasion d'études poussées dans le domaine du ferromagnétisme. Ne rappelons que le développement des noyaux comprimés et des isopermes et cette caractéristique propre aux bobines Pupin: «La stabilité magnétique».

Déjà en 1949, la Bell Telephone avait construit environ 20 millions de bobines Pupin. Les grands pays européens en avaient installé plusieurs millions et la Suisse environ trois cent mille.

## La construction des bobines Pupin

Depuis la découverte de Pupin, ces éléments de charge inductive ont été bobinés sur des noyaux annulaires appelés toroïdes. C'est cette construction qui permet de supprimer au mieux le flux inductif de fuite et par là de réduire au minimum l'accouplement magnétique entre circuits voisins.

En exécutant la bobine en deux demi-enroulements, on obtient une répartition symétrique de la bobine sur les deux fils du circuit téléphonique.

* Les calculs pour l'établissement des courbes ont été exécutés au laboratoire «Matières Magnétiques et Bobines» de l'Institut d'Electrotechnique de l'ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. Nous remercions la Fondation Hasler pour l'aide accordée à ce laboratoire.

[1] On trouve dans l'Official Gazette of the USA Patent Office 1900 (EPF) les indications suivantes relatives aux premiers brevets d'inventions de Pupin: 2 janvier 1900: «Electric transmission by resonance circuits», brevet n° 640'516; 19 juin 1900: «Reducing attenuation of waves and apparatus therefore», brevets n° 652'230 et 652'231.

## Einleitung

Im Jahre 1900 liess Michael Pupin seine Erfindung betreffend die induktive Belastung von Telephonleitungen in den Vereinigten Staaten von Amerika patentieren[1]. Seither hat man in allen Ländern, die eigene Telephonnetze besitzen, diese sogenannten «Pupinspulen» in die Leitungen der Netze eingebaut. Infolge der dadurch möglich gewordenen Sprechverständigung auf grosse Distanzen haben diese an die Entwicklung des nationalen und internationalen Telephonverkehrs wesentlich beigetragen.

Diese Spulen, die einen Magnetkern von besonderer Form und Eigenschaft besitzen, boten gleichzeitig Gelegenheit zu ausgedehnten Studien auf dem Gebiet des Ferromagnetismus. Wir denken hier vor allem an die Entwicklung der Massekerne und der Isoperme sowie an die den Pupinspulen besondere Eigentümlichkeit, die magnetische Stabilität.

Bis zum Jahre 1949 hatte die Bell Telephone Company etwa 20 Millionen Pupinspulen in das amerikanische Telephonnetz eingebaut. Die Telephonverwaltungen der grossen europäischen Länder haben bisher mehrere Millionen und die Schweizerische PTT-Verwaltung etwa 300 000 Pupinspulen in ihr Netz eingeschaltet.

## Die Konstruktion der Pupinspulen

Schon seit der Erfindung Pupins wird dieses induktive Belastungselement auf Ringkerne, sogenannte Toroide, gewickelt. Diese Anordnung ermöglicht es,

* Die Berechnungen für die Erstellung der Kurven wurden vom Laboratorium «Matières Magnétiques et Bobines» des Institutes für Elektrotechnik an der Universität Lausanne ausgeführt. Wir danken der Stiftung Hasler für die diesem Laboratorium gewährte Unterstützung.

[1] In der Official Gazette of the USA Patent Office 1900 (ETH) finden sich über die frühesten Erfindungen Pupins folgende Patenteintragungen: 2. Januar 1900: "Electric transmission by resonance circuits", Patent-Nr. 640'516; 19. Juni 1900: "Reducing attenuation of waves and apparatus therefore", Patent-Nrn. 652'230 und 652'231.

Dans la même intention, on a fabriqué des bobines destinées à la charge inductive des circuits à quatre fils, dits circuits fantômes, en quatre parties symétriques.

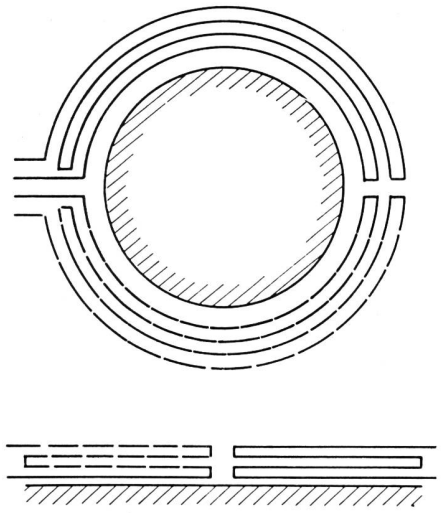
On peut répartir un enroulement en deux parties de plusieurs façons sur un toroïde (voir fig. I). L'enroulement du type I n'est en général pas utilisé; en effet, lorsqu'une forte impulsion de courant traverse une telle bobine, le noyau est magnétisé non uniformément et il y a formation de pôles d'aimantation. L'exécution la plus utilisée jusqu'à ce jour est le type II. Chaque demi-enroulement est partagé encore une fois et occupe ainsi toute la surface du noyau avec une moitié inférieure et une moitié supérieure. Il n'y a donc pas dans ce cas de formation de pôles d'aimantation.

L'enroulement type III a également cet avantage, mais les deux moitiés de l'enroulement de la bobine

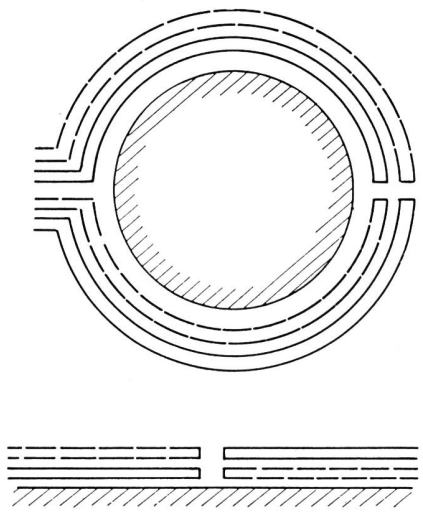
den induktiven Streufluss weitgehend zu unterdrücken und so die magnetische Koppelung zwischen benachbarten Sprechkreisen auf ein Minimum zu verringern.

Wird die Spule in zwei Halbwicklungen ausgeführt, so entsteht eine symmetrische Verteilung der Spule auf die beiden Drähte des Telephonkreises. In gleicher Weise hat man Spulen mit vier gleichen Wicklungen zur induktiven Belastung von vier Drähten, des sogenannten Phantomkreises, hergestellt.

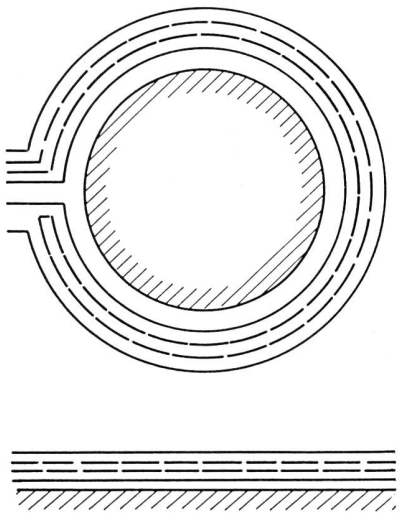
Eine zweiteilige Wicklung kann auf mehrere Arten auf einen Ringkern verteilt werden (siehe Figur 1, Typen I...IV). Eine Wicklung vom Typ I wird im allgemeinen nicht angewendet, denn wenn eine solche Spule von einem starken Stromstoss durchflossen wird, so würde der Kern nicht gleichmässig magnetisiert, und es bildeten sich magnetische Pole. Bis heute ist die Wicklung vom Typ II am meisten benützt



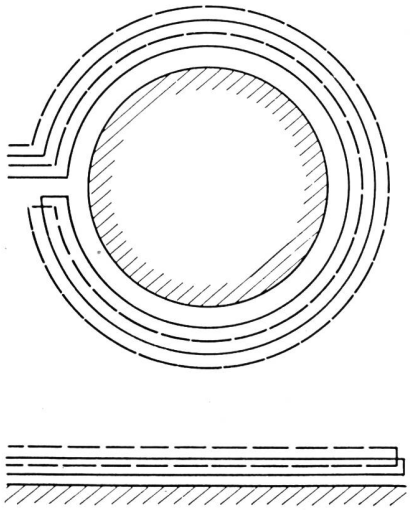
Type I: Bobinage sur deux moitiés
Typ I: Wicklungen auf zwei Kernhälften



Type II: Bobinage sur deux moitiés, enroulements sous-divisés
Typ II: Unterteilte Wicklungen auf zwei Kernhälften



Type III: Enroulements sur noyau entier enroulements intercalés
Typ III: Eingeschachtelte Wicklungen auf ganzem Kern



Type IV: Enroulements sur noyau entier, enroulements bifilaires
Typ IV: Bifilare Wicklungen auf ganzem Kern

Fig. 1.

ne sont pas géométriquement identiques et ainsi les caractéristiques de symétrie sont moins favorables que dans le type II. Toutefois la bobine III a un facteur de couplage plus favorable que le type II et, par conséquent, une plus faible inductivité résiduelle en connexion inefficace. (Voir pour rappel fig. II, les différents modes de connexion de deux bobines sur le même noyau).

Le meilleur facteur de couplage entre les deux enroulements est obtenu par l'enroulement type IV. L'enroulement bifilaire permet de diminuer encore la dispersion d'inductivité par rapport au type III; par contre, la capacité entre les parties de l'enroulement est beaucoup plus forte et influence déjà les caractéristiques de la ligne de transmission.

On a en général prêté peu d'attention à l'inductivité résiduelle des bobines Pupin. Si, comme c'est le cas pour les quartes Dieselhorst-Martin des câbles interurbains, les circuits de base et le circuit fantôme sont pupinisés, les quelques microhenrys de l'inductivité résiduelle des bobines s'ajoutent à l'induction de la bobine fantôme. Pour les quartes en étoile, le fantôme n'est en général pas pupinisé. L'inductivité résiduelle de la bobine Pupin du circuit de base forme une très faible charge inductive pour le circuit fantôme.

En général, jusqu'à maintenant, le circuit fantôme des quartes en étoile n'était utilisé que pour la transmission de fréquences basses, par exemple pour la

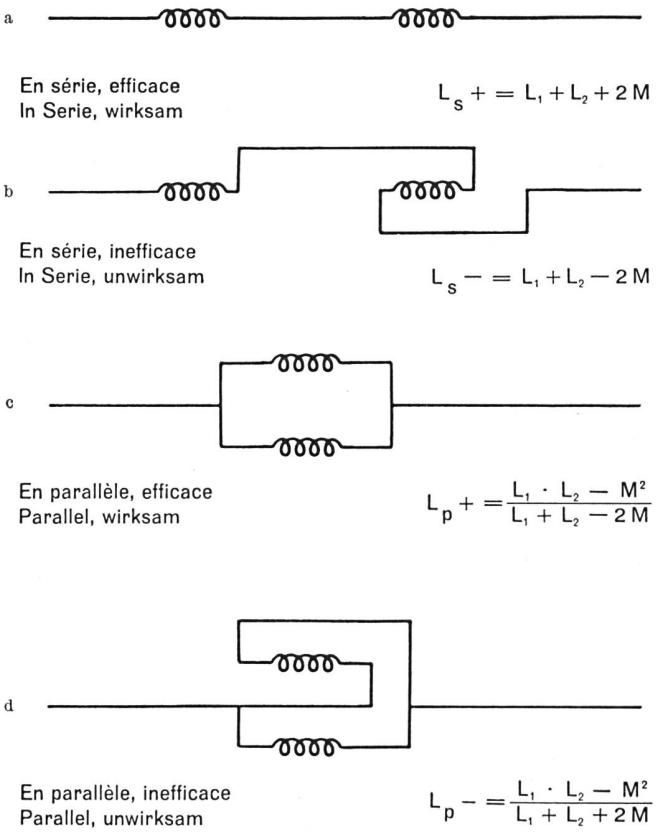



Fig. 2. Modes de couplage de deux enroulements
Schaltungsarten von zwei gekoppelten Windungen

worden. Bei diesem ist jede Halbwicklung noch einmal unterteilt, sie bedeckt so die ganze Oberfläche des Kerns mit einer oberen und einer unteren Hälfte. Bei starker Belastung entstehen in diesem Falle keine magnetischen Pole.

Die Wicklung vom Typ III weist den gleichen Vorteil auf, dagegen sind die beiden Hälften der Spulenwicklung geometrisch nicht gleich, und damit sind auch die Symmetrieeigenschaften ungünstiger als beim Typ II. Die Spule vom Typ III hat dagegen einen günstigeren Kopplungsfaktor als diejenige des Typs II und dadurch eine schwächere Restinduktivität in unwirksamer Schaltung. (Siehe Figur 2 mit den verschiedenen Schaltungstypen auf gemeinsamem Kern.)

Der beste Kopplungsfaktor zwischen den beiden Wicklungen ergibt sich mit der Wicklung vom Typ IV. Die bifilare Wicklung ermöglicht es, die Streuinduktivität gegenüber dem Typ III noch zu vermindern; dagegen ist die Kapazität zwischen den Wicklungsteilen erheblich grösser und beeinflusst bereits die Eigenschaften der Übertragungsleitung.

Bisher wurde der Restinduktivität der Pupinspulen im allgemeinen wenig Beachtung geschenkt. Wenn der Stamm- und der Phantomkreis pupinisiert sind, wie dies bei den *Dieselhorst-Martin*-Vierern der Fernkabel der Fall ist, so wird die Induktivität der Phantomspule durch die wenigen Mikrohenrys der Restinduktivität um einen vernachlässigbaren Betrag erhöht. Der Phantomkreis der Sternvierer ist im allgemeinen nicht pupinisiert. Hier stellt die Restinduktivität der Stammspulen nur eine sehr schwache Belastung des Phantomkreises dar.

Der Phantomkreis der Sternvierer wurde bisher vorwiegend zur Übertragung von Niederfrequenzen, wie beispielsweise für die Telegraphie, benützt. Bei dieser Verwendungsart ist der Einfluss der Restinduktivität nicht wahrnehmbar. Dies ändert sich jedoch, wenn durch den Phantomkreis Trägerfrequenzen von 30...100 kHz geschickt werden. Hiebei haben die Messungen der schweizerischen PTT-Verwaltung ergeben, dass von der Restinduktivität herrührende Störungen entstehen.

Der Zweck der nachstehenden Ausführungen besteht darin, diese Störungen zu berechnen oder, mit anderen Worten ausgedrückt, das Verhalten der induktiv belasteten Leitungen bei Frequenzen oberhalb der sogenannten Grenzfrequenz zu untersuchen.

### *Aufbau der Arbeit*

Die vorliegende Arbeit ist in folgende fünf Abschnitte gegliedert:

Im *ersten* Abschnitt wird die theoretische Ableitung der Formeln dargelegt. Es wird hiebei auf einige neue, typische Eigenschaften eines Übertragungssystems, das oberhalb der Grenzfrequenz betrieben wird, hingewiesen;

Im *zweiten* Abschnitt wird ein Beispiel durchgerechnet, jedoch unter Vernachlässigung der Verluste;

Im *dritten* Abschnitt wird das gleiche Beispiel,

télégraphie. Dans de telles applications, l'influence de l'inductivité résiduelle était imperceptible. Il en est autrement cependant lorsqu'on envoie par le fantôme des fréquences porteuses de l'ordre de 30...100 kHz. Dans ce cas, les mesures faites par l'administration suisse des PTT ont montré que des perturbations résultant de l'inductivité résiduelle se produisent.

Le but de l'exposé qui suit est d'établir mathématiquement ces influences. En d'autres termes: on a étudié comment se comportent des lignes chargées inductivement au-dessus de la fréquence dite fréquence de coupure.

### *Disposition du travail*

Nous avons divisé notre étude en cinq parties.

La première comporte le développement théorique des formules. On y trouvera quelques aspects nouveaux et typiques d'un tel système de transmission, lorsqu'on travaille au-dessus de sa fréquence de coupure.

La deuxième partie comporte le calcul numérique dans lequel on a négligé les pertes propres du câble et des bobines.

La troisième partie présente le calcul numérique, tenant compte de ces pertes.

La quatrième partie résume des formules approximatives pour les extrema des courbes de l'atténuation et de l'impédance. Ces formules sont déduites dans les *annexes 2, 3* et *4*.

Dans la cinquième partie, les résultats du calcul sont comparés avec des mesures effectuées par les PTT suisses.

Nous avons fait ces calculs pour une quarte en étoile composée de fils de 1 mm de diamètre tel qu'il est utilisé en Suisse, dans les câbles téléphoniques régionaux, et pour trois types de bobines dont l'inductivité de base vaut 88,5 mH, mais qui se distinguent par l'arrangement des deux moitiés d'enroulements et, donc, par leur inductivité résiduelle.

Les valeurs numériques relatives au câble et aux bobines sont données dans le *tableau I*; les symboles utilisés dans le calcul font l'objet du *tableau II*.

**Tableau I**

*Caractéristiques du câble* (circuit fantôme)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Résistance ohmique | $R$ = 22 ohm/km | | Nous le supposons pour simplifier les calculs |
| Inductivité | $L$ = 250 $\mu$H/km | | |
| Conductance | $G$ = 0 mho/km | | |
| Capacité | $C$ = 90 nF/km | | |
| Distance des bobines | $s$ = 1,83 km | | |

*Caractéristiques des bobines*

| | | |
|---|---|---|
| Type I | Inductivité résiduelle | 90 $\mu$H |
| Type II | Inductivité résiduelle | 30 $\mu$H |
| Type III | Inductivité résiduelle | 8 $\mu$H |

(D'un point de pupinisation – soit de deux bobines de base)

jedoch unter Beachtung der Verluste, durchgerechnet;

Der *vierte* Abschnitt betrifft die Aufstellung von Näherungsformeln für die Extrema der Dämpfungs- und Wellenwiderstandswerte. Diese Formeln sind in den *Annexen 2, 3* und *4* dargelegt.

Im *fünften* Abschnitt werden die Rechenergebnisse mit den Messungen der PTT-Verwaltung verglichen.

Das Rechenbeispiel bezieht sich auf einen Sternvierer, 4 × 1 mm, eines Bezirkskabels, wie es im schweizerischen Telephonkabelnetz gewöhnlich verwendet wird. Für die Spulen-Stamminduktivität von 88,5 mH wurden drei verschiedene Typen gewählt, die sich durch die Anordnung ihrer Halbwicklungen und damit durch ihre Streuinduktivitäten unterscheiden.

Die das Kabel und die Spulen betreffenden Zahlenwerte sind in der *Tabelle I* zusammengestellt. *Tabelle II* zeigt die Zusammenfassung der für die Rechnung benutzten Symbole.

**Tabelle I**

*Kabeleigenschaften* (Phantomkreis)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ohmscher Widerstand | $R$ | = 22 Ohm/km | Zur Vereinfachung der Berechnung angenommener Wert |
| Induktivität | $L$ | = 250 $\mu$H/km | |
| Leitwert | $G$ | = 0 mho/km | |
| Kapazität | $C$ | = 90 nF/km | |
| Spulendistanz | $s$ | = 1,83 km | |

*Spuleneigenschaften*

| | | |
|---|---|---|
| Typ I | Restinduktivität | 90 $\mu$H |
| Typ II | Restinduktivität | 30 $\mu$H |
| Typ III | Restinduktivität | 8 $\mu$H |

(Ein Pupinpunkt, d. h. zwei Basisspulen)

**Tabelle II**

*Verwendete Symbole*

| | | |
|---|---|---|
| $s$ | Spulendistanz | km |
| $R$ | Ohmscher Leitungswiderstand | Ohm/km |
| $L$ | Leitungsinduktivität | H/km |
| $G$ | Leitwert der Leitung | mho/km |
| $C$ | Leitungskapazität | F/km |
| $\omega = 2\pi f$ | Kreisfrequenz | $s^{-1}$ |
| $f$ | Frequenz | Hz |
| $\gamma$ | Übertragungsbelag der Leitung | — |
| $\alpha$ | Dämpfung | Np |
| $\beta$ | Phasenbelag | — |
| $Z$ | Impedanz | Ohm |
| $R_B$ | Spulenwiderstand | Ohm |
| $L_B$ | Spuleninduktivität | H |
| $Z_B$ | Spulenimpedanz | Ohm |
| A | Faktor } siehe Seite 309 | |
| B | Faktor } siehe Seite 309 | |
| $\gamma_p$ | Übertragungsbelag der belasteten Leitung | — |
| $Z_p$ | Impedanz der belasteten Leitung | Ohm |
| $\omega_{ox}$ | Resonanz-Kreisfrequenz für $Z_p = 0$ | $s^{-1}$ |
| $\omega_{\infty x}$ | Resonanz-Kreisfrequenz für $Z_p = \infty$ | $s^{-1}$ |
| $u_e$ resp. $u_s$ | Eingangs- bzw. Ausgangsspannung der belasteten Leitung | V |
| $i_e$ resp. $i_s$ | Eingangs- bzw. Ausgangsstrom der Leitung | A |

**Tableau II**

| *Symboles utilisés* | | |
|---|---|---|
| $s$ | Distance entre les bobines | km |
| $R$ | Résistance ohmique de la ligne | ohm/km |
| $L$ | Inductivité de la ligne | H/km |
| $G$ | Conductance de la ligne | mho/km |
| $C$ | Capacité de la ligne | F/km |
| $\omega = 2\pi f$ | Pulsation | $s^{-1}$ |
| $f$ | Fréquence | Hz |
| $\gamma$ | Constante de propagation de la ligne | — |
| $\alpha$ | Atténuation | Np |
| $\beta$ | Constante de phase | — |
| $Z$ | Impédance | ohm |
| $R_B$ | Résistance de la bobine | ohm |
| $L_B$ | Inductivité de la bobine | H |
| $Z_B$ | Impédance de la bobine | ohm |
| A | Opérateur } Voir page 309 | |
| B | Opérateur } | |
| $\gamma_p$ | Constante de propagation de la ligne chargée | — |
| $Z_p$ | Impédance de la ligne chargée | ohm |
| $\omega_{ox}$ | Pulsation de résonance pour $Z_p = 0$ | $s^{-1}$ |
| $\omega_{\infty x}$ | Pulsation de résonance pour $Z_p = \infty$ | $s^{-1}$ |
| $u_e$ resp. $u_s$ | Tension d'entrée, resp. de sortie de la ligne | V |
| $i_e$ resp. $i_s$ | Courant d'entrée, resp. de sortie de la ligne | A |

*Première partie: calcul général*

Le calcul se fait en négligeant la capacité entre les deux bobines de base d'un point de pupinisation.

Une section de pupinisation de longueur $s$ se compose donc de deux câbles de longueur $s/2$ et de la bobine insérée au milieu (voir *annexe 1*). Le câble est caractérisé par ses constantes de transmission,

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

la bobine par son impédance

$$Z_B = R_B + j\omega L_B$$

Dans le cas que nous étudions, les constantes $R$, $L$, $C$ et $G$ concernent le circuit fantôme du câble, alors que $R_B$ et $L_B$ sont les résistances ohmiques et l'inductivité résiduelle de deux bobines de base, en connexion fantôme et mise en série.

En utilisant la théorie des lignes (voir *annexe 1*) on obtient pour l'impédance et la constante de propagation d'un tel circuit les formules:

$$Z_p = Z \cdot \sqrt{1 + A}$$

$$\operatorname{ch} \gamma_p \cdot s = \operatorname{ch} \gamma \cdot s (1 + B)$$

$$A = \frac{1}{\frac{Z}{Z_B} \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot s + \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma \cdot s}{2}}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_B}{Z} \cdot \operatorname{th} \gamma \cdot s$$

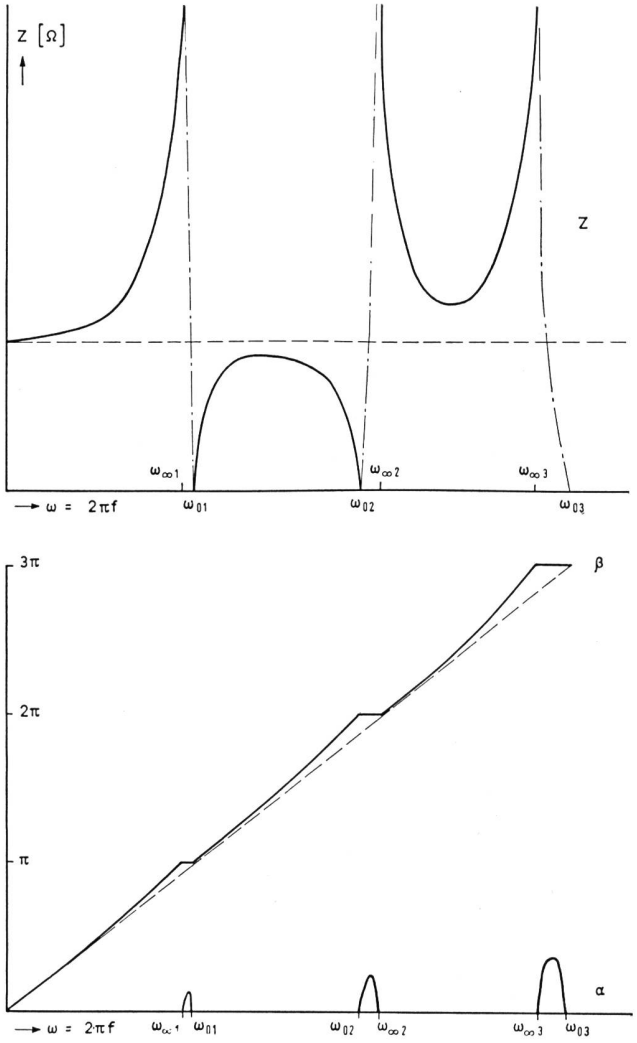



Fig. 3. Impédance constante de phase et atténuation d'une ligne chargée ponctuellement par de très faibles inductivités diagramme schématique en négligeant les pertes)
Wellenwiderstand, Phasenbelag und Dämpfung einer punktweise leicht induktiv belasteten Leitung (Schematisches Diagramm unter Vernachlässigung der Verluste)

*I. Teil. Allgemeine Berechnung*

Die Berechnung erfolgt unter Vernachlässigung der Kapazität zwischen den zwei Spulen eines Pupinpunktes.

Ein Spulenabschnitt besteht also aus zwei Kabeln der Länge $s/2$ und der Spule in der Mitte (siehe *Anhang 1*). Die Eigenschaften des Kabels werden durch seine Übertragungskonstanten bestimmt.

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Die Spule ist durch ihre Impedanz gekennzeichnet

$$Z_B = R_B + j\omega L_B$$

Im vorliegenden Fall beziehen sich die Grössen $R$, $L$, $C$ und $G$ auf den Phantomkreis; $R_B$ et $L_B$ stellen den Widerstand und die Streuinduktivität von zwei Stammspulen dar, die in Phantomschaltung in Serie verbunden sind.

Ces formules générales peuvent être simplifiées si nous négligeons les pertes dans le câble et dans la bobine. On peut alors écrire:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\beta$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$Z_B = j\omega L_B$$

et on obtient

$$Z_p = Z\sqrt{1 + A}$$

$$\operatorname{ch}\gamma_p s = \cos\beta \cdot s\,(1 + B)$$

avec

$$A = \frac{1}{\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin\beta \cdot s}{\beta \cdot s} - \sin^2\frac{\beta \cdot s}{2}}$$

$$B = -\frac{L_B}{2 \cdot L \cdot s} \cdot \beta \cdot s \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot s$$

*Etude de l'impédance en fonction de la fréquence* (en négligeant les pertes)

Dans l'expression de $Z_p$, le terme $Z$ est constant. La variation de $Z_p$ avec la fréquence dépend donc de la variation de A. Aux fréquences pour lesquelles A devient $\infty$, $Z_p$ devient également $\infty$. D'autre part pour $A = -1$, $Z_p$ devient égal à zéro. Les fréquences pour lesquelles $Zp = \infty$ sont désignées par $\omega_{\infty x}$ et celles pour lesquelles $Z_p = 0$ par $\omega_{0x}$. Ces fréquences se calculent comme suit (voir également fig. 3):

*Calcul des fréquences où A et $Z_p$ deviennent infinis*

Nous désignons donc ces fréquences par $\omega_{\infty x}$ et les constantes de phase correspondantes par $\beta_{\infty x}$. Nous aurons dès lors:

$$\frac{L \cdot s}{L_B}\,\frac{\sin\beta_{\infty x} s}{\beta_{\infty x} s} - \sin^2\frac{\beta_{\infty x} s}{2} = 0$$

ou

$$\left[\frac{L \cdot s}{L_B}\,\frac{\cos\frac{\beta_{\infty x} s}{2}}{\frac{\beta_{\infty x} s}{2}} - \sin\frac{\beta_{\infty x} s}{2}\right]\sin\frac{\beta_{\infty x} s}{2} = 0$$

Cette condition est périodiquement satisfaite pour deux fréquences que nous désignons pour la première période par $\omega_{\infty 1}$ et $\omega_{\infty 2}$. A ces fréquences correspondent les constantes de propagation $\beta_{\infty 1}$ et $\beta_{\infty 2}$.

La condition pour $\beta_{\infty 2}$ est fixée par:

$$\sin\frac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} = 0, \text{ soit } \frac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} = \pi$$

$$\beta_{\infty 2} \cdot s = 2\pi, \text{ ou } \omega_{\infty 2}\sqrt{LC} \cdot s = 2\pi$$

$$f_{\infty 2} = \frac{1}{\sqrt{LC} \cdot s}$$

Die Berechnung (siehe *Anhang 1*) ergibt dann für ein Spulenfeld folgende charakteristische Grössen:

$$Z_p = Z \cdot \sqrt{1 + A}$$

$$\operatorname{ch}\gamma_p \cdot s = \operatorname{ch}\gamma \cdot s\,(1 + B)$$

$$A = \frac{1}{\frac{Z}{Z_B}\operatorname{sh}\gamma \cdot s + \operatorname{sh}^2\frac{\gamma \cdot s}{2}}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_B}{Z} \cdot \operatorname{th}\gamma \cdot s$$

Diese allgemeinen Formeln lassen sich durch Vernachlässigung der Verluste des Kabels und der Pupinspulen wie folgt vereinfachen:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{CL} = j\beta$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$Z_B = j\omega L_B$$

und man erhält

$$Z_p = Z\sqrt{1 + A}$$

$$\operatorname{ch}\gamma_p s = \cos\beta \cdot s\,(1 + B)$$

$$A = \frac{1}{\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin\beta \cdot s}{\beta \cdot s} - \sin^2\frac{\beta \cdot s}{2}}$$

$$B = -\frac{L_B}{2 \cdot L \cdot s} \cdot \beta \cdot s \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot s$$

*Das Verhalten des Wellenwiderstandes in Abhängigkeit von der Frequenz* (Verluste vernachlässigt)

In der Formel für $Z_p$ ist der Wert $Z$ konstant. Die Abhängigkeit von $Z_p$ von der Frequenz ist also durch die Frequenzabhängigkeit von A bestimmt. Bei den Frequenzen, für die A unendlich wird, wird auch $Z_p$ unendlich. Dort, wo A gleich –1 wird, wird $Z_p$ gleich Null. Die Frequenzen, für welche $Z_p = \infty$, sind mit $\omega_{\infty x}$, und diejenigen, wo $Z_p = 0$, mit $\omega_{0x}$ bezeichnet (siehe Figur 3). Diese Frequenzen berechnen sich wie folgt:

*Berechnung der Frequenzen, wo A und $Z_p$ unendlich werden*

Wir bezeichnen daher diese Frequenzen mit $\omega_{\infty x}$ und die zugehörigen Phasenbelage mit $\beta_{\infty x}$. Es ergibt sich dann:

$$\frac{L \cdot s}{L_B}\,\frac{\sin\beta_{\infty x} s}{\beta_{\infty x} s} - \sin^2\frac{\beta_{\infty x} s}{2} = 0$$

oder

$$\left[\frac{L \cdot s}{L_B}\,\frac{\cos\frac{\beta_{\infty x} s}{2}}{\frac{\beta_{\infty x} s}{2}} - \sin\frac{\beta_{\infty x} s}{2}\right]\sin\frac{\beta_{\infty x} s}{2} = 0$$

Diese Bedingung ist periodisch für zwei Frequenzen erfüllt, die wir für die erste Periode mit $\omega_{\infty 1}$ und

La condition pour $\omega_{\infty 1}$ et $\beta_{\infty 1}$ est fixée par:

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}{\frac{\beta_{\infty 1} s}{2}} = \sin \frac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}$$

d'où
$$\frac{\beta_{\infty 1} s}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_{\infty 1} s}{2} = \frac{L \cdot s}{L_B}$$

On déduit du fait que la fonction tgx n'est positive qu'aux quadrants impairs, que $\beta_{\infty 1} \cdot s/2$ doit se trouver dans un de ces quadrants. Comme il s'agit d'une fréquence de la première période, elle doit satisfaire à la condition

$$0 < \frac{\beta_{\infty 1} s}{2} < \frac{\pi}{2}$$

On peut encore dire que $\beta_{\infty 1} \cdot s/2$ se trouve d'autant plus près de $\frac{\pi}{2}$ que $\frac{L \cdot s}{L_B}$ est grand.

*Calcul des fréquences ou $A = -1$ et $Z_p = 0$ ($\omega = \omega_{0x}$ et $\beta = \beta_{0x}$)*

La condition sera:

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin \beta_0 \cdot s}{\beta_0 \cdot s} - \sin^2 \frac{\beta_0 \cdot s}{2} = -1$$

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{2 \sin \frac{\beta_0 s}{2} \cos \frac{\beta_0 s}{2}}{\beta_0 s} = -\cos^2 \frac{\beta_0 s}{2}$$

$$\cos \frac{\beta_0 s}{2} \left[ \frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_0 s}{2}}{\frac{\beta_0 s}{2}} + \cos \frac{\beta_0 s}{2} \right] = 0$$

Cette condition est satisfaite par deux fréquences que nous désignons par $\omega_{01}$ et $\omega_{02}$, auxquelles valeurs correspondent $\beta_{01}$ et $\beta_{02}$.

On a dès lors:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{01} \cdot s/2 &= 0 \\ \text{soit} \quad \beta_{01} \cdot s/2 &= (k + \tfrac{1}{2})\, \pi \quad (k = 0; 1; 2 \ldots\ldots n) \\ \text{resp.} \quad \beta_{01} \cdot s &= (2k + 1)\, \pi \end{aligned}$$

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{\frac{\beta_{02} \cdot s}{2}} = -\cos \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}$$

$$\frac{\beta_{02} \cdot s}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta_{02} \cdot s}{2} = -\frac{L \cdot s}{L_B}$$

$\beta_{02}$ doit se trouver dans un quadrant pair; en effet, la fonction cotg x n'est négative que dans ces quadrants

$\omega_{\infty 2}$ bezeichnen. Diesen Frequenzen entsprechen die Phasenbelage $\beta_{\infty 1}$ und $\beta_{\infty 2}$.

$\omega_{\infty 1}$ und $\omega_{\infty 2}$ lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\sin \frac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} = 0, \text{ d.h. } \frac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} = \pi$$

$$\beta_{\infty 2} \cdot s = 2\pi \text{ oder } \omega_{\infty 2} \sqrt{LC} \cdot s = 2\pi$$

$$f_{\infty 2} = \frac{1}{\sqrt{LC} \cdot s}$$

Für $\omega_{\infty 1}$ (und $\beta_{\infty 1}$ ) gilt folgende Beziehung:

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\cos \frac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}{\frac{\beta_{\infty 1} s}{2}} = \sin \frac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}$$

daher
$$\frac{\beta_{\infty 1} s}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_{\infty 1} s}{2} = \frac{L \cdot s}{L_B}$$

Aus der Tatsache, dass die Funktion tgx nur in ungeraden Quadranten positiv ist, folgt, dass $\beta_{\infty 1} s/2$ sich in einem dieser Quadranten befinden muss. Da es sich um eine Frequenz der ersten Periode handelt, so gilt

$$0 < \frac{\beta_{\infty 1} s}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Es lässt sich auch sagen, dass $\beta_{\infty 1}\, s/2$ um so näher an $\frac{\pi}{2}$ liegt, als $\frac{L \cdot s}{L_B}$ gross ist.

*Berechnung der Frequenzen, wo $A = -1$ und $Z_p = 0$ ($\omega = \omega_{0x}$ und $\beta = \beta_{0x}$)*

Es gilt die Beziehung:

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin \beta_0 \cdot s}{\beta_0 \cdot s} - \sin^2 \frac{\beta_0 \cdot s}{2} = -1$$

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{2 \sin \frac{\beta_0 s}{2} \cos \frac{\beta_0 s}{2}}{\beta_0 \cdot s} = -\cos^2 \frac{\beta_0 s}{2}$$

$$\cos \frac{\beta_0 s}{2} \left[ \frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_0 s}{2}}{\frac{\beta_0 s}{2}} + \cos \frac{\beta_0 s}{2} \right] = 0$$

Diese Beziehung ist in der ersten Periode durch die mit $\omega_{01}$ und $\omega_{02}$ bezeichneten Frequenzen erfüllt, zu denen die Phasenbelage $\beta_{01}$ und $\beta_{02}$ gehören.

Es folgt demnach:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{01} \cdot s/2 &= 0 \\ \text{d.h.} \quad \beta_{01} \cdot s/2 &= (k + \tfrac{1}{2})\, \pi \quad k = 0; 1; 2; \ldots; n \\ \text{bzw.} \quad \beta_{01} \cdot s/ &= (2k + 1)\, \pi \end{aligned}$$

$$\frac{L \cdot s}{L_B} \cdot \frac{\sin \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{\frac{\beta_{02} \cdot s}{2}} = -\cos \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}$$

$$\frac{\beta_{02} \cdot s}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta_{02} \cdot s}{2} = -\frac{L \cdot s}{L_B}$$

$$(k + \tfrac{1}{2})\,\pi < \beta_{02} \cdot {}^{s}/2 < (k + 1)\,\pi$$

$\beta_{02}\, s/2$ se trouve d'autant plus près de $(k+1)\pi$ que $\dfrac{L \cdot s}{L_B}$ est grand.

*Comportement de* $\gamma_p \cdot s$ *(en fonction de la fréquence)*

Calculons maintenant les valeurs de $\gamma_p \cdot s$ pour les quatre fréquences déterminées ci-dessus. Nous aurons:

$$B = -\frac{\omega \cdot L_B}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{L}{C}}} \cdot \operatorname{tg} \omega \sqrt{L \cdot C} \cdot s = -\frac{\beta\, L_B}{2\, L} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot s$$

$$B = -\frac{\beta \cdot L_B}{2\, L} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{\beta \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta \cdot s}{2}}$$

et pour $\omega = \omega_{\infty 1}$

$$\frac{\beta_{\infty 1} \cdot L_B}{2\, L} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$B_{\infty 1} = -\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p\infty 1} \cdot s = \cos \beta_{\infty 1} \cdot s \left( 1 - \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}} \right)$$

$$= \cos \beta_{\infty 1} \cdot s \, \frac{-1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$= \cos \beta_{\infty 1} \cdot s \, \frac{-1}{\cos^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2} - \sin^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$= -1$$

$$\gamma_p \cdot {}_{\infty 1} \cdot s = \beta_{p\infty 1} \cdot s = (2\,k + 1)\,\pi$$

Pour $\sin \beta_{\infty 2}\, s/2 = 0$, nous obtenons:

$$B = -\frac{\beta_{\infty 2}\, L_B}{2\, L} \cdot \frac{2 \sin \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} \cos \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2}}{\cos^2 \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} - \sin^2 \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2}} = 0$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p\infty 2} \cdot s = \cos \beta_{p\infty 2} \cdot s = \cos \beta_{\infty 2} \cdot s = +1$$

De la même manière, nous obtenons pour:

$$\frac{\beta_{02}}{2} \frac{L_B}{L} = -\operatorname{tg} \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}$$

$$B_{02} = + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}$$

$\beta_{02} \cdot s/2$ muss sich in einem geraden Quadranten befinden, da nur dort cotg x negativ sein kann:

$$(k + \tfrac{1}{2})\,\pi < \beta_{02} \cdot s/2 < (k + 1)\,\pi$$

$\beta_{02} s/2$ liegt um so näher an $(k+1)\pi$, als $\dfrac{L \cdot s}{L_B}$ gross ist.

*Das Verhalten von* $\gamma_p \cdot s$ *in Abhängigkeit von der Frequenz*

Für die vorstehend festgelegten vier Frequenzen soll nun $\gamma_p \cdot s$ berechnet werden. Es ergibt sich:

$$B = -\frac{\omega \cdot L_B}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{L}{C}}} \cdot \operatorname{tg} \omega \sqrt{L \cdot C} \cdot s = -\frac{\beta\, L_B}{2\, L} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot s$$

$$B = -\frac{\beta \cdot L_B}{2\, L} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{\beta \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta \cdot s}{2}}$$

und für $\omega = \omega_{\infty 1}$

$$\frac{\beta_{\infty 1} \cdot L_B}{2\, L} = + \frac{1}{\operatorname{tg} \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$B_{\infty 1} = -\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p\infty 1} \cdot s = \cos \beta_{\infty 1} \cdot s \left( 1 - \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}} \right)$$

$$= \cos \beta_{\infty 1} \cdot s \, \frac{-1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$= \cos \beta_{\infty 1} \cdot s \, \frac{-1}{\cos^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2} - \sin^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$$

$$= -1$$

$$\gamma_p \cdot {}_{\infty 1} \cdot s = \beta_{p\infty 1} \cdot s = (2k + 1)\,\pi$$

Für $\sin \beta_{\infty 2}\, s/2 = 0$, erhält man:

$$B = -\frac{\beta_{\infty 2}\, L_B}{2\, L} \cdot \frac{2 \sin \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} \cos \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2}}{\cos^2 \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2} \sin^2 \dfrac{\beta_{\infty 2} \cdot s}{2}} = 0$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p\infty 2} \cdot s = \cos \beta_{p\infty 2} \cdot s = \cos \beta_{\infty 2} \cdot s = +1$$

In gleicher Weise findet sich für:

$$\frac{\beta_{02}}{2} \frac{L_B}{L} = -\operatorname{tg} \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}$$

$$B_{02} = + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p02} \cdot s = \cos \beta_{02} \cdot s \left( 1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}} \right)$$

$$= +1$$

$$\gamma_{p02} \cdot s = \beta_{p02} \cdot s = 2\,k\pi \quad (k = 1; 2; \ldots; n)$$

Pour $\cos \beta_{01}{}^{s}/2 = 0$, nous obtenons:

$$B = -\frac{\beta_{01} \cdot L_B}{2L} \quad \frac{2 \sin \frac{\beta_{01} \cdot s}{2} \cos \frac{\beta_{01} \cdot s}{2}}{\cos^2 \frac{\beta_{01} \cdot s}{2} - \sin^2 \frac{\beta_{01} \cdot s}{2}}$$

$$= 0$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p01} \cdot s = \cos \beta_{p01} \cdot s = \cos \beta_{01} \cdot s = 1$$

Résumons encore une fois les résultats obtenus:

Dans une bande de déphasage de $2\pi$, correspondant à une bande de fréquences de

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{LC}\; s}$$

nous avons quatre zones distinctes pour lesquelles $Z_p$ et $\gamma_p \cdot s$ ont les valeurs suivantes aux limites de ces zones. *(Tableaux III et IV.)*

*Calcul d'un exemple*

Nous avons calculé sur la base des formules données le comportement du circuit fantôme d'une quarte étoile $4 \times 1$ mm ⌀ d'un câble régional en choisissant trois types de bobines de 88,5 mH d'inductivité, ces trois bobines se distinguant par leur type de bobinage, elles correspondent aux types II, III et IV de la figure 1. Leurs inductivités et résistances mesurées en connexion inefficace, soit en série soit en parallèle (voir fig. 2), sont représentées par la figure nº 4.

Pour le calcul, nous avons utilisé les valeurs suivantes (valeurs pour deux bobines en série):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $L_B$ | 90 | 30 | 8 | H |
| $R_B$ | $139 \frac{\omega \cdot 10^{-6}}{2\pi}$ | $56 \frac{\omega \cdot 10^{-6}}{2\pi}$ | $30 \frac{\omega \cdot 10^{-6}}{2\pi}$ | $\mu\Omega$ |
| $\Psi = \frac{R_B}{\omega L_B}$ | 0,246 | 0,29 | 0,6 | — |

Avec les données du câble (voir *tableau I*), nous obtenons encore

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = 52{,}7\ \Omega$$

$$\beta s = \omega \sqrt{LC}\, s = 8{,}67\,(\omega \cdot 10^{-6}) = 497\,(\omega \cdot 10^{-6}) \text{ degrés}$$

$$R \simeq \frac{R_{cu}}{4} \left[ 1 + \sqrt[6]{3^6 + 8z^6} \right]$$

$$R_{cu} = 22\ \Omega/\text{km}$$

$$z = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_o\, \omega}{\varrho}}$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p02} \cdot s = \cos \beta_{02} \cdot s \left( 1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_{02} \cdot s}{2}} \right)$$

$$= +1$$

$$\gamma_{p02} \cdot s = \beta_{p02} \cdot s = 2\,k\pi \quad (k = 1; 2; \ldots; n)$$

Für $\beta_{01}\, s/2 = 0$, ergibt sich

$$B = -\frac{\beta_{01} \cdot L_B}{2L} \quad \frac{2 \sin \frac{\beta_{01} \cdot s}{2} \cos \frac{\beta_{01} \cdot s}{2}}{\cos^2 \frac{\beta_{01} \cdot s}{2} - \sin^2 \frac{\beta_{01} \cdot s}{2}}$$

$$= 0$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{p01} \cdot s = \cos \beta_{p01} \cdot s = \cos \beta_{01} \cdot s = 1$$

Die erhaltenen Resultate seien nochmals zusammengefasst:

In einem Phasenverschiebungsband von $2\pi$, das einem Frequenzband von

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{LC}\; s}$$

entspricht, unterscheiden wir vier Zonen, für welche $Z_p$ und $\gamma_p . s$ die nachstehenden Werte innerhalb dieser Zonen aufweisen. (Siehe *Tabellen III und IV.*)

*Berechnung eines Beispiels*

Auf Grund der aufgestellten Beziehungen haben wir das Verhalten der Eigenschaften des Phantomkreises eines Sternvierers (1 mm Drahtdurchmesser) eines Bezirkskabels für drei verschiedene Spulentypen berechnet. Die Spulen weisen im Stammkreis eine Induktivität von 88,5 mH auf und unterscheiden sich durch die Halbwicklungen, wie sie den Typen II, III und IV in Figur 1 entsprechen. Die Streuinduktivitäten und Widerstände dieser Spulen in unwirksamer Serie- und Parallelschaltung sind in Figur 4 dargestellt. Für die Berechnung haben wir folgende Werte verwendet (Werte für zwei Spulen in Serieschaltung):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $L_B$ | 90 | 30 | 8 | $\mu H$ |
| $R_B$ | $139 \frac{\omega \cdot 10^{-6}}{2\pi}$ | $56 \frac{\omega \cdot 10^{-6}}{2\pi}$ | $30 \frac{\omega \cdot 10^{-6}}{2\pi}$ | $\Omega$ |
| $\Psi = \frac{R_B}{\omega L_B}$ | 0,246 | 0,29 | 0,6 | — |

Mit den in *Tabelle I* angegebenen Werten erhalten wir noch für das Kabel:

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = 52{,}7\ \Omega$$

$$\beta s = \omega \sqrt{LC}\, s = 8{,}67\,(\omega \cdot 10^{-6}) = 497\,(\omega \cdot 10^{-6}) \text{ Grad}$$

$$R \simeq \frac{R_{cu}}{4} \left[ 1 + \sqrt[6]{3^6 + 8z^6} \right]$$

$$R_{cu} = 22\ \Omega/\text{km}$$

**Tableau III** **Tabelle III**

| $\omega$ | 0 | $\omega_{\infty 1}$ | $\omega_{01}$ | $\omega_{02}$ | $\omega_{\infty 2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0 | $\beta_{\infty 1}$ | $\beta_{01}$ | $\beta_{02}$ | $\beta_{\infty 2}$ |
| $\beta \cdot s$ | 0 | $\longrightarrow \pi$ | $\pi$ | $\longrightarrow 2\pi$ | $2\pi$ |
| A | 0 | $\infty$ | $-1$ | $-1$ | $\infty$ |
| $Z_p$ | $Z_0$ | $\infty$ | 0 | 0 | $\infty$ |
| B | 0 | $\dfrac{-2}{1-\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$ | 0 | $\dfrac{2\,\mathrm{tg}^2 \beta_{02} \dfrac{s}{2}}{1-\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{02}\, s}{2}}$ | 0 |
| $\mathrm{ch}\,\gamma_p \cdot s$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ |

**Tableau IV** **Tabelle IV**

| Si $\omega$ varie de $\nearrow$ | $0 \longrightarrow \omega_{\infty 1}$ | $\omega_{\infty 1} \longrightarrow \omega_{01}$ | $\omega_{01} \longrightarrow \omega_{02}$ | $\omega_{02} \longrightarrow \omega_{\infty 2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | $0 \longrightarrow \beta_{\infty 1}$ | $\beta_{\infty 1} \longrightarrow \beta_{01}$ | $\beta_{01} \longrightarrow \beta_{02}$ | $\beta_{02} \longrightarrow \beta_{\infty 2}$ |
| A | $0 \longrightarrow \infty$ | $-\infty \longrightarrow -1$ | $-1 \longrightarrow -1$ | $-1 \longrightarrow -\infty$ |
| $Z_p$ | $Z_0 \longrightarrow \infty$ réel wirklich | $-\infty \longrightarrow 0$ imaginaire imaginär | réel $0 \longrightarrow 0$ wirklich | $0 \longrightarrow \infty$ imaginaire imaginär |
| B | $0 \longrightarrow \dfrac{-2}{1-\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}}$ | $\dfrac{-2}{1-\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{\infty 1} \cdot s}{2}} \longrightarrow 0$ | $0 \longrightarrow \dfrac{2\,\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{1-\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}$ | $\dfrac{2\,\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}}{1-\mathrm{tg}^2 \dfrac{\beta_{02} \cdot s}{2}} \longrightarrow 0$ |
| $\cos \gamma_p \cdot s$ | $+1 \longrightarrow -1$ | $-1 \longrightarrow -1$ | $-1 \longrightarrow +1$ | $+1 \longrightarrow +1$ |
| $\beta_p \cdot s$ | $0 \longrightarrow \pi$ | $\pi$ | $\pi \longrightarrow 2\pi$ | $2\pi$ |
| $\alpha_p \cdot s$ | 0 | * | 0 | * |

$$* \quad \alpha_p \cdot s = \mathrm{argch} \left| \cos \beta s - \frac{L_B}{Ls} \frac{\beta \cdot s}{2} \sin \beta \cdot s \right|$$

$$z = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0 \omega}{\varrho}}$$

$d = 1 \cdot 10^{-3}$ m; $\mu_r = 1$; $\mu_0 = 0{,}4\pi \cdot 10^{-6}$ H/m

$\varrho = 17{,}2$ n $\Omega$ m

$$z = 4{,}27 \sqrt{\omega \cdot 10^{-6}}$$

Le calcul a été alors exécuté soit en négligeant les pertes dues aux résistances ohmiques du câble et des bobines, soit en en tenant compte. Ces calculs, très longs et pénibles, ne sont présentés dans ce rapport que par leurs résultats portés dans les figures 5 à 10.

*Calcul en négligeant les pertes*
(figures 5, 6 et 7)

La figure 5 représente le comportement de $ch\gamma_p \cdot s$ en fonction de la fréquence. Pour une ligne homogène, donc sans inductivités localement concentrées, la courbe pour $ch\gamma_p \cdot s$ reste entre les limites

Die Berechnung wurde sowohl unter Vernachlässigung der auf den ohmschen Widerstand des Kabels als auch auf denjenigen der Spulen zurückzuführenden Verluste durchgeführt. Die sehr langwierigen Berechnungen gehen in diesem Beitrag nur durch die in den Figuren 5, 6, 6 a, 6 b, 7, 8, 8 a, 8 b, 8 c, 9 a, 9 b und 10 dargestellten Resultate hervor.

*Berechnung unter Vernachlässigung der Verluste*
(Figuren 5...7)

Die Figur 5 zeigt den Verlauf von $ch\gamma_p \cdot s$ in Abhängigkeit von der Frequenz. Für eine homogene

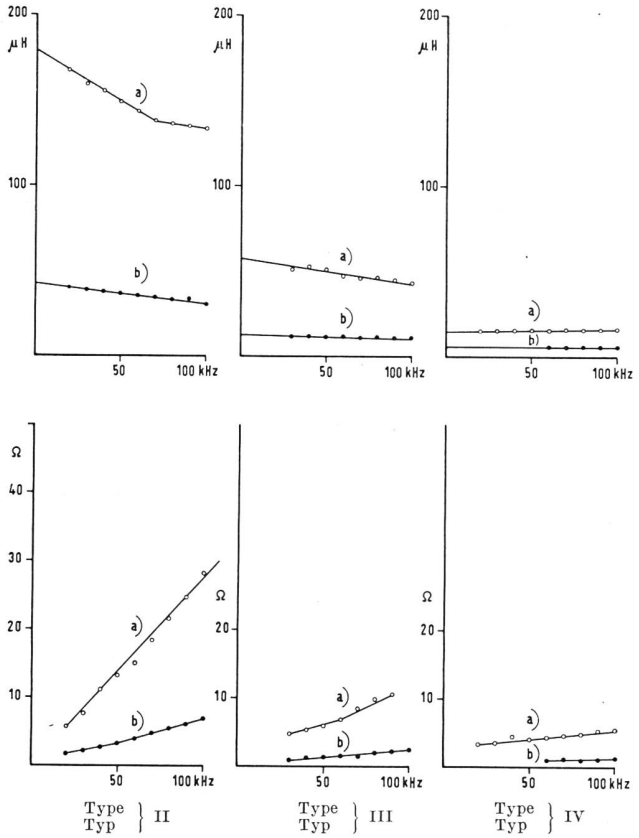



Fig. 4. Inductivités résiduelles et résistances de bobines Pup n (88,5 mH)
Restinduktivitäten und Widerstände von Pupinspulen (88,5 mH)
a) = en série inefficace – in unwirksamer Serieschaltung
b) = en parallèle inefficace – in unwirksamer Parallelschaltung

de ± 1. En présence de telles inductivités, $ch\gamma_p \cdot s$ dépasse ces limites et cela d'autant plus et pour des bandes de fréquences d'autant plus larges que l'inductivité est grande. Dans ces bandes de fréquences, l'impédance est imaginaire, l'atténuation apparaît et passe par un maximum et la constante de phase est constante et égale à $k\pi$ (voir fig. 6 et 7; les fig. 6a, 6b, 6c sont des agrandissements partiels de la fig. 6).

*Calcul en tenant compte des pertes*

Les résultats de ces calculs sont portés dans les figures 8a à 10. Les courbes obtenues sont semblables à celles calculées en négligeant les pertes, les discontinuités et les points singuliers n'existant plus, bien entendu. On voit que les irrégularités causées par des bobines disparaissent pratiquement pour une inductivité résiduelle de $8\mu$H, donc pour des bobines à enroulement bifilaire.

*Formules approximatives*

L'évaluation des formules exactes étant longue et pénible, nous avons établi quelques relations approximatives.

Ainsi les maxima de l'atténuation se calculent en négligeant les pertes (voir *annexe n° 2*) par

$$(\alpha_{po} \cdot s)_{max} \simeq k \frac{\pi}{2} \frac{L_B}{Ls}$$

Leitung, also ohne konzentrierte lokale Induktivitäten, bleibt die Kurve $ch\gamma_p \cdot s$ zwischen den Grenzen von ± 1. Sind jedoch solche Induktivitäten vorhanden, so überschreitet diese $ch\gamma_p \cdot s$ diese Grenzen, und zwar um so mehr und für ein um so breiteres Frequenzband, je grösser die Induktivitäten sind. In diesen Frequenzbändern ist der Wellenwiderstand imaginär, es tritt eine Dämpfung auf, die durch ein Maximum geht und der Phasenbelag gleich $k\pi$ ist. (Vergl. Figuren 6 und 7.) Die Figuren 6 a, 6 b und 6 c sind vergrösserte Auszüge der Figur 6.

*Berechnung unter Berücksichtigung der Verluste*

Die Resultate dieser Berechnungen gehen aus den Figuren 8 a, 8 b, 8 c, 9 a, 9 b und 10 hervor. Die erhaltenen Kurven gleichen jenen, die unter Vernachlässigung der Verluste errechnet wurden, dagegen sind Diskontinuitäten und Spitzen verschwunden. Man sieht auch, dass die durch die Restinduktivität erzeugten Unregelmässigkeiten praktisch verschwunden, wenn diese Induktivität den Wert von 8 $\mu$H erreicht, das heisst bei bifilar gewickelten Spulen.

*Näherungsformeln*

Die Auswertung der genauen Formeln ist sehr langwierig. Wir haben deshalb einige Näherungsformeln abgeleitet.

So können die Maxima der Dämpfung unter Vernachlässigung der Verluste wie folgt berechnet werden (siehe *Anhang 2*) durch

$$(\alpha_{po} \cdot s)_{max} \simeq k \frac{\pi}{2} \frac{L_B}{Ls}$$

Bei Berücksichtigung der Verluste ergibt sich (siehe *Anhang 3*)

$$(\alpha_p \cdot s)_{max} \simeq \sqrt{(\alpha s)^2 + (\alpha_{po} s)^2_{max}}$$

wobei $\alpha$ = Kabeldämpfung

Die Extremwerte des Wellenwiderstandes (siehe Figur 5) werden in erster Annäherung durch folgende Formeln bestimmt (siehe *Anhang 4*):

$$Z_{pe} \simeq Z \left(1 \mp \frac{L_B}{Ls} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$k = 1, 2; 3 \ldots$$

*Vergleich mit den Messungen*

Die Figur 11 zeigt einen Vergleich der im Bereiche des ersten Dämpfungsmaximums berechneten Werte mit Messungen, die von der schweizerischen PTT-Verwaltung ausgeführt wurden. Die gemessene Maxima befindet sich bei der berechneten Frequenz, doch ist der Verlauf der gemessenen Kurven flacher als der der berechneten. Die Differenz ist darauf zurückzuführen, dass wir für die ohnehin schon langen Berechnungen gewisse Faktoren vernachlässigen mussten, wie zum Beispiel die elektrischen Verluste des

En tenant compte des pertes, on obtient la relation (voir *annexe n° 3*)

$$(\alpha_p \cdot s)_{max} \simeq \sqrt{(\alpha s)^2 + (\alpha_{po} s)^2_{max}}$$

avec $\alpha$ = atténuation du câble

Les maxima et minima de l'impédance (voir *figure n° 5*) sont en approximation déterminés par la formule (voir *annexe n° 4*)

$$Z_{pe} \simeq Z\left(1 \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$k = 1, 2; 3 \ldots$$

*Comparaison avec des mesures*

La figure n° 11 représente une comparaison des valeurs calculées dans la région du premier maximum de l'atténuation et des valeurs mesurées par l'administration des PTT suisses. L'effet se trouve aux fréquences prévues, mais l'irrégularité des courbes est moins prononcée d'après les mesures que d'après les calculs. Cette différence s'explique facilement, car nous avons dû, pour le calcul déjà trop long, simplifier certaines données et négliger certains facteurs tels que pertes diélectriques du câble, pertes supplémentaires par courants de *Foucault* dans les conducteurs voisins, capacité propre des bobines, diminution de l'inductivité de fuite avec la fréquence.

## Annexe 1

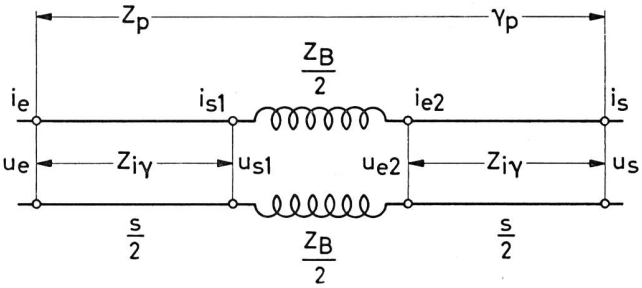
*Calcul de l'impédance et de la constante de propagation d'une ligne pupinisée.*

(Voir figure ci-contre)

Kabels, die *Foucaultströme* in den benachbarten Leitern, die Eigenkapazität der Spulen und die Abnahme der Restinduktivität der Spulen mit der Frequenz.

## Anhang 1

*Berechnung des Wellenwiderstandes und der Fortpflanzungskonstante einer pupinisierten Leitung*




1) $u_e = u_{s1} \operatorname{ch}\frac{\gamma \cdot s}{2} + i_{s1} Z \operatorname{sh}\frac{\gamma \cdot s}{2}$

$i_e = i_{s1} \operatorname{ch}\frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{u_{31}}{Z} \operatorname{sh}\frac{\gamma \cdot s}{2}$

2) $u_{s2} = u_s \operatorname{ch}\frac{\gamma \cdot s}{2} + i_e Z \operatorname{sh}\frac{\gamma \cdot s}{2}$

$i_{e2} = i_s \operatorname{ch}\frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{u_s}{Z} \operatorname{sh}\frac{\gamma \cdot s}{2}$

3) $u_{s1} = u_{e2} + i_{e2} Z_B$
$i_{s1} = i_{e2}$

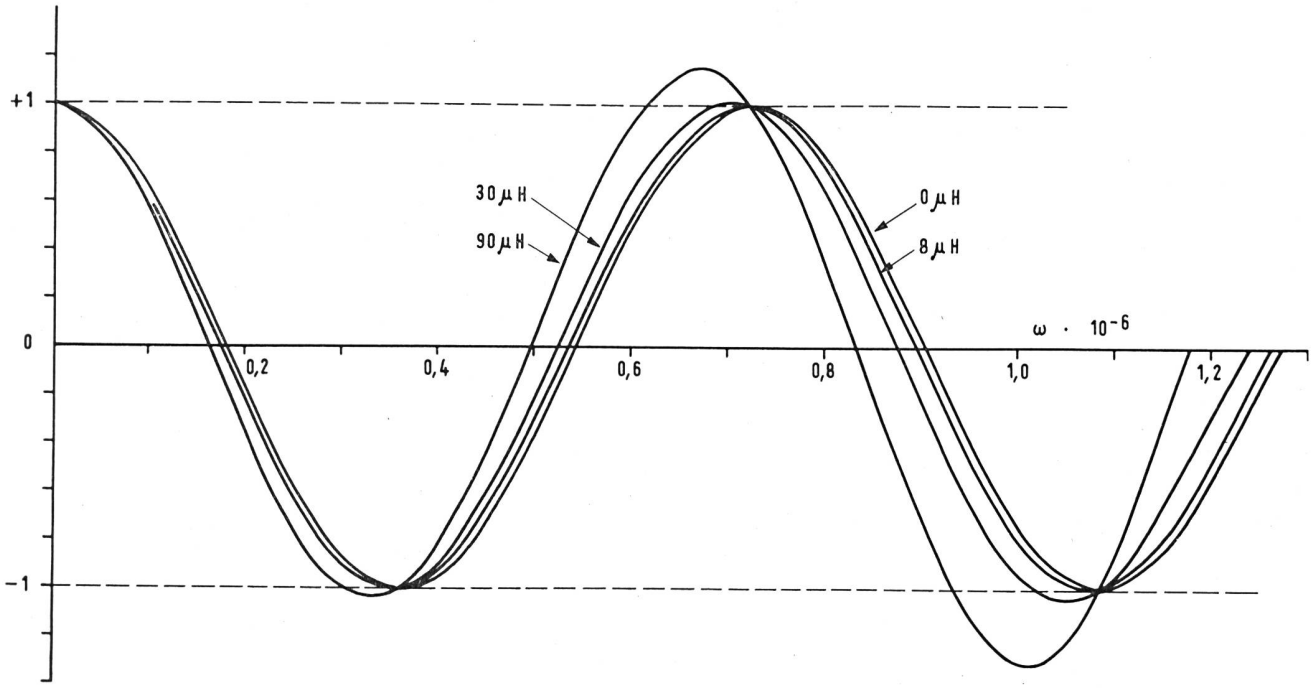



Fig. 5. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ⌀), cos $\beta s$ pour ligne sans pertes $s$ = 1,83 km; Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30; 90 $\mu$H.
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ⌀), cos $\beta s$ für verlustfreie Leitung; Spulenabstand = 1,83 km; Restinduktivität der Stammspulen 0; 8; 30; 90 $\mu$H

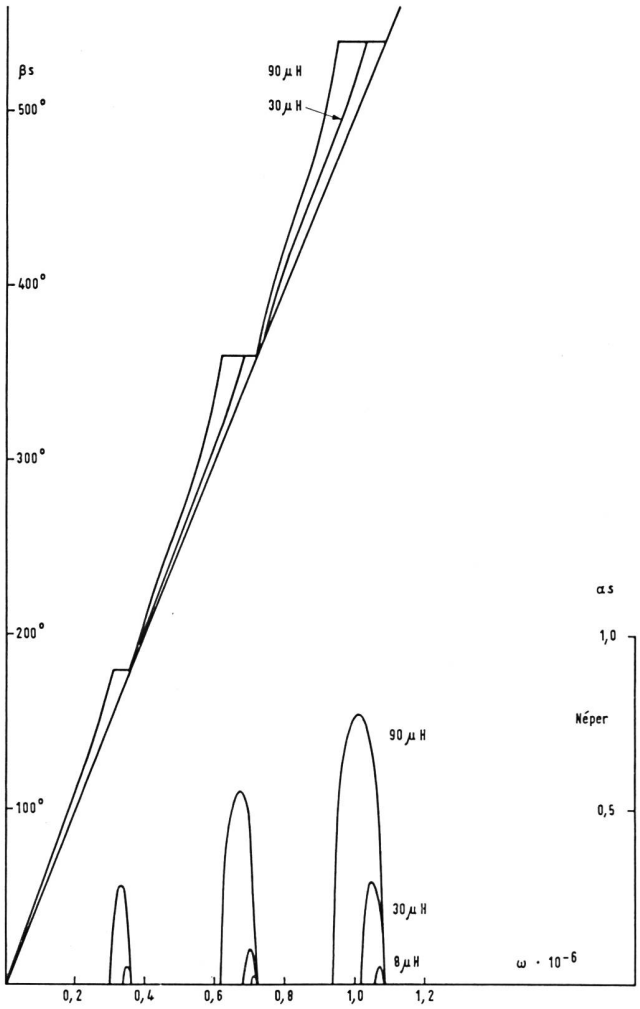



Fig. 6. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ∅). Atténuation et constante de phase pour $s$ = 1,83 km (ligne sans pertes);
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ∅). Dämpfung und Phasenbelag für $s$ = 1,83 km (Vernachlässigung der Leitungsverluste;
Restinduktivität der Stammspulen 0; 8; 30 und 90 $\mu$H

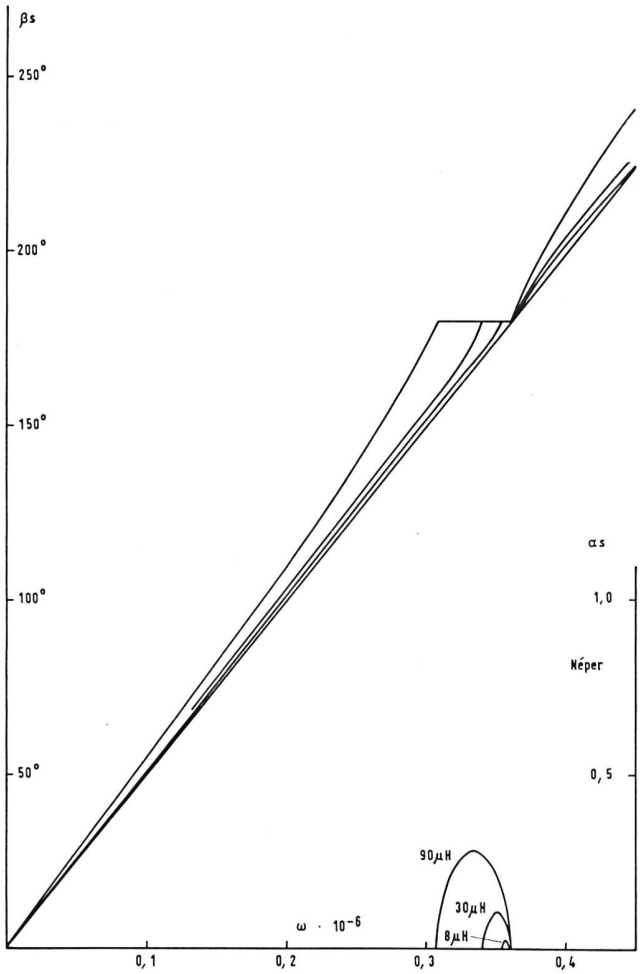



Fig. 6 a. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ∅), agrandissement partiel de la figure 6.
Atténuation et constante de phase pour $s$ = 1,83 km (ligne sans pertes);
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ∅), teilweise Vergrösserung aus der Figur 6;
Dämpfung und Phasenbelag für $s$ = 1,83 km (Vernachlässigung der Leitungsverluste);
Restinduktivitäten der Stammspulen 0; 8; 30 und 90 $\mu$H

1) $$u_e = u_{s1} \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + i_{s1} Z \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2}$$

$$i_e = i_{s1} \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{u_{s1}}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2}$$

2) $$u_{e2} = u_s \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + i_s Z \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2}$$

$$i_{e2} = i_s \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{u_s}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2}$$

3) $$u_{s1} = u_{e2} + i_{e2} Z_B$$
$$i_{s1} = i_{e2}$$

En remplaçant 3) dans 1), on obtient:

4) $$u_e = u_{e2} \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + i_{e2} \left( Z_B \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + Z \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \right)$$

$$i_e = i_{e2} \left( \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{Z_B}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \right) + u_{e2} \frac{1}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2}$$

Durch Umsetzen von 3) in 1) erhält man:

4) $$u_e = u_{e2} \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + i_{e2} \left( Z_B \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + Z \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \right)$$

$$i_e = i_{e2} \left( \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{Z_B}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \right) + u_{e2} \frac{1}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2}$$

Durch Kombination von 2) und 4) ergibt sich:

$$u_e = u_s \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\gamma \cdot s}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{Z_B}{Z} \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} \right] +$$
$$+ i_s \left[ Z\, 2 \operatorname{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \operatorname{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + Z_B \operatorname{ch}^2 \frac{\gamma \cdot s}{2} \right]$$

$$u_e = u_s \left[ \operatorname{ch} \gamma s + \frac{1}{2} \frac{Z_B}{Z} \operatorname{sh} \gamma_s \right] + i_s Z \left[ \operatorname{sh} \gamma_s + \frac{Z_B}{Z} \operatorname{ch}^2 \frac{\gamma_s}{2} \right]$$

En combinant 2) avec 4), on obtient:

$$u_e = u_s \left[ \mathrm{ch}^2 \frac{\gamma s}{2} + \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma \cdot s}{2} + \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \mathrm{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} \right] + $$

$$+ i_s \left[ Z\, 2\, \mathrm{sh} \frac{\gamma \cdot s}{2} \mathrm{ch} \frac{\gamma \cdot s}{2} + Z_B \mathrm{ch}^2 \frac{\gamma \cdot s}{2} \right]$$

$$u_e = u_s \left[ \mathrm{ch}\, \gamma s + \frac{1}{2} \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh}\, \gamma s \right] + i_s Z \left[ \mathrm{sh}\, \gamma s + \frac{Z_B}{Z} \mathrm{ch}^2 \frac{\gamma s}{2} \right]$$

$$5)\quad i_e = i_s \left[ \mathrm{ch}^2 \frac{\gamma s}{2} + \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh} \frac{\gamma s}{2} \mathrm{ch} \frac{\gamma s}{2} + \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma s}{2} \right] + $$

$$+ u_s \left[ \frac{1}{Z} 2\, \mathrm{sh} \frac{\gamma s}{2} \mathrm{ch} \frac{\gamma s}{2} + \frac{Z_B}{Z^2} \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma s}{2} \right]$$

$$= i_s \left[ \mathrm{ch}\, \gamma s + \frac{1}{2} \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh}\, \gamma s \right] + u_s \frac{1}{Z} \left[ \mathrm{sh}\, \gamma s + \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma s}{2} \right]$$

En introduisant les équations de définition:

$$6)\quad u_e = u_s \,\mathrm{ch}\, \gamma_p s + i_s Z_p \,\mathrm{sh}\, \gamma_p s$$

$$i_e = i_s \,\mathrm{ch}\, \gamma_p s + \frac{u_s}{Z_p} \mathrm{sh}\, \gamma_p s$$

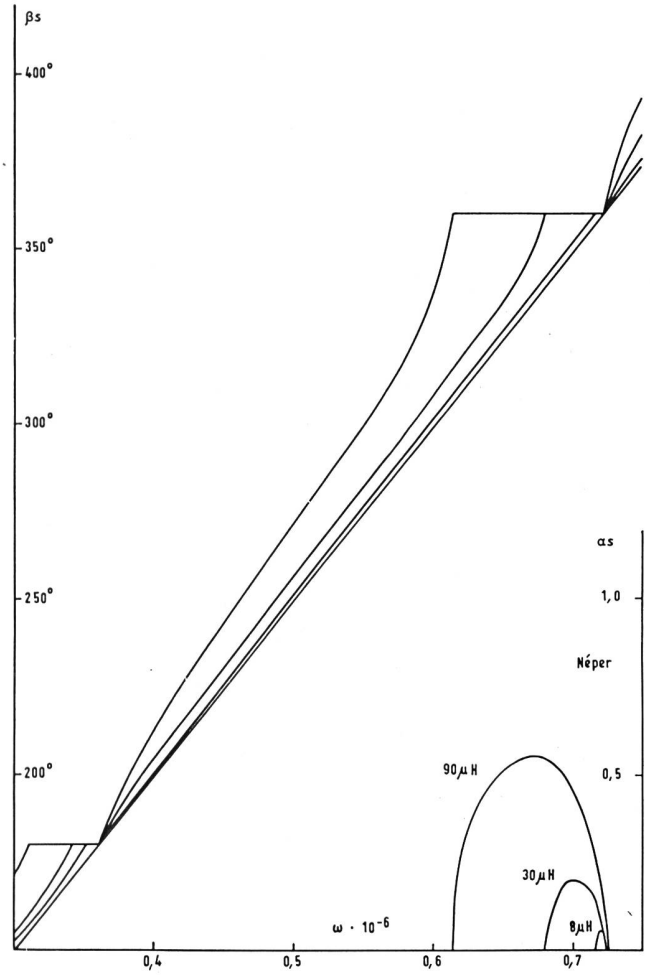



Fig. 6 b. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ∅). Atténuation et constante de phase pour $s$ = 1,83 km (ligne sans pertes);
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H

Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ∅). Dämpfung und Phasenbelag für $s$ = 1,83 km (Vernachlässigung der Leitungsverluste);
Restinduktivität der Stammspulen 0; 8; 30 und 90 $\mu$H

$$5)\quad i_e = i_s \left[ \mathrm{ch}^2 \frac{\gamma s}{2} + \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh} \frac{\gamma s}{2} \mathrm{ch} \frac{\gamma s}{2} + \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma s}{2} \right] + $$

$$+ u_s \left[ \frac{1}{Z} 2\, \mathrm{sh} \frac{\gamma s}{2} \mathrm{ch} \frac{\gamma s}{2} + \frac{Z_B}{Z^2} \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma s}{2} \right]$$

$$= i_s \left[ \mathrm{ch}\, \gamma s + \frac{1}{2} \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh}\, \gamma s \right] + u_s \frac{1}{Z} \left[ \mathrm{sh}\, \gamma s + \frac{Z_B}{Z} \mathrm{sh}^2 \frac{\gamma s}{2} \right]$$

Unter Benützung der folgenden Definition:

$$6)\quad u_e = u_s \,\mathrm{ch}\, \gamma_p s + i_s Z_p \,\mathrm{sh}\, \gamma_p s$$

$$i_e = i_s \,\mathrm{ch}\, \gamma_p s + \frac{u_s}{Z_p} \mathrm{sh}\, \gamma_p s$$

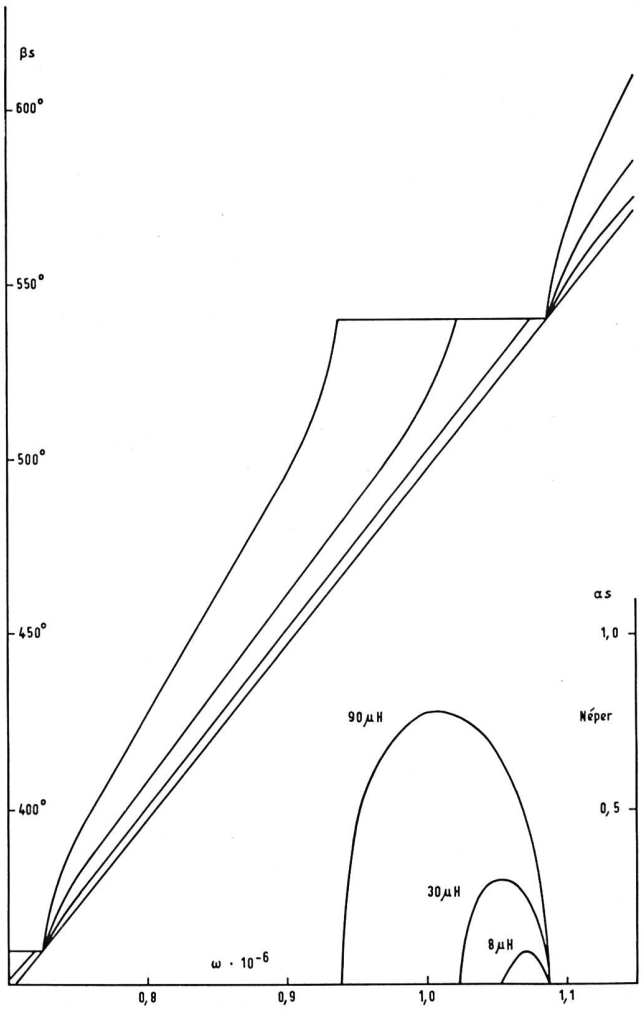



Fig. 6 c. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ∅). Atténuation et constante de phase pour $s$ = 1,83 km (ligne sans pertes);
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H

Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ∅). Dämpfung und Phasenbelag für $s$ = 1,83 km (Vernachlässigung der Leitungsverluste);
Restinduktivität der Stammspulen 0; 8; 30 und 90 $\mu$H

on arrive après identification aux équations:

$$\boxed{\operatorname{ch}\gamma_p s = \operatorname{ch}\gamma s + \frac{1}{2}\frac{Z_B}{Z}\operatorname{sh}\gamma s}$$

$$Z_p = Z\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\gamma s + \frac{Z_B}{Z}\operatorname{ch}^2\frac{\gamma s}{2}}{\operatorname{sh}\gamma s + \frac{Z_B}{Z}\operatorname{ch}^2\frac{\gamma s}{2}}}$$

$$\boxed{Z_p = Z\sqrt{1 + \frac{1}{\frac{Z}{Z_B}\operatorname{sh}\gamma s + \operatorname{sh}^2\frac{\gamma s}{2}}}}$$

## Annexe 2

*Calcul des maxima de l'atténuation*
(en négligeant les pertes)

Du fait de la relation:

$$\operatorname{ch}\gamma_p s = \operatorname{ch}(\alpha_p + \mathrm{j}\beta_p)s$$
$$= \operatorname{ch}\alpha_p s\cos\beta_p s + \mathrm{j}\operatorname{sh}\alpha_p s\sin\beta s$$

et du fait que ch $\gamma_p \cdot s$ est réel, le terme imaginaire de la relation doit disparaître. ch $\alpha_p \cdot s$ étant tou-

kommt man durch Gleichsetzen zu den Ausdrücken:

$$\boxed{\operatorname{ch}\gamma_p s = \operatorname{ch}\gamma s + \frac{1}{2}\frac{Z_B}{Z}\operatorname{sh}\gamma s}$$

$$Z_p = Z\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\gamma s + \frac{Z_B}{Z}\operatorname{ch}^2\frac{\gamma s}{2}}{\operatorname{sh}\gamma s + \frac{Z_B}{Z}\operatorname{sh}^2\frac{\gamma s}{2}}}$$

$$\boxed{Z_p = Z\sqrt{1 + \frac{1}{\frac{Z}{Z_B}\operatorname{sh}\gamma s + \operatorname{sh}^2\frac{\gamma s}{2}}}}$$

## Anhang 2

*Berechnung der Dämpfungsmaxima*
(unter Vernachlässigung der Verluste)

Wir gehen von der Beziehung aus:

$$\operatorname{ch}\gamma_p s = \operatorname{ch}(\alpha_p + \mathrm{j}\beta_p)s$$
$$= \operatorname{ch}\alpha_p s\cos\beta_p s + \mathrm{j}\operatorname{sh}\alpha_p s\sin\beta s$$

und beachten, dass $\gamma_p \cdot s$ reell ist. Da ch $\alpha_p \cdot s$ immer grösser und cos $\beta_p \cdot s$ immer kleiner als eins ist, be-

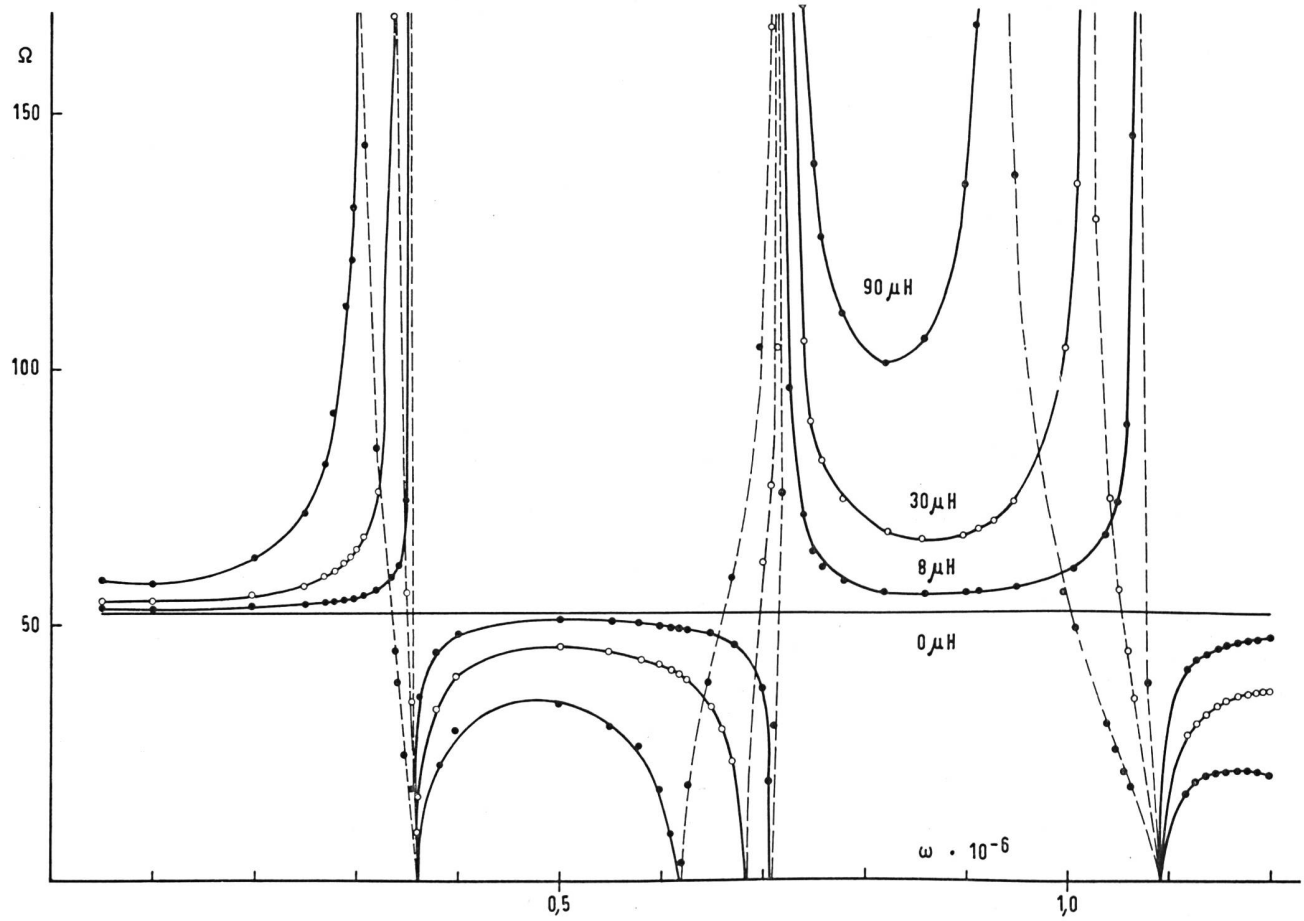



Fig. 7. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ⌀). Impédance pour une ligne sans pertes; inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 µH

Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ⌀). Wellenwiderstand für eine verlustfreie Leitung; Restinduktivitäten der Stammspulen 0; 8; 30 und 90 µH

jours plus grand et cos $\beta_p \cdot s$ toujours plus petit que 1, nous n'avons d'atténuation que si ch $\gamma_p \cdot s$ est plus grand que 1.

Pendant ces périodes, $\beta_p \cdot s$ est égal à $k\pi$, donc $\cos \beta_p \cdot s = \mp 1$.

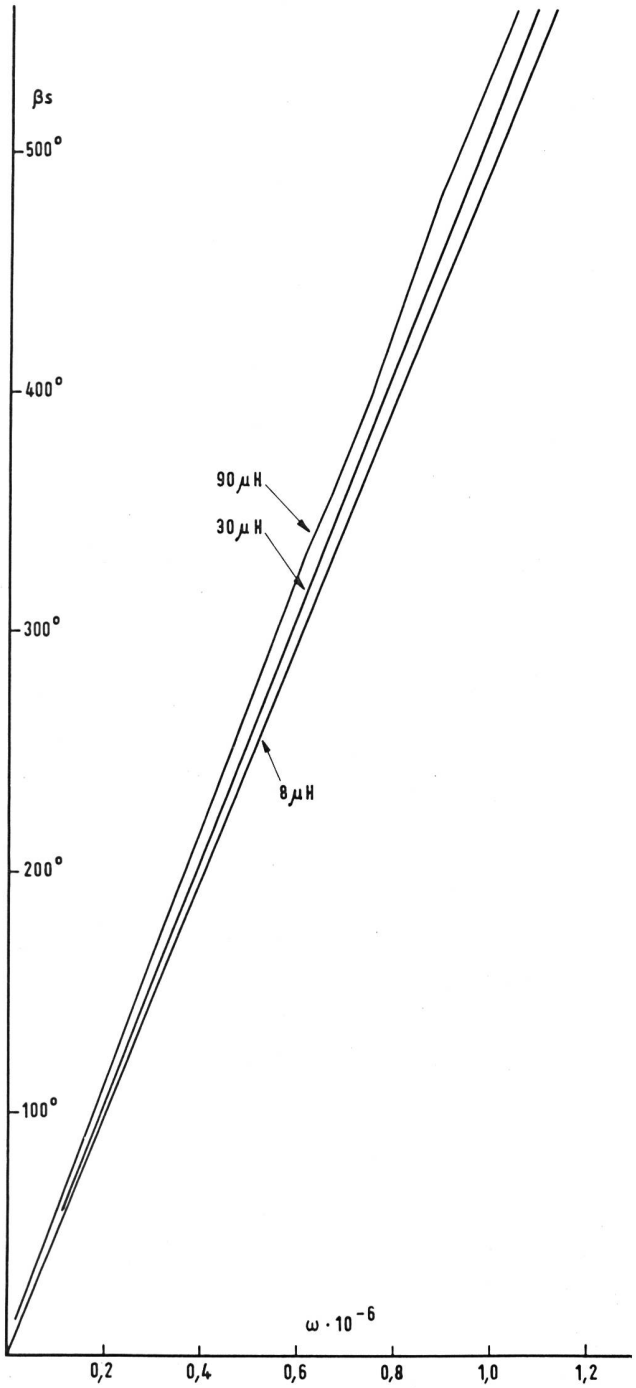



Fig. 8. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4×1 mm ⌀);
Constante de phase pour $s$ = 1,83 km;
Inductivités résiduelles des bobines de base 8; 30 et 90 $\mu$H
——— ligne avec pertes
– – – – ligne sans pertes
Phantomkreis eines Telephonvierers (4×1 mm ⌀);
Phasenbelag für $s$ = 1,83 km; Restinduktivitäten der Stammspulen 8; 30 und 90 $\mu$H
——— Leitungsverluste berücksichtigt
– – – – Leitungsverluste vernachlässigt

steht eine Dämpfung nur dann, wenn ch $\gamma_p \cdot s$ grösser als 1 ist. In diesen Frequenzberechnungen ist $\beta_p \cdot s = k\pi$, also $\cos \beta_p \cdot s = \mp 1$.

Wir haben also:

$$\operatorname{ch} \gamma_p \cdot s = \mp \operatorname{ch} \alpha_p \cdot s = \cos \beta \cdot s - \frac{1}{2} \frac{L_B}{L \cdot s} \beta \cdot s \sin \beta \cdot s$$

Die Dämpfungsmaxima fallen in die Nähe von $\beta \cdot s = k\pi$ ($k = 1; 2; 3 \ldots$) und wir können schreiben $\beta \cdot s = k\pi - \varphi$.

Wenn wir noch setzen:

$$\frac{L_B}{L \cdot s} = a,$$

so erhalten wir

$$\operatorname{ch} \alpha_p \cdot s = + \cos \varphi \pm \frac{a}{2} (k\pi - \varphi) \sin \psi$$

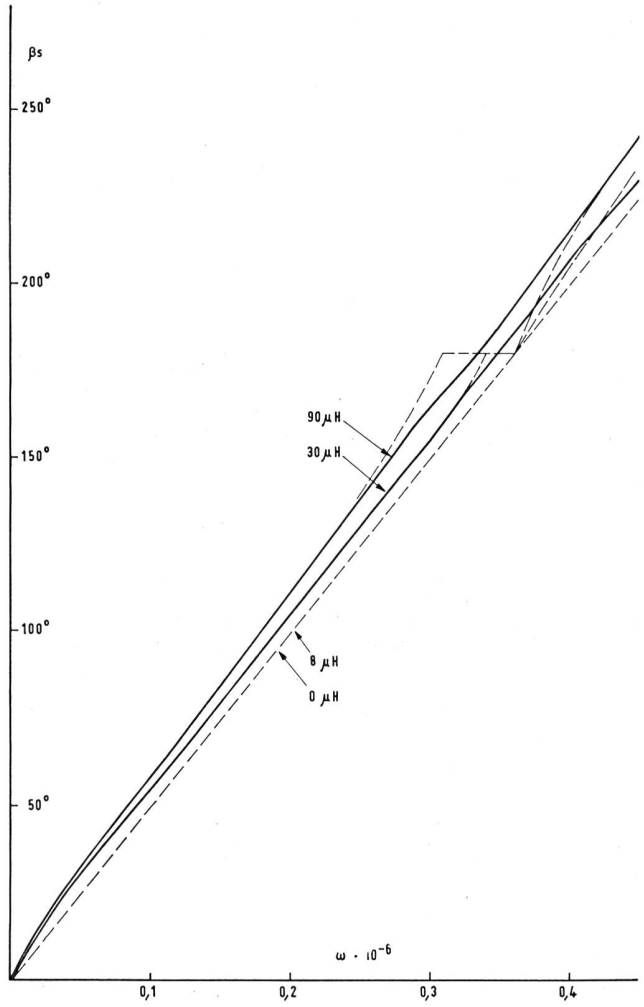



Fig. 8 a. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4×1 mm ⌀);
Constante de phase pour $s$ = 1,83 km;
——— ligne avec pertes
– – – – ligne sans pertes
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H
Phantomkreis eines Telephonvierers (4×1 mm ⌀);
Phasenbelag für $s$ = 1,83 km;
——— Leitungsverluste berücksichtigt
– – – – Leitungsverluste vernachlässigt

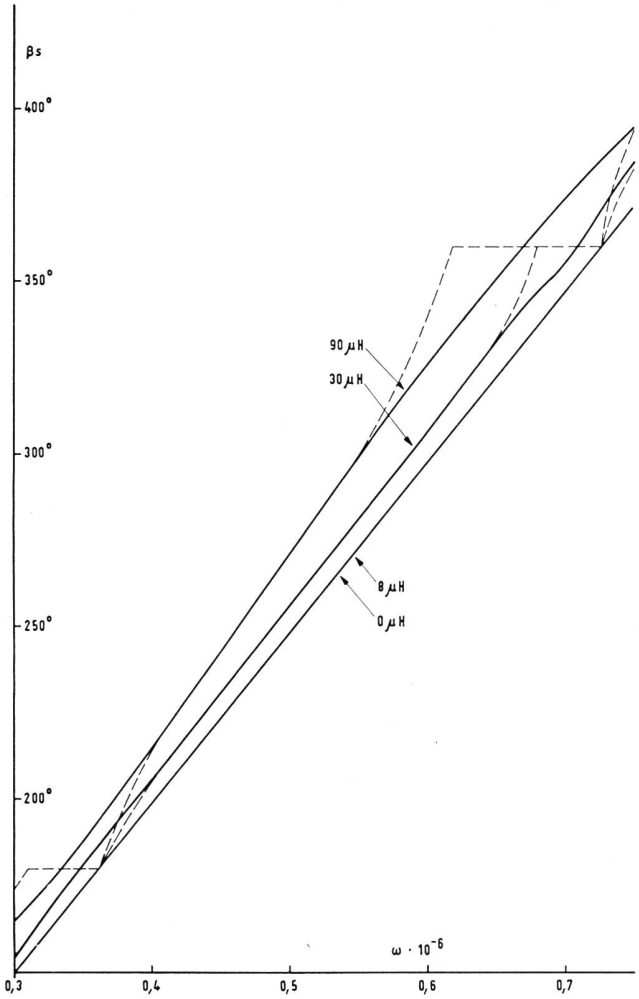



Fig. 8 b. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ⌀);
Constante de phase pour $s$ = 1,83 km;
——— ligne avec pertes
- - - - ligne sans pertes
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ⌀);
Phasenbelag für $s$ = 1,83 km;
——— Leitungsverluste berücksichtigt
- - - - Leitungsverluste vernachlässigt

Nous avons donc:

$$\operatorname{ch} \gamma_p \cdot s = \mp \operatorname{ch} \alpha_p \cdot s = \cos \beta \cdot s - \frac{1}{2} \frac{L_B}{L \cdot s} \beta \cdot s \sin \beta \cdot s$$

Les maxima de l'atténuation se trouvant près de $\beta \cdot s = \mathrm{k}\pi$ (k = 1; 2; 3 ...)

nous écrivons:

$$\beta \cdot s = \mathrm{k}\pi - \varphi$$

En mettant encore:

$$\frac{L_B}{L \cdot s} = \mathrm{a}$$

nous obtenons

$$\operatorname{ch} \alpha_p \cdot s = + \cos \varphi \pm \frac{\mathrm{a}}{2} (\mathrm{k}\pi - \varphi) \sin \varphi$$

$\operatorname{ch} \alpha_p \cdot s$ hat einen Extremwert für:

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{ch} \alpha_p \cdot s)}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

$$-\sin \varphi_e \pm \frac{\mathrm{a}}{2} (\mathrm{k}\pi - \varphi_e) \cos \varphi_e \mp \frac{\mathrm{a}}{2} \sin \varphi_e = 0$$

$$\left(1 \pm \frac{\mathrm{a}}{2}\right) \sin \varphi_e = \pm \frac{\mathrm{a}}{2} (\mathrm{k}\pi - \varphi_e) \cos \varphi_e$$

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \pm \frac{\mathrm{a}}{2} \frac{\mathrm{k}\pi - \varphi_e}{1 \pm \frac{\mathrm{a}}{2}}$$

Es ergibt sich also:

$$\operatorname{ch} (\alpha_p \cdot s)_e = \cos \varphi_e + \left(1 \pm \frac{\mathrm{a}}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi_e \sin \varphi_e$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi_e} \left(1 \pm \frac{\mathrm{a}}{2} \sin^2 \varphi_e\right)$$

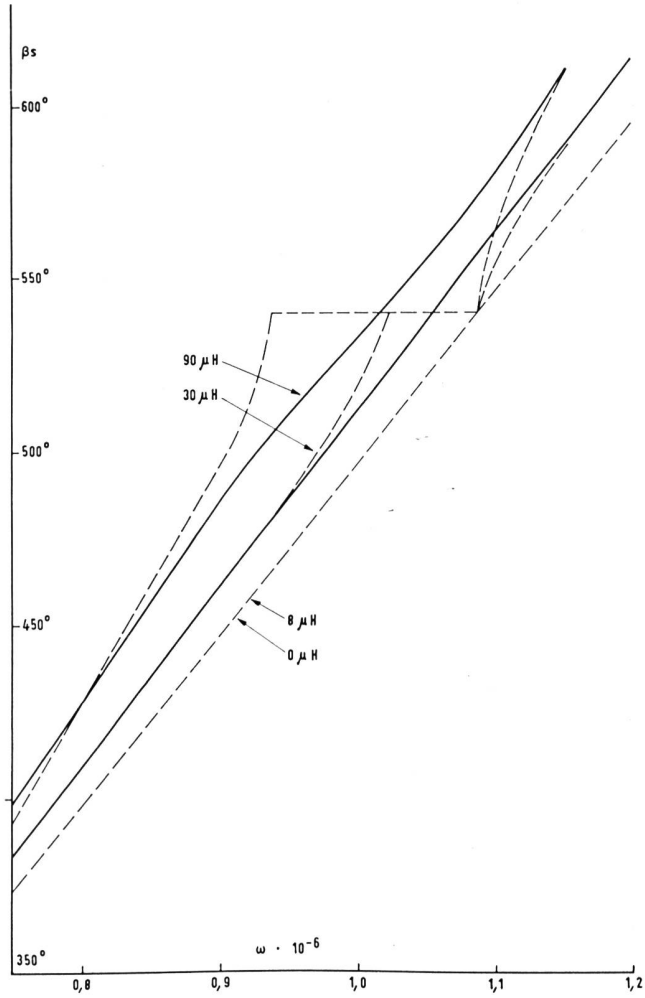



Fig. 8 c. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ⌀);
Constante de phase pour $s$ = 1,83 km;
——— ligne avec pertes
- - - - ligne sans pertes
Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ⌀);
Phasenbelag für $s$ = 1, 83 km;
——— Leitungsverluste berücksichtigt
- - - - Leitungsverluste vernachlässigt

ch $\alpha_p \cdot s$ a un extrême pour:

$$\frac{d\,(\mathrm{ch}\,\alpha_p \cdot s)}{d\,\varphi} = 0$$

$$-\sin\varphi_e \pm \frac{a}{2}(k\pi - \varphi_e)\cos\varphi_e \mp \frac{a}{2}\sin\varphi_e = 0$$

$$\left(1 \pm \frac{a}{2}\right)\sin\varphi_e = \pm\frac{a}{2}(k\pi - \varphi_e)\cos\varphi_e$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_e = \pm\frac{a}{2}\frac{k\pi - \varphi_e}{1 \pm \frac{a}{2}}$$

On obtient donc:

$$\mathrm{ch}\,(\alpha_p \cdot s)_e = \cos\varphi_e + \left(1 \pm \frac{a}{2}\right)\mathrm{tg}\,\varphi_e \sin\varphi_e$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi_e}\left(1 \pm \frac{a}{2}\sin^2\varphi_e\right)$$

En première approximation, on peut alors écrire:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_e \cong \varphi_e$$
$$\sin\varphi_e \cong \varphi_e$$
$$\cos\varphi_e \cong 1 - \frac{\varphi_e^2}{2}$$

$$\varphi_e = \pm\frac{a}{2}\frac{k\pi - \varphi_e}{1 \pm \frac{a}{2}}$$

$$\varphi_e\left(1 \pm \frac{a}{2}\right) = \pm\frac{a}{2}(k\pi - \varphi_e)$$

$$\varphi_e = \frac{\pm\frac{a}{2}k\pi}{1 \pm a}$$

$$\mathrm{ch}\,(\alpha_p \cdot s)_e \cong \frac{1 \pm \frac{a}{2}\varphi_e^2}{1 - \frac{\varphi_e^2}{2}} \cong 1 \pm \left(\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\varphi_e^2$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}(a \pm 1)\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 k^2\pi^2}{(1 \pm a)^2}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}\frac{k^2\pi^2\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a \pm 1}$$

$$\frac{(\alpha_p \cdot s)_e^2}{2} \cong \pm\frac{1}{2}\frac{k^2\pi^2\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a \pm 1}$$

$$(\alpha_p \cdot s)_e = \frac{k\pi\frac{a}{2}}{\sqrt{\pm(a \pm 1)}} = \frac{k\pi\frac{a}{2}}{\sqrt{1 \pm a}} \cong k\pi\frac{a}{2}$$

$$= k\pi\frac{1}{2}\frac{L_B}{L \cdot s}$$

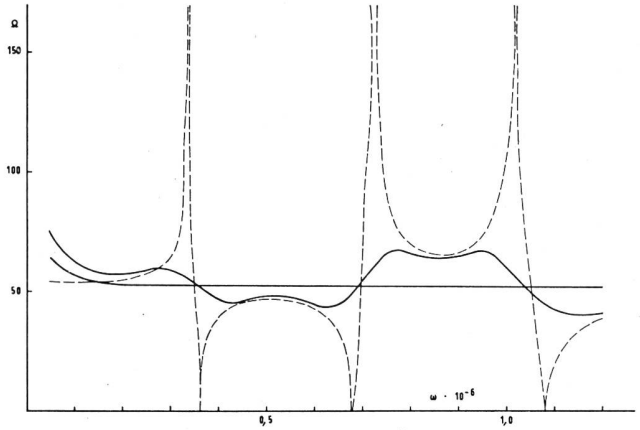



Fig. 9 a. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ⌀);
Impédance:
ligne avec pertes
ligne sans pertes
Inductivité résiduelle 30 μH
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ⌀);
Wellenwiderstand:
——— Leitungsverluste berücksichtigt
– – – – Leitungsverluste vernachlässigt
Restinduktivität 30 μH

In erster Annäherung kann man schreiben:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_e \cong \varphi_e$$
$$\sin\varphi_e \cong \varphi_e$$
$$\cos\varphi_e \cong 1 - \frac{\varphi_e^2}{2}$$

$$\varphi_e = \pm\frac{a}{2}\frac{k\pi - \varphi_e}{1 \pm \frac{a}{2}}$$

$$\varphi_e\left(1 \pm \frac{a}{2}\right) = \pm\frac{a}{2}(k\pi - \varphi_e)$$

$$\varphi_e = \frac{\pm\frac{a}{2}k\pi}{1 \pm a}$$

$$\mathrm{ch}\,(\alpha_p \cdot s)_e \cong \frac{1 \pm \frac{a}{2}\varphi_e^2}{1 - \frac{\varphi_e^2}{2}} \cong 1 \pm \left(\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\varphi_e^2$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}(a \pm 1)\frac{\left(\frac{a}{2}\right) k^2\pi^2}{(1 \pm a)^2}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}\frac{k^2\pi^2\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a \pm 1}$$

$$\frac{(\alpha_p \cdot s)_e^2}{2} \cong \pm\frac{1}{2}\frac{k^2\pi^2\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a \pm 1}$$

$$(\alpha_p \cdot s)_e = \frac{k\pi\frac{a}{2}}{\sqrt{\pm(a \pm 1)}} = \frac{k\pi\frac{a}{2}}{\sqrt{1 \pm a}} \cong k\pi\frac{a}{2}$$

$$= k\pi\frac{1}{2}\frac{L_B}{L \cdot s}$$

## Annexe 3

*Calcul approximatif des maxima de l'atténuation d'une ligne très légèrement chargée en tenant compte des pertes de la ligne.*

Nous partons de l'équation:

$$\operatorname{ch}\gamma_p \cdot s = \operatorname{ch}\gamma s + \frac{1}{2}\frac{Z_B}{Z}\operatorname{sh}\gamma s$$

et nous rappelons que

$$\operatorname{ch}\gamma_p \cdot s = \operatorname{ch}\alpha_p \cdot s \cos\beta_p \cdot s + \operatorname{sh}\alpha_p \cdot s \sin\beta_p \cdot s$$

Nous savons que là où se trouvent les maxima de l'atténuation

$$\beta_p \cdot s = n\pi \; (n = 1; 2; 3 \ldots,.)$$

$$\text{donc } \sin\beta_p \cdot s = 0$$

$$\cos\beta_p \cdot s = \pm 1$$

Ainsi nous avons:

$$\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \operatorname{ch}\alpha s \cos\beta s + \mathrm{j}\operatorname{sh}\alpha \cdot s \sin\beta s + \frac{1}{2}\frac{Z_B}{Z}(\operatorname{sh}\alpha s \cos\beta s + \mathrm{j}\operatorname{ch}\alpha s \sin\beta s)$$

Nous mettons – en négligeant les pertes –

$$\frac{Z_B}{Z} \cong \mathrm{j}\frac{L_B}{Ls}\beta s$$

et obtenons:

$$\pm\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \left(\operatorname{ch}\alpha s \cdot \cos\beta s - \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \operatorname{ch}\alpha s \cdot \sin\beta s\right) + \mathrm{j}\left(\operatorname{sh}\alpha s \cdot \sin\beta s + \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \operatorname{sh}\alpha s \cdot \sin\beta s\right)$$

$$\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \operatorname{ch}\alpha s\left[\cos\beta s - \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \sin\beta s\right] + \mathrm{j}\operatorname{sh}\alpha s\left[\sin\beta s + \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \cos\beta s\right]$$

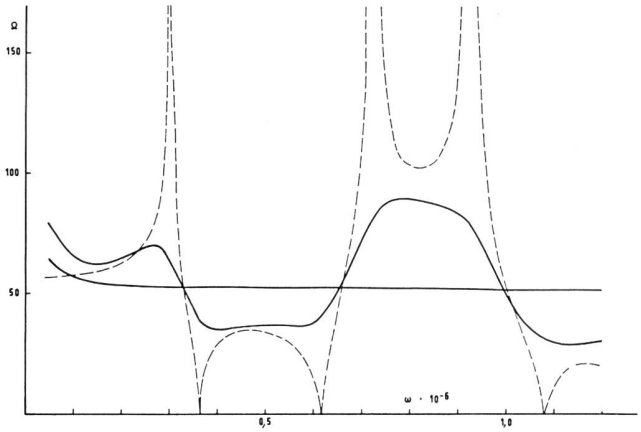



Fig. 9 b. Circuit fantôme d'une quarte téléphonique (4 × 1 mm ⌀);
Impédance:
——— ligne avec pertes
– – – – ligne sans pertes
Inductivité résiduelle 90 $\mu$H
Phantomkreis eines Telephonvierers (4 × 1 mm ⌀);
Wellenwiderstand:
——— Leitungsverluste berücksichtigt
– – – – Leitungsverluste vernachlässigt
Restinduktivität 90 $\mu$H

## Anhang 3

*Berechnung der Dämpfungsmaxima einer sehr leicht belasteten Leitung unter Berücksichtigung der Verluste*

Wir gehen aus von der Gleichung:

$$\operatorname{ch}\gamma_p \cdot s = \operatorname{ch}\gamma s + \frac{1}{2}\frac{Z_B}{Z}\operatorname{sh}\gamma s$$

und erinnern uns, dass:

$$\operatorname{ch}\gamma_p \cdot s = \operatorname{ch}\alpha_p \cdot s \cos\beta_p \cdot s + \operatorname{sh}\alpha_p \cdot s \sin\beta_p \cdot s$$

Da, wo sich die Dämpfungsmaxima befinden, gilt

$$\beta_p \cdot s = n\pi \; (n = 1; 2; 3 \ldots.)$$

also $\sin\beta_p \cdot s = 0$

$\cos\beta_p \cdot s = \pm 1$

Derart ergibt sich:

$$\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \operatorname{ch}\alpha s \cos\beta s + \mathrm{j}\operatorname{sh}\alpha \cdot s \sin\beta s + \frac{1}{2}\frac{Z_B}{Z}(\operatorname{sh}\alpha s \cos\beta s + \mathrm{j}\operatorname{ch}\alpha s \sin\beta s)$$

Wir setzen, unter Vernachlässigung der Verluste:

$$\frac{Z_B}{Z} \cong \frac{L_B}{Ls}\beta s$$

und erhalten:

$$\pm\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \left(\operatorname{ch}\alpha s \cdot \cos\beta s - \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \operatorname{ch}\alpha s \cdot \sin\beta s\right) + \mathrm{j}\left(\operatorname{sh}\alpha s \cdot \sin\beta s + \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \operatorname{sh}\alpha s \cdot \sin\beta s\right)$$

$$\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \operatorname{ch}\alpha s\left[\cos\beta s - \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \sin\beta s\right] + \mathrm{j}\operatorname{sh}\alpha s \cdot \left[\sin\beta s + \frac{1}{2}\frac{L_B}{Ls}\beta s \cdot \cos\beta s\right]$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer ist gleich $\pm\operatorname{ch}\alpha_{pmo} \cdot s$, also gleich dem Dämpfungsmaximum der leichtbelasteten Leitung, berechnet unter Vernachlässigung der Verluste. Der imaginäre Teil kann wie folgt vereinfacht werden:

$$\operatorname{sh}\alpha s \sim \alpha \cdot s$$

$$\sin\beta s \sim 0$$

$$\cos\beta s = \pm 1$$

somit wird:

$$\operatorname{ch}\alpha_{pm} \cdot s = \operatorname{ch}\alpha s \cdot \operatorname{ch}\alpha_{pmo} s \pm \mathrm{j}\alpha s \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L_B}{Ls}$$

Der imaginäre Anteil kann in erster Annäherung vernachlässigt werden. Wenn wir dann für alle Funktionen ch $\varphi$ setzen:

$$\operatorname{ch}\varphi \cong 1 + \frac{\varphi^2}{2}$$

so können wir schreiben:

$$1 + \frac{(\alpha_{pm} \cdot s)^2}{2} \cong \left(1 + \frac{(\alpha s)^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{(\alpha_{pmo} \cdot s)^2}{2}\right)$$

$$\cong 1 + \frac{(\alpha s)^2}{2} + \frac{(\alpha_{pmo} s)^2}{2}$$

$$\alpha_{pm} s = \sqrt{(\alpha s)^2 + (\alpha_{pmo} s)^2}$$

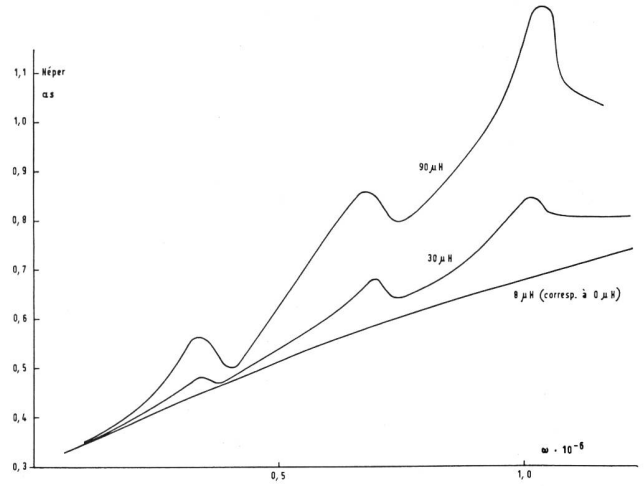



Fig. 10. Circuit fantôme d'un câble téléphonique ($4 \times 1$ mm ⌀). Atténuation pour $s = 1{,}83$ km (ligne avec pertes); Inductivités résiduelles des bobines de base 0; 8; 30 et 90 $\mu$H

Phantomkreis eines Telephonkabels ($4 \times 1$ mm ⌀). Dämpfung bei $s = 1{,}83$ km (Leitung mit Verlusten); Restinduktivitäten der Stammspulen 0; 8; 30 und 90 $\mu$H

Le terme dans la première parenthèse est égal à $\pm \operatorname{ch} \alpha_{pmo} s$, pour $\alpha_{pmo}$ à l'atténuation maximum de la ligne sans pertes légèrement chargée. Le terme imaginaire peut être simplifié en mettant:

$$\operatorname{sh} \alpha s \sim \alpha \cdot s$$
$$\sin \beta s \sim 0$$
$$\cos \beta s = \pm 1$$

Nous avons ainsi:

$$\operatorname{ch} \alpha_{pm} \cdot s = \operatorname{ch} \alpha s \cdot \operatorname{ch} \alpha_{pmo} s \pm \mathrm{j}\, \alpha s \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L_B}{Ls}$$

Le terme imaginaire peut en première approximation être négligé et en mettant pour toutes les fonctions $\operatorname{ch}\varphi$

$$\operatorname{ch} \varphi \cong 1 + \frac{\varphi^2}{2}$$

nous pouvons écrire:

$$1 + \frac{(\alpha_{pm} \cdot s)^2}{2} \cong \left(1 + \frac{(\alpha s)^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{(\alpha_{pmo} \cdot s)^2}{2}\right)$$
$$\cong 1 + \frac{(\alpha s)^2}{2} + \frac{(\alpha_{pmo} s)^2}{2}$$
$$\alpha_{pm} s = \sqrt{(\alpha s)^2 + (\alpha_{pmo} s)^2}$$

Cette formule permet un rapide calcul approximatif de $\alpha_{pm}$, avec

$$\alpha_{pmo} \cdot s \cong \mathrm{k} \frac{\pi}{2} \frac{L_B}{Ls}$$

## Annexe 4

*Calcul de Z pour* $\beta s = (\mathrm{k} + \frac{1}{2})\, \pi$

Nous avons vu que l'impédance devient égale à zéro ou à l'infini pour $\beta s = \mathrm{k}\pi$ et près de ces valeurs

Diese Formel erlaubt eine schnelle Berechnung von $\alpha_{pm}$ mit:

$$\alpha_{pmo} \cdot s \cong \mathrm{k} \frac{\pi}{2} \frac{L_B}{Ls}$$

## Anhang 4

*Berechnung des Wellenwiderstandes für* $\beta s = (\mathrm{k} + \frac{1}{2})\, \pi$

Wir haben festgestellt, dass der Wellenwiderstand gegen Null oder Unendlich geht für $\beta s = \mathrm{k}\pi$ und in

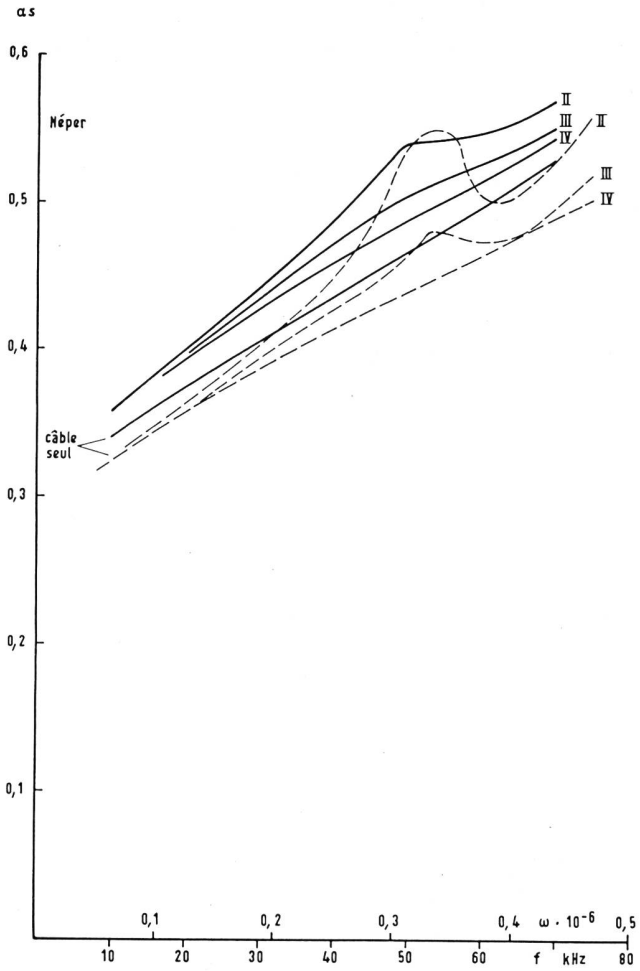



Fig. 11. Atténuation du circuit fantôme d'une quarte $4 \times 1$ mm. Influence de l'inductivité résiduelle des bobines Pupin. Comparaisons entre mesures et calcul

——— mesures PTT

– – – – calcul

Bobine type II: bobinage sur deux moitiés, enroulements sous-divisés;

Bobine type III: bobinage à enroulements intercalés;

Bobine type IV: bobinage à enroulements bifilaires

Dämpfung des Phantomkreises eines Telephonvierers ($4 \times 1$ mm ⌀)

Einfluss der Restinduktivität der Stammspulen;

——— Messungen der PTT

– – – – Berechnung

Spule Typ II: Wicklung unterteilt und auf die Kernhälften verteilt;

Spule Typ III: Eingeschachtelte Wicklung auf ganzem Kern;

Spule Typ IV: Bifilargewickelte Spule

et passe entre ces valeurs par des maxima ou des minima près des valeurs de $\beta s = (k + \frac{1}{2})\pi$. Il est intéressant de calculer en approximation ces maxima et minima.

Nous obtenons pour:

$$\beta s = (k + \frac{1}{2})\pi$$

$$\cos \beta s = 0$$
$$\sin \beta s = \pm 1$$

$$A = \frac{1}{\frac{L \cdot s}{L_B}\frac{\sin \beta s}{\beta s} - \sin^2 \frac{\beta s}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pm \frac{L \cdot s}{L_B}\frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{2}}$$

$$1 + A = \frac{\pm \frac{L \cdot s}{L_B}\frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{2}}{\pm \frac{L \cdot s}{L_B}\frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 \mp \frac{L_B}{Ls}\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}}{1 \pm \frac{L_B}{Ls}\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}}$$

$$\cong 1 \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\sqrt{1 + A} \cong 1 \mp \frac{L_B}{Ls}\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2}\pi$$

$$Z_p = Z\left(1 \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{Z_p - Z}{Z} = \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

Avec cette formule, on peut calculer en première approximation les variations périodiques de $Z_p$, du fait que les valeurs $Z_p = \infty$, respectivement $Z_p = 0$, sont pratiquement éliminées par les pertes de la ligne et des bobines (voir figure 10).

der Nähe dieser Werte und dass er Maxima und Minima in der Nähe von $\beta s = (k + \frac{1}{2})\pi$ hat. Es interessiert, diese Maxima und Minima in Annäherung zu berechnen.

Es ergibt sich für:

$$\beta s = (k + \frac{1}{2})\pi$$

$$\cos \beta s = 0$$
$$\sin \beta s = \pm 1$$

$$A = \frac{1}{\frac{L \cdot s}{L_B}\frac{\sin \beta s}{\beta s} - \sin^2 \frac{\beta s}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pm \frac{L \cdot s}{L_B}\frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{2}}$$

$$1 + A = \frac{\pm \frac{L \cdot s}{L_B}\frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{2}}{\pm \frac{L \cdot s}{L_B}\frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 \mp \frac{L_B}{Ls}\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}}{1 \pm \frac{L_B}{Ls}\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}}$$

$$\cong 1 \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\sqrt{1 + A} \cong 1 \mp \frac{L_B}{Ls}\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right.}{2}\pi$$

$$Z_p = Z\left[1 \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \right]\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{Z_p - Z}{Z} = \mp \frac{L_B}{Ls}\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

Mit dieser Formel kann man in erster Annäherung die periodischen Schwankungen des Wellenwiderstandes berechnen, da ja die Werte $Z_p = \infty$ bzw. $Z_p = 0$, wegen der Verluste der Leitung und der Spulen praktisch verschwinden (siehe Figur 10).

*Adresse de l'auteur:* *R. Goldschmidt*, prof. EPUL,
115, av. C.-F.-Ramuz, Lausanne-Pully