Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 35 (1957)

Heft: 5

Artikel: Allgemein aktive, passive und nichtreziproke Vierpole : eine Einführung in neuere Probleme der Vierpoltheorie, insbesondere in der Mikrowellentechnik

Autor: Epprecht, George W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-875075

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nº 5 - BERN, 1. V. 1957 - JAHRGANG - ANNÉE - ANNO XXXV

TECHNISCHE MITTEILUNGEN

BULLETIN TECHNIQUE

PTT

BOLLETTINO TECNICO

Herausgegeben von der Schweizerischen Post-, Telegraphen- und Telephonverwaltung. Publié par l'administration des postes, télégraphes et téléphones suisses. Pubblicato dall'amministrazione delle poste, dei telegrafi e dei telefoni svizzeri

Allgemeine aktive, passive und nichtreziproke Vierpole

Eine Einführung in neuere Probleme der Vierpoltheorie, insbesondere in der Mikrowellentechnik

Von *Georg W. Epprecht*, Bern

621.372.5:621.3.029.6

Zusammenfassung. *In der Theorie der Schaltungen aus Wellenleitern allgemeinster Art verwendet man an Stelle der konventionellen Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrizen oft vorteilhafter die Wellenmatrizen. Beide Arten von Matrizen werden hier einander gegenübergestellt, zunächst bei der Diskussion der allgemeinen Bedingungen für einrichtige und vollständige Passivität von Vierpolen und dann in einem Kapitel über die Reziprozitätseigenschaften, wobei die Vierpole in die Klassen der areziproken und der komplex reziproken eingeteilt werden. Unter den letzteren sind die gewöhnlichen reziproken und die antireziproken Netzwerke von besonderer Bedeutung. Im weiteren werden die interessanten Gruppen der Impedanz-invertierenden und -konvertierenden Vierpole besprochen, von denen besonders jene mit nichtreziproken Phasenbeziehungen steigende Bedeutung erlangen. Ein weiterer Abschnitt befasst sich mit dämpfungsunsymmetrischen Vierpolen, die, zusammen mit den vorgängig behandelten, schliesslich die Synthese allgemeinster Vierpole aus einer Kettenschaltung von Elementarvierpolen mit je einer einzigen Bestimmungsgrösse erlauben.*

Résumé. *Dans la théorie des circuits formés de guides d'ondes du type le plus général on emploie souvent avec avantage les matrices d'ondes au lieu des matrices habituelles d'impédance, d'admittance et de chaîne. On compare d'abord les deux genres de matrices dans la discussion des conditions générales pour réaliser, d'une part, des quadripôles passifs unidirectionnels, et, d'autre part, des quadripôles passifs dans les deux directions. La comparaison se poursuit dans un chapitre sur les caractères de réciprocité, chapitre dans lequel on classe les quadripôles en aréciproques et en réciproques complexes. Parmi ces derniers les réseaux réciproques ordinaires et les réseaux antiréciproques revêtent une importance particulière. Ensuite on traite des intéressants groupes de quadripôles inverseurs et convertisseurs d'impédances en relevant le rôle croissant joué par ceux dont les relations de phase ne sont pas réciproques. Le chapitre suivant est consacré aux quadripôles à affaiblissement asymétrique. En combinant ces derniers avec ceux étudiés précédemment on aboutit à la synthèse du quadripôle le plus général formé par une chaîne de quadripôles élémentaires définis chacun par une seule grandeur caractéristique.*

1. Allgemeines

Die Vierpoltheorie ist vor etwas über 30 Jahren hervorgegangen aus der Leitungstheorie, aus der sie ja viele Bezeichnungen übernommen hat. Während die Leitungstheorie mit verteilten Kapazitäten, Induktivitäten, Widerständen und Leitwerten zu tun hat, wurde die Vierpoltheorie mit Erfolg auf Übertragungsnetzwerke mit konzentrierten aktiven und passiven Elementen erweitert. Die grösste Bedeutung hat die Vierpoltheorie wahrscheinlich in der Filtertechnik erlangt. Dabei versteht man unter einem Vierpol fast immer eine Schaltung, die vielleicht zutreffender Zweiklemmenpaar genannt würde. Wir beschränken uns in dieser Arbeit denn auch im wesentlichen auf solche Vierpole, obwohl die Vierpoltheorie sich in der Folge erweitert hat zur Theorie der n-Klemmenpaare.

Besonders in den letzten 10 bis 15 Jahren sind neue Impulse auf die Vierpoltheorie übergegangen, einerseits von der Servotechnik her und anderseits aus der Technik der Dezimeter- und der Zentimeterwellen. Diese letztere Technik ist eine ausgesprochene Leitungstechnik, es gibt darin fast nur noch Elemente, die als Leitungen behandelt werden müssen.

Die Frequenzbänder, die bis Ende der dreissiger Jahre erschlossen waren, wurden schaltungsmässig noch fast ausschliesslich durch die Technik der konzentrierten Elemente beherrscht. Entsprechend entwickelte sich auch die Vier- und Mehrpoltheorie in dieser Richtung und man gewöhnte sich so an das Rechnen mit konzentrierten Impedanzen, dass beim vermehrten Aufkommen der Leitungstechnik in dieser zunächst noch hauptsächlich mit Ersatzschaltungen aus konzentrierten Elementen gearbeitet wurde. In der Hohlleitertechnik, wo eindeutige «Klemmenströme» und «Klemmenspannungen» nicht mehr definiert werden können, wirken jedoch die

Ersatzschaltungen manchmal gekünstelt, obwohl sie oft noch eine willkommene Brücke bilden zu analogen Problemen aus der Technik der konzentrierten Impedanzen. Es zeichnet sich nun aber die Tendenz ab, bei dieser Technik wieder mehr in Feldern und Wellen statt in Impedanzen, Spannungen und Strömen zu denken. Die Probleme dieser Technik sind im allgemeinen besser zu überblicken, wenn man sich fortschreitende und reflektierte Wellen vorstellt, als wenn man versucht, sich die Impedanzen und ihre Transformationen zu vergegenwärtigen. In der Vierpoltheorie äusserte sich dies im Aufkommen der Wellenmatrizen an Stelle der üblichen Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrizen. Die Elemente der Wellenmatrizen sind nicht mehr Impedanzen und Übertragungsverhältnisse, sondern Reflexions- und Durchlass-Koeffizienten, sie setzen nicht Ströme und Spannungen in Beziehung zueinander, sondern einfallende, reflektierte und durchtretende Wellen.

Ein weiterer Anstoss zu vermehrter Aktivität auf dem Gebiete der Vierpoltheorie ging ebenfalls aus der cm-Wellentechnik hervor, und zwar durch die Realisierung eines neuen Elementes, des Gyrators. Der ideale Gyrator ist ein verlustloser, passiver Vierpol, bei dem eine rückwärts durch den Vierpol laufende Welle eine um π grössere Phasendrehung erleidet als eine vorwärts durchlaufende Welle. Der Gyrator ist also ein sogenannter nichtreziproker Vierpol. Solche Vierpole hatte man lange Zeit in der Theorie etwas vernachlässigt, weil sie als passiv nicht realisierbar erschienen. Neben dem Gyrator sind in der Folge eine Reihe anderer nichtreziproker Vierpole entwickelt worden, die sich jedoch (wenigstens theoretisch) alle auf Schaltungen mit Gyratoren zurückführen lassen. Man kann zeigen, dass sich alle physikalisch möglichen beliebigen Vierpole realisieren lassen, wenn man Gyratoren zu Hilfe nimmt [3, 11].

In der vorliegenden Arbeit soll nun versucht werden, die besonderen Eigenschaften und die Stellung dieser neuen Elemente im Rahmen der Vierpoltheorie aufzuzeigen. Wenn auch die Realisierung von Gyratoren ohne aktive Elemente im Frequenzgebiet unterhalb einiger Hundert MHz noch nicht gelungen ist, so ist doch zu erwarten, dass von der Theorie der nichtreziproken Elemente aus auch auf die Schaltungstechnik dieser Frequenzen neue Anregungen ausgehen werden, so dass sich eine Übersicht über diesen Teil der Vierpoltheorie umsomehr rechtfertigt.

2. Wellenmatrizen

Da wir später von den Wellenmatrizen, deren Kenntnis noch nicht allgemein vorausgesetzt werden kann, Gebrauch machen werden, sei hier kurz auf diese Darstellungsart des Vierpoles eingegangen.

Stellt man sich einen Vierpol als Schaltung aus konventionellen Elementen, wie Kondensatoren, Induktivitäten, Widerständen und klassischen Verstärkerröhren, vor, aussen zugänglich durch zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen, so entspricht dem die Behandlung mit den üblichen Matrizen, die Ströme und Spannungen in Beziehung setzen. Die Vierpolgleichungen lassen sich dann auf folgende Arten schreiben: [1]

mit der Impedanzmatrix **Z**

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

mit der Admittanzmatrix **Y**

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

ferner mit der Kettenmatrix **A**

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

und mit der Reihen-Parallelmatrix **D**

$$\begin{Vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_2 \\ I_1 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

In der Koaxialtechnik und bei allen Leitersystemen, auf denen der transversal elektromagnetische Wellentyp (*Lecher*welle) existiert, haben die Begriffe Strom und Spannung eines bestimmten Leiterquerschnittes eine eindeutige Definition. Da man es aber mit verteilten Netzwerkelementen zu tun hat, sind die Ersatzschaltungen mit konzentrierten Elementen, die bei tieferen Frequenzen so erfolgreich verwendet werden, nur noch beschränkt gültig. Noch deutlicher werden die Unzulänglichkeiten der Ersatzschaltungen bei der Wellenleitertechnik, wo man überhaupt nicht mehr von Klemmen reden kann und wo der englische Ausdruck «two port» die Situation treffender beschreibt. Messtechnisch arbeitet man hier mehr mit dem Wellenbegriff; man bestimmt stehende Wellen, misst einfallende und reflektierte Wellen und hat mit Feldverzerrungen zu tun. Ein weiterer Umstand, der die Wellenanschauung begünstigt, ist, dass man in dieser Technik fast immer mehr oder weniger aneinander angepasste Schaltelemente verwendet, also ein System aufbaut aus Elementen mit gleichen oder ähnlichen Wellenwiderständen. Dieser Tatsache wird nun die Vierpoltheorie durch Einführung der Wellenmatrizen gerecht.

Wie in Figur 1 dargestellt, kann der Betriebszustand eines Vierpoles durch vier Wellen charakterisiert werden, zwei einlaufende «p» und zwei auslaufende «q». Man kann nun auch hier immer zwei dieser Wellen als Funktion der andern beiden darstellen. Wichtig sind die beiden folgenden Fälle:

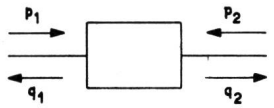

Fig. 1. Ein- und auslaufende Wellen an einem Vierpol

1. austretende Wellen in Funktion der eintretenden:

$$\begin{aligned} q_1 &= s_{11}\, p_1 + s_{12}\, p_2 \\ q_2 &= s_{21}\, p_1 + s_{22}\, p_2 \end{aligned} \qquad (5)$$

2. Wellen am Vierpoleingang (Index 1) in Funktion der Wellen am Ausgang (Index 2):

$$\begin{aligned} q_1 &= t_{11}\, p_2 + t_{12}\, q_2 \\ p_1 &= t_{21}\, p_2 + t_{22}\, q_2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Mit (5) ist auch schon, wenigstens formell, die Streumatrix

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix} \qquad (7)$$

und mit (6) die Transfermatrix:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix} \qquad (8)$$

definiert.

Hier muss nun noch etwas über die Zählrichtungen gesagt werden. Für die Zählrichtung der Ströme in den klassischen Vierpolmatrizen sind zwei Systeme üblich:

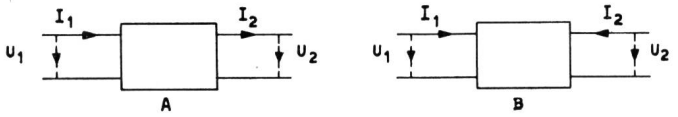

Fig. 2. Zählrichtungen für Ströme und Spannungen

Beide Systeme haben ihre Berechtigung. Die Zählrichtung nach Figur 2 A, die wir im folgenden verwenden werden, hat den Vorteil, dass bei der Kettenschaltung, die wohl die häufigste Art der Verbindung von Vierpolen ist, in den Berechnungen keine Vorzeichen gewechselt werden müssen. Auch kommt sie der Vorstellung in allen jenen Fällen entgegen, wo die eine Richtung des Energieflusses vor der andern ausgezeichnet ist. Die Zählrichtung nach Figur 2 B wird vor allem in der 2 n-Pol-Theorie verwendet, wo eine eindeutige Unterscheidung in Eingang und Ausgang dahinfällt. Sie ist aus Gründen der mathematischen Symmetrie überall dort vorzuziehen, wo beide Durchlassrichtungen gleichberechtigt auftreten.

Auch bei den Wellenmatrizen werden verschiedene Zählsysteme verwendet. Die wichtigsten sind in Figur 3 angegeben:

Fig. 3. Zählrichtungen für normierte Wellengrössen

Im Falle A werden also die vier Wellen stets in ihrer Ausbreitungsrichtung positiv gerechnet, während im Fall B die positive Zählrichtung immer gegen den Vierpol gerichtet ist. Wir werden das Zählschema nach Figur 3 A verwenden, da es der physikalischen Vorstellung besser entgegenkommt. Dabei werde die Phase des *elektrischen* Feldes als Bezugsphase definiert, so dass ein Kurzschluss einen negativen, eine offene Leitung einen positiven Reflexionskoeffizienten hat, sofern dessen Phase auf die Kurzschluss-, bzw. Öffnungsebene bezogen wird. Dann ist auch der Reflexionskoeffizient einer reinen Induktivität ($\omega L = Z_0$), $r_L = +\,j$ und einer Kapazität $r_c = -\,j$, $(1/\omega C = Z_0)$.

Will man vom Zählsystem A zu B oder umgekehrt übergehen, so hat man bei den Matrizen **Z** und **A** das Vorzeichen der Elemente in der zweiten Kolonne, bei **Y** und **D** in der zweiten Reihe, bei **T** in der Hauptdiagonale und schliesslich bei **S** das Vorzeichen aller Elemente zu wechseln.

Es bleibt nun noch die Bedeutung der Grössen p und q festzulegen. Man kann die Wellen durch ihre Spannungs- oder Stromamplituden (oder Effektivwerte) charakterisieren; p und q würden dann also die Amplituden oder Effektivwerte der hin-, bzw. rücklaufenden Wellen bedeuten. Anstelle von Strom- oder Spannungswerten erweist es sich jedoch als günstiger, für p und q normierte Werte zu definieren, und zwar so, dass man diese Grössen direkt mit der Leistung der Wellen in Verbindung bringt. Ist die Leistung[1] der beiden Wellen P_p und P_q, so definieren wir die normalisierten Effektivwerte p und q so, dass

$$\begin{aligned} P_p &= p \cdot p^* \\ P_q &= q \cdot q^* \end{aligned} \qquad (9)$$

Die Wellenmatrizen sind Betriebsmatrizen, das heisst, ihre ganze Definition schliesst in sich, dass Eingang und Ausgang in einen Wellenleiter (im allgemeinsten Sinne des Wortes, es kann z. B. ein Hohlleiter, ein Koaxialleiter, eine Lecherleitung, ein dielektrischer Leiter oder der freie Raum sein) münden, in dem eine einfallende und eine austretende Welle unterschieden werden können. Solange nicht für Eingang und Ausgang je ein (im allgemeinen verschiedene) Wellenleiter festgelegt ist, hat auch der Begriff von ein- und austretenden Wellen keinen Sinn, mit anderen Worten: die Unterscheidung von vor- und rücklaufenden Wellen enthält implizite die Definition einer bestimmten Leitung. Im allgemeinen bieten sich hier praktisch keine Schwierigkeiten; bei weitaus den meisten Vierpolen der Leitungstechnik entsprechen Ein- und Ausgang in ihrer geometrischen Struktur genau den Wellenleitern, auf die p und q bezogen sind. Stossen ausnahmsweise zwei Vierpole mit verschiedenen Wellenleitern zusammen, so hat man sich zu entscheiden, auf welchen sich p und q beziehen sollen (sie sind im allgemeinen verschieden in den verschiedenen Leitern wegen der Reflexion der Stoßstelle). Je nachdem ist dann die Sprungstelle noch ein Teil des einen oder andern Vierpoles.

[1] P_p und P_q sind Wirkleistungen. Bei reellem Wellenwiderstand und fortschreitender Welle sind Spannung und Strom, bzw. elektrische und magnetische Feldkomponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung immer in Phase.

Etwas anders liegen die Dinge bei den klassischen Vierpolmatrizen. Diese sagen an sich über das Betriebsverhalten des Vierpoles noch nichts aus, da sie von den Anschlussnetzwerken abstrahieren. Zwei Vierpole mit der gleichen **A**- oder **Z**-Matrix können sich also, je nach den angeschlossenen weiteren Vierpolen, zum Beispiel in bezug auf Leistungsübertragung, ganz verschieden verhalten, das heisst zugleich, dass ihnen verschiedene Wellenmatrizen entsprechen. In diesem Sinne besteht zwischen klassischen und Wellenmatrizen kein eindeutiger Zusammenhang. Sobald wir jedoch den Vierpolen mit konzentrierten Elementen je einen Bezugswiderstand für Eingang (Z_{01}) und Ausgang (Z_{02}) zuordnen, ist die Relation zwischen den verschiedenen Matrizen eindeutig, denn damit ist nun auch die Aufteilung in die beiden «Wellen» p und q festgelegt. Zunächst ergibt sich dann die Aufteilung der Gesamtleistung P in $P = P_p - P_q$ aus folgender Gleichung:

$$P_q = P \left(\frac{1 - z_1}{1 + z_1}\right)^2 \tag{10}$$

wobei $z_1 = Z_1/Z_0$ ist und Z_1 den Eingangswiderstand des Vierpoles und Z_0 den Bezugswiderstand darstellt. Für einen gewöhnlichen Vierpol mit konzentrierten Elementen gelten dann zwischen den Spannungen U und Strömen I und den normalisierten Wellenwerten p und q folgende Beziehungen (U, I, p und q sind als Effektivwerte zu betrachten):

$$\begin{aligned} U_{p1} &= p_1 \sqrt{Z_{01}} & U_{p2} &= p_2 \sqrt{Z_{02}} \\ U_{q1} &= q_1 \sqrt{Z_{01}} & U_{q2} &= q_2 \sqrt{Z_{02}} \\ I_{p1} &= p_1/\sqrt{Z_{01}} & I_{p2} &= -p_2/\sqrt{Z_{02}} \\ I_{q1} &= -q_1/\sqrt{Z_{01}} & I_{q2} &= q_2/\sqrt{Z_{02}} \end{aligned} \tag{11}$$

wobei Z_{01} und Z_{02} die gewählten Wellenwiderstände an Ein- und Ausgang sind.[2] Die Zählrichtungen für die Teilströme und Teilspannungen sind dabei dieselben wie für die gesamten Ströme und Spannungen (s. Fig. 2 A). Die totalen Spannungen und Ströme am Ein-, bzw. Ausgang des Vierpols sind dann

$$\begin{aligned} U_1 &= (U_{p1} + U_{q1}) = (p_1 + q_1) \sqrt{Z_{01}} \\ U_2 &= (U_{p2} + U_{q2}) = (p_2 + q_2) \sqrt{Z_{02}} \\ I_1 &= (I_{p1} + I_{q1}) = (p_1 - q_1)/\sqrt{Z_{01}} \\ I_2 &= (I_{p2} + I_{q2}) = (-p_2 + q_2)/\sqrt{Z_{02}} \end{aligned} \tag{12}$$

Diese Gleichungen vermitteln den Anschluss an die Vierpolmatrizen **Z**, **Y**, **A** und **D**. In der Wellenleitertechnik, genauer gesagt immer wenn es sich nicht um Lecherwellen (TEM oder L-Wellen) handelt, ist es besser, wenn man die Grössen U und I überhaupt vermeidet. Da durch (9) die normierten Wellenwerte p und q direkt von der Leistung abgeleitet werden, umgeht man die Vieldeutigkeit der Grössen U, I und Z_0. [In Gleichung (10), die ebenfalls für p und q bestimmend ist, erscheint nur ein *relativer* oder *normierter* Eingangswiderstand z_1, der in allen Fällen eindeutig definiert ist.] Ausser diesem Vorteil liegt der Grund für diese Normierung darin, dass die Art des Vierpoles nun viel augenfälliger aus den Eigenschaften der Wellenmatrizen herausgelesen werden kann [2], was man sofort sieht, wenn man neben den normierten die nichtnormierten Matrizen anschreibt.

Jede Vierpolmatrix beschreibt den Vierpol vollständig und eindeutig, so dass es auch möglich sein muss, aus einer Matrix eine andere zu bestimmen. Diese Zusammenhänge sind, soweit nicht allgemein bekannt, im Anhang 1 aufgeführt.

Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Matrizenarten und entsprechenden Vierpolen seien an einigen Beispielen illustriert:

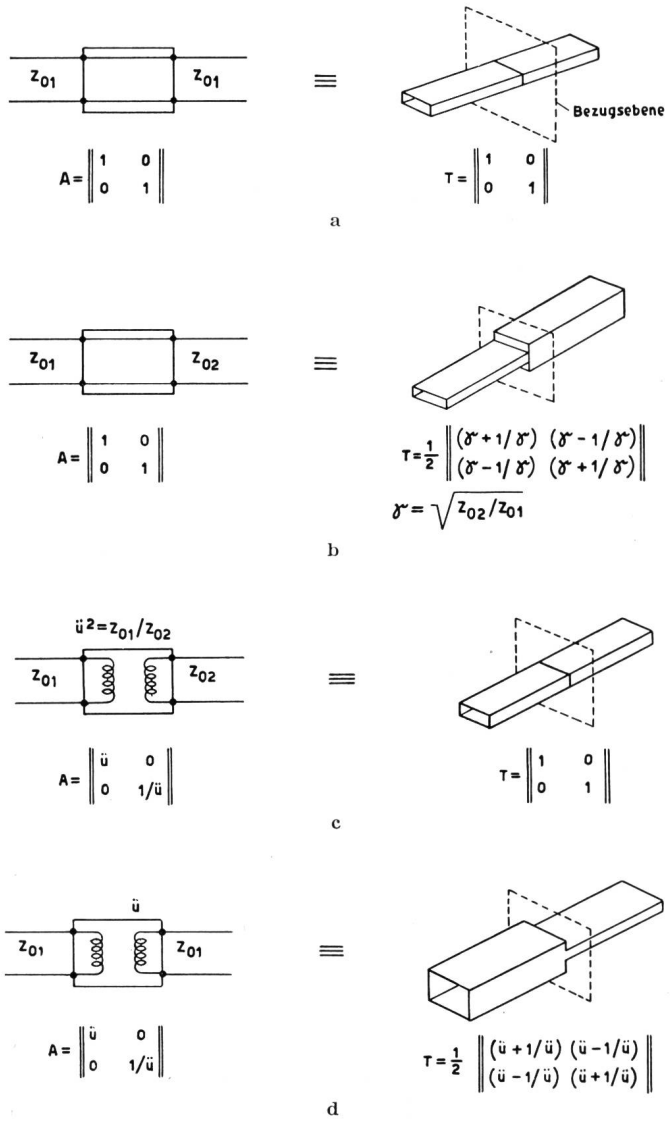

Fig. 4. Gegenüberstellung von Vierpolen in konventioneller und Wellendarstellung. Vierpole mit der gleichen Kettenmatrix haben nicht die gleiche Transfermatrix; der Zusammenhang ist abhängig von der Wahl der Bezugswiderstände

[2] Obwohl die Wahl dieser Wellenwiderstände an sich beliebig ist, liegt jedoch in den praktischen Anwendungen meist schon ein spezieller Wert vor, der sich dafür besonders gut eignet. Z_{0n} wird hier als reeller Wert angenommen.

In den Figuren 4 a und 4 b sind zwei Fälle gegenübergestellt, die als konventionelle Vierpole die gleiche Schaltung haben, nämlich die einfachste Verbindung von Ein- und Ausgangsklemmen. Sie haben die gleichen klassischen Matrizen, hingegen seien die Bezugswiderstände verschieden. Die entsprechenden Vierpole im Falle von Hohlleitern und die **T**-Matrix als Wellenmatrix sind in jedem Falle angegeben. Die Verschiedenartigkeit der Fälle ist hier auch in den Matrizen deutlich.

Ähnliche Fälle liegen in Figur 4 c und 4 d vor. An diesen einfachen Beispielen ist ersichtlich, dass die Beziehungen zwischen den verschiedenen Darstellungsarten am einfachsten sind, wenn $Z_{01} = Z_{02}$ angenommen wird. Wir wollen deshalb im folgenden im allgemeinen diese Annahme stillschweigend voraussetzen, um so mehr, als grundsätzlich an der Allgemeinheit der Diskussion dadurch nichts verlorengeht. Um den allgemeinsten Fall aus diesem speziellen zu erhalten, genügt es nämlich immer, zu den fraglichen Vierpolen einen Übertrager mit der Spannungsübersetzung $\sqrt{Z_{01} / Z_{02}}$ in Kette zu schalten.

Ein weiterer Punkt, der hier klargestellt werden muss, ist die Wahl der Bezugsebenen. Bei den Vierpolen aus konzentrierten Elementen tritt dieses Problem nicht in Erscheinung, da die Wellenlänge gross ist gegen die Dimensionen der Schaltung. So ist zum Beispiel die Phase der Eingangsgrössen (U_1 und I_1 oder auch p_1 und q_1) gegeneinander immer dieselbe, ob sie nun beide auf Eingang oder Ausgang bezogen werden; demgegenüber ist bei der Leitungstechnik, wegen der relativ grossen Abmessungen gegen die Wellenlänge, die gegenseitige Phase dieser Grössen sehr abhängig vom Bezugsort. Jeder Vierpol in der Leitungstechnik ist daher ausser seinen anderen Eigenschaften, auch ein Phasenschieber, was schon dadurch bedingt ist, dass Ein- und Ausgang räumlich nicht zusammenfallen können. Dies ist für die theoretische Behandlung ein Nachteil gegenüber den konzentrierten Vierpolen, weil die Vierpoleigenschaften immer durch diese Phasenbeziehungen verschleiert sind. Um dies zu umgehen, führen wir folgende Abstraktion ein: Alle Grössen werden auf eine *einzige* Bezugsebene reduziert (also nicht eine Eingangs- und eine Ausgangsebene), so dass der Vierpol in diese Bezugsebene zusammengedrückt erscheint. Im praktischen Falle wird dann nachträglich ein Phasenschieber in Kette geschaltet, der jene Phasenbeziehungen enthält, die der geometrischen Länge der Struktur entsprechen.

Bei theoretischen Zerlegungen eines Vierpoles in eine Kettenschaltung muss also unter Umständen berücksichtigt werden, dass die Teilvierpole in der Realisierung nur unter Zwischenschaltung eines Phasengliedes verbunden werden können. In vielen Fällen können aber alle Phasenglieder zusammengefasst werden, nämlich dann, wenn die Teilvierpole kommutativ sind. Dies ergibt schon einen Hinweis auf die Zweckmässigkeit der Zerlegung in Diagonalmatrizen, deren Multiplikation ebenfalls kommutativ ist.

Die Wellenmatrizen sind nicht nur in der Wellenleitertechnik von Bedeutung, sie können auch bei tieferen Frequenzen, bei Vierpolen mit konzentrierten Schaltelementen verwendet werden, wenn auch der Wellencharakter des Energietransportes dort weniger augenfällig ist. Ein grosser Vorteil, der für ihre universelle Verwendung spricht, ist nämlich, dass die Wellenmatrizen praktisch immer existieren, während bei speziellen Vierpolen einzelne der **A**, **D**, **Z** und **Y**-Matrizen nicht angeschrieben werden können.

Es ist allgemein bekannt, welche Matrizenoperationen beim Zusammenschalten von Vierpolen durchgeführt werden müssen, wenn es sich um die konventionellen **A**, **Z**, **Y** und **D**-Matrizen handelt [1]. Für den wichtigsten Fall, nämlich die Kettenschaltung zweier Vierpole, seien die entsprechenden Operationen mit den Wellenmatrizen hier angegeben:

Schaltet man die beiden Vierpole mit den Streumatrizen **S**′ und **S**″ in Kette, so wird (s. Anhang 2) die Matrix **S** des resultierenden Vierpoles:

$$\mathbf{S}' \# \mathbf{S}'' = \mathbf{S} = \frac{1}{1 - s'_{22}\, s''_{11}} \begin{Vmatrix} (s'_{11} - s''_{11} \det \mathbf{S}') ; & s'_{12} s''_{12} \\ s'_{21} s''_{21} ; & (s''_{22} - s'_{22} \det \mathbf{S}'') \end{Vmatrix}^{3} \qquad (13)$$

Man beachte, dass diese Berechnung besonders einfach wird, wenn die Elemente der Hauptdiagonale der beiden Matrizen verschwinden.

Im allgemeinen ist die Berechnung einer Kettenschaltung einfacher mit den Transfer-Matrizen.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' \# \mathbf{T}'' = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'' \qquad (14)$$

Es gelten also bei der Kettenschaltung die gleichen Regeln für die **T**-Matrix wie für die **A**-Matrix: die Matrix der Kettenschaltung ist das Matrizenprodukt der Einzelmatrizen.

3. Aktive und passive Vierpole

Wenn wir die Energieübertragungseigenschaften und die physikalischen Realisierbarkeitsbedingungen betrachten, so stossen wir auf die Begriffe der aktiven und passiven Vierpole. Es ist besonders das Auftauchen nichtreziproker Vierpole, das Anlass gegeben hat zu erneuten Untersuchungen in dieser Angelegenheit. Als passiv werden gewöhnlich solche Vierpole bezeichnet, die keine Energiequellen enthalten. Gelegentlich trifft man auch die Anschauung, dass alle passiven Vierpole aus Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten und Gegeninduktivitäten aufgebaut werden können. Diese Definition ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig für Passivität einer Schaltung. Weiter fragt es sich, wo jene Vierpole eingereiht werden sollen, die zwar aktive Elemente enthalten, aber nicht mehr Energie nach aussen abgeben können, als sie aufnehmen.

[3] Mit # symbolisieren wir allgemein die Kettenschaltung von Vierpolen.

Man könnte den Begriff des passiven Vierpoles folgendermassen präzisieren:

Ein Vierpol ist passiv, wenn keinerlei Betriebsbedingungen existieren, bei denen er im Mittel eine grössere Wirkleistung abgibt als er aufnimmt.

Damit ist umgekehrt auch der aktive Vierpol schon definiert. Es sei darauf hingewiesen, dass ein aktiver Vierpol in bezug auf Frequenz und Lastimpedanz meistens Betriebsbereiche, mindestens aber Betriebspunkte hat, bei denen er sich passiv verhält, also weniger oder gleichviel Wirkleistung abgibt als er aufnimmt (selbstverständlich gehört z. B. bei einem netzgespeisten Verstärker die an den Netzklemmen bezogene Speiseleistung nicht zur Energiebilanz des eigentlichen Vierpoles).

Ein Vierpol kann ferner einrichtig oder beidrichtig passiv sein; im ersteren Fall darf der Vierpol, wie beispielsweise ein gewöhnlicher Verstärker, nur nach einer Seite mehr Leistung abgeben als er an der anderen aufnimmt.

Diese Art der Unterscheidung zwischen aktiven und passiven Vierpolen hat verschiedene Vorteile:

- Erstens werden diejenigen Vierpole eindeutig klassiert, die zwar aktive Elemente enthalten, die aber an den Klemmen nicht mehr Wirkleistung abgeben können als sie aufnehmen;
- zweitens wird die Unsicherheit umgangen, welche Elemente als aktiv zu gelten haben (ist z. B. eine Verstärkerröhre, die als variabler Widerstand benützt wird, ein aktives Element?);
- drittens, und dies ist der wichtigste Punkt, ist die Definition der Vierpoltheorie besser angepasst, denn sie definiert eine äusserlich messbare Eigenschaft, unabhängig davon, durch welche internen Schaltmassnahmen diese Eigenschaft zustande kommt. Die gesamte hier zur Diskussion stehende Vierpoltheorie befasst sich ja in erster Linie mit den allgemeinen Übertragungseigenschaften von 2-Klemmenpaaren, unabhängig von deren Aufbau und erst in zweiter Linie mit den praktischen Realisiermöglichkeiten einer geforderten Eigenschaft.

Nach dieser Definition ist also zum Beispiel ein Gyrator grundsätzlich ein passiver Vierpol, ohne Rücksicht darauf, ob er nun mit aktiven oder passiven Elementen realisiert wird. Es ist also vorerst durchaus denkbar, dass es passive Vierpole (nach dieser Definition) gibt, die mit den üblichen passiven Elementen nicht oder noch nicht realisiert werden können. *Carlin* [3] hat jedoch nachgewiesen, dass es keine passiven Vierpole gibt, die nicht – wenigstens theoretisch – aus gewöhnlichen reziproken Netzwerken und idealen Gyratoren zusammengesetzt werden könnten.

Der verlustlose oder leistungsgleiche Vierpol, der in jedem Betriebszustand gleichviel Energie abgibt, wie er aufnimmt, bildet die Grenze zwischen aktivem und passivem Vierpol, er wird definitionsgemäss zum passiven gerechnet.

Die Kriterien, an Hand derer bei den verschiedenen Matrizen festgestellt werden kann, ob sich die entsprechenden Vierpole einrichtig oder beidrichtig passiv oder verlustlos verhalten, sind nur teilweise bekannt und sollen daher im folgenden angegeben werden.

Wir betrachten zunächst die **A**-Matrix (3), und zwar mit den Zählrichtungen nach Figur 2 A.

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Im allgemeinen sind die Elemente a_{ik} komplex. Die Wirkleistung ist das skalare Produkt der Vektoren U_i und I_i, wenn U_i und I_i zusammengehörige Spannungs-, bzw. Stromeffektivwerte bedeuten.

Für einen vorwärts (Energieübertragung von 1 nach 2) passiven Vierpol gilt[4]

$$(U_1, I_1) \geqq (U_2, I_2) \tag{15a}$$

Ist der Vierpol rückwärts passiv (Speisung an Seite 2) so gehorcht er der Bedingung[5]

$$(U_2, I_2) \geqq (U_1, I_1) \tag{15b}$$

und wenn er vollständig passiv ist, so gelten beide Beziehungen, je nachdem der Vierpol von Seite 1 oder 2 gespeist wird. Dabei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Lastimpedanz des Vierpoles einen positiven Realteil hat, also passiv ist. Damit (15 a) erfüllt ist, ergeben sich für die Elemente der **A**-Matrix folgende Forderungen (Ableitung s. Anhang 3)

$$(a_{11}, \; a_{21}) \geqq 0 \tag{16a}$$

$$(a_{12}, \; a_{22}) \geqq 0 \tag{16b}$$

$$(a_{11} \times a_2 \;) - (a_{12} \times a_{21}) = 0 \tag{16c}$$

$$(a_{11}, \; a_2 \;) + (a_{12}, \; a_{21}) \geqq \tfrac{1}{2} \left(|\det \mathbf{A}|^2 + 1\right) \tag{16d}$$

Die Bedingung (16d) muss nur erfüllt sein, wenn die linke Seite dieser Ungleichung kleiner als eins ist.

Für Passivität in umgekehrter Richtung (15 b) ergeben sich analog die Forderungen:

$$(a_{21}, \; a_{22}) \geqq 0 \tag{17a}$$

$$(a_{11}, \; a_{12}) \geqq 0 \tag{17b}$$

$$(a_{11} \times a_{22}) + (a_{12} \times a_{21}) = 0 \tag{17c}$$

$$(a_{11}, \; a_{22}) + (a_{12}, \; a_{21}) \geqq \tfrac{1}{2} \left(|\det \mathbf{A}|^2 + 1\right) \tag{17d}$$

$$\text{bzw.} \geqq 1$$

Bei einem beidrichtig passiven Vierpol müssen die Gleichungen (16) und (17) erfüllt sein. Im verlustlosen Falle gelten immer die Gleichheitszeichen in den angegebenen Bedingungen (16) bzw. (17). Für vorwärts und rückwärts verlustlose Vierpole ergibt sich

[4] mit a, b sei das skalare,
mit $a \quad b$ das vektorielle und
mit $a \cdot b = (a, b^*) - \mathrm{j}\,(a \times b^*)$ das komplexe Produkt zweier komplexer Grössen bezeichnet.

[5] Der positive Zählsinn für die Ströme ist dabei immer vom Generator gegen die Last gewählt.

an Stelle von (16 c), (16 d), (17 c) und (17 d) dann die Bedingung:[6]

$$|\det \mathbf{A}| = 1 \tag{18a}$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^* \\ -a_{21} & a_{22}^* \end{vmatrix} = 1\ (+j0) \tag{18b}$$

Ferner kann man zeigen (s. Anhang 3), dass *ein vorwärts verlustloser Vierpol auch rückwärts verlustlos sein muss.* Dabei muss immer

$$\begin{aligned} (a_{11} \times a_{22}) &= 0 \\ (a_{12} \times a_{21}) &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

sein.

Denkt man sich diese Matrizenelemente als Vektoren, so sind im verlustlosen Falle die Elemente einer Diagonale gleich oder entgegengesetzt gerichtet (dabei können höchstens zwei Elemente entgegengesetzt gerichtet sein), ferner stehen die Elemente der einen Diagonale senkrecht zu jenen der anderen Diagonale (s. Figur 5).

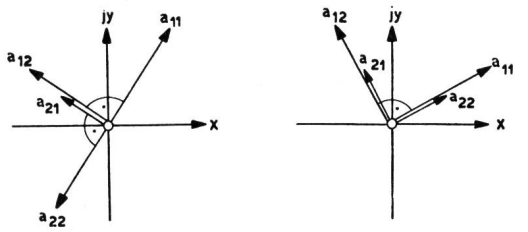

Fig. 5. Mögliche Lage der **A**-Matrixelemente in der kompexen Ebene für einen verlustlosen Vierpol

An dieser Stelle kann man darauf hinweisen, dass ein Vierpol mit drei verschwindenden Elementen in der **A**- oder der **T**-Matrix keinen verlustlosen Vierpol darstellen kann. Um Irrtümern vorzubeugen, sei hier besonders hervorgehoben, dass trotz den voranstehenden Resultaten Fälle von Vierpolen möglich sind, die zum Beispiel vorwärts verlustlos scheinen, dagegen rückwärts als grosse Dämpfung wirken (Richtleitung, Uniline). Solche Vierpole sind jedoch nur unter ganz bestimmten Betriebsbedingungen, also punktweise verlustlos (bei reflexionsfreier Anpassung) und fallen daher nicht in die Klasse der (vollständig) verlustlosen Vierpole. Damit ein Vierpol bei einem bestimmten reellen Abschlusswiderstand R_2 *punktweise* passiv, bzw. verlustlos ist, reduziert sich die Forderung (16) auf:

$$(a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \geqq 1 - R_2\,(a_{11}, a_{21}) - (a_{21}, a_{22})/R_2 \tag{20}$$

Für den umgekehrten Vierpol tritt an Stelle von (17):

$$(a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \geqq |\det \mathbf{A}|^2 - R_1(a_{11}, a_{12}) - (a_{21}, a_{22})/R_1 \tag{21}$$

[6] Die Determinate einer Matrix sei folgendermassen geschrieben entweder $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ oder det **A**. In allen Fällen, wo nicht das ganze Schema der Koeffizienten geschrieben wird, bedeuten die vertikalen Striche den absoluten Betrag, also

$$|\det \mathbf{A}| = \sqrt{(\det \mathbf{A})\ (\det \mathbf{A})^*}$$

An Stelle der Kettenmatrix **A** kann man zur Formulierung der Passivitätsbedingungen auch die andern Matrizen benützen. Hier seien noch die Zusammenhänge zwischen den Elementen der Transfermatrix **T** angegeben (Ableitung s. Anhang 3). Einrichtig passiv ist ein Vierpol, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$t_{22}\, t_{22}^* + t_{11}\, t_{11}^* - t_{12}\, t_{12}^* - t_{21}\, t_{21}^* \geqq 1 + |\det \mathbf{T}|^2 \tag{22}$$

Die Bedingung (22) muss im einrichtigen Falle nur erfüllt sein, wenn:

$$(1 - t_{11}\, t_{11}^* - t_{21}\, t_{21}^*) > |\, t_{11}\, t_{12}^* - t_{21}\, t_{22}^* \,| \tag{23}$$

andernfalls treten an deren Stelle die schwächeren Forderungen (24) (25)

$$(t_{22}\, t_{22}^* - t_{12}\, t_{12}^*) \geqq 1 \tag{24}$$

$$t_{22}\, t_{22}^* - t_{11}\, t_{11}^* - t_{12}\, t_{12}^* + t_{21}\, t_{21}^* > 2\,|\, t_{11}\, t_{12}^* - t_{21}\, t_{22}^* \,| \tag{25}$$

Für den rückwärts passiven Vierpol lauten die entsprechenden Bedingungen:

$$(t_{22}\, t_{22}^* - t_{21}\, t_{21}^*) \geqq |\det \mathbf{T}|^2 \tag{24a}$$

und

$$t_{22}\, t_{22}^* - t_{11}\, t_{11}^* + t_{12}\, t_{12}^* - t_{21}\, t_{21}^* > 2\,|\, t_{11}\, t_{21}^* - t_{12}\, t_{22}^* \,| \tag{25a}$$

falls

$$(1 - t_{11}\, t_{11}^* - t_{12}\, t_{12}^* < |\, t_{11}\, t_{21}^* - t_{12}\, t_{22}^* \,| \tag{23a}$$

ansonst auch hier (22) gilt.

Für den beidrichtig verlustlosen Vierpol muss einzig die Ungleichung (22) erfüllt sein, in diesem Falle jedoch uneingeschränkt.

Bei einem beidrichtig *verlustlosen* Vierpol ergeben sich die Beziehungen (26):

$$\begin{aligned} t_{11}\, t_{11}^* - t_{21}\, t_{21}^* &= 1 \\ t_{22}\, t_{22}^* - t_{12}\, t_{12}^* &= 1 \\ t_{11}\, t_{12}^* - t_{21}\, t_{22}^* &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Im Zusammenhang mit nichtreziproken Vierpolen in der cm-Wellentechnik werden gelegentlich solche erwähnt, die gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verstossen. Ein solcher Vierpol wäre die ideale *reflektierende* Richtleitung: sie lässt die Energie in der einen Richtung ungedämpft durchtreten, während sie Energie aus der andern Richtung vollständig reflektiert. Dies widerspricht, wenn der Vierpol passiv ist, dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Würde nämlich ein solcher Vierpol zwischen zwei Abschlusswiderstände geschaltet, so würde die (thermische) Rauschleistung des einen Abschlusses vollständig und von selbst in den anderen Widerstand übergehen, der eine Abschluss würde sich erwärmen, während sich der andere abkühlte. Ein solcher Vierpol ist passiv nicht möglich. Die Frage ist nun, ob der zweite Hauptsatz weitere Einschränkungen für die Vierpolmatrix zur Folge hat. Es lässt sich jedoch leicht zeigen (s. Anhang 4), dass dies nicht der Fall ist. Ein Vierpol, dessen Matrix den oben angegebenen Passivitätsbedingungen gehorcht, kann auch

den zweiten thermodynamischen Hauptsatz nicht verletzen, oder umgekehrt kann ein Vierpol, der dem zweiten Hauptsatz widerspricht, nicht passiv sein. Man kann dies sofort an folgendem Fall einsehen (s. Fig. 6): Eine reflektierende Richtleitung liege zwischen einem Generator und einer Last. Eine im Generator erzeugte Welle laufe ungedämpft durch den Vierpol in die zunächst angepasste Last. In einem zweiten Betriebszustande falle eine Welle, zum Beispiel gleicher Amplitude wie im ersten Fall, von der Lastseite her ein. Diese wird vollständig zurückreflektiert. Da der Vierpol linear ist, darf man die beiden Betriebszustände superponieren, was man erreichen kann durch Abschluss mit der Last $r = 0{,}5$. Die Phase des Generators werde nun so eingestellt, dass sich am Ausgang des Vierpoles die beiden Wellenamplituden addieren. Dann läuft rechts vom Vierpol eine Welle mit doppelter Amplitude und daher vierfacher Leistung nach der Last und eine Welle mit einfacher Amplitude und Leistung in den Vierpol hinein. Die Last absorbiert also die dreifache Leistung des Generators, was nur möglich ist, wenn der Vierpol selber aktiv ist.

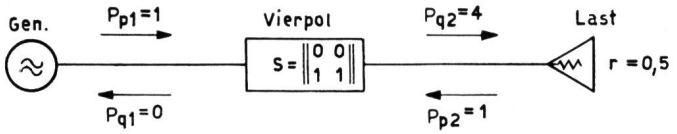

Fig. 6. Ideale reflektierende Richtleitung (passiv nicht realisierbar)

Wenn man von linearen Vierpolen spricht, so ist vielleicht noch eine Präzisierung am Platze. Linear nennt man einen Vierpol dann, wenn zwischen den verschiedenen Betriebsgrössen (Ströme, Spannungen, Wellenamplituden, Leistungen) an Ein- und Ausgang lineare Zusammenhänge bestehen. Nun gibt es Vierpole, zum Beispiel gesteuerte Spannungsquellen, die eine Ausgangsleistung abgeben, die nicht verschwindet, wenn keine Eingangsleistung vorhanden ist, bei denen aber die Änderung entweder der Ausgangsspannung (und des Ausgangsstromes) oder der Ausgangsleistung proportional zu einer Eingangsgrösse ist. Man könnte einen solchen Vierpol differentiell linear nennen. Diese Vierpole sind immer aktiv, auch wenn die Änderung der Ausgangsleistung geringer ist als die Änderung der Eingangsleistung. Die Änderungen können auch verschiedene Vorzeichen haben, hingegen kann natürlich in diesem Falle nur entweder die Differenz der Leistungen oder dann die Differenz der Spannungen, nicht aber beide proportional sein zur Eingangsgrösse. Wenn sowohl Leistung als auch Spannung (oder Strom) proportional sind, so wollen wir den Vierpol regulär linear nennen; in diesem Falle müssen bei verschwindenden Eingangsgrössen auch die Ausgangsgrössen Null sein (jedoch braucht einer Wirkleistung am Ausgang keine Wirkleistung am Eingang zu entsprechen, der Proportionalitätsfaktor ist beliebig komplex). Im folgenden werden wir, ohne dies noch ausdrücklich zu erwähnen, nur von regulär linearen Vierpolen sprechen.

4. Reziprozität

Der allgemeine Vierpol ist nicht reziprok. Bei den passiven Vierpolen existierte jedoch bis vor etwa fünf Jahren der nichtreziproke Vierpol fast nur in der Theorie, wenn man von den optischen Versuchen Faradays absieht. Nichtreziprokes Verhalten war indessen bei den aktiven Vierpolen beinahe selbstverständlich (d. h. hauptsächlich bei den Verstärkern). Es ist interessant und sicher nicht ganz zufällig, dass ebenfalls in den letzten Jahren die *reziproken aktiven* Vierpole beträchtlich an Bedeutung gewannen, obwohl sie technisch schon längst realisierbar gewesen waren. Wenn auch der nichtreziproke passive Vierpol heute erst bei Frequenzen von über 1000 MHz aus passiven Elementen technisch realisiert ist, so dürfte er ebenfalls bei viel tieferen Frequenzen interessante Anwendungen finden, auch wenn er dort vorläufig noch mit Hilfe von aktiven Elementen zusammengesetzt werden muss.

Es sei kurz in Erinnerung gerufen, was Reziprozität bei Vierpolen bedeutet. Wird an die Klemmen 1–1′ eines Vierpoles eine Spannungsquelle U mit dem inneren Widerstand R_i angelegt (s. Fig. 7), so fliesse am mit $R_a = R_i$ belasteten Ausgang 2–2′ der Strom I_2. Ist der Vierpol reziprok, so kann man Spannungsquelle und Belastungswiderstand vertauschen, ohne dass sich der Strom im Widerstand R_a ändern würde. Es ist also $\tilde{I}_1 = I_2$, ohne dass im allgemeinen Fall auch $I_1 = \tilde{I}_2$ wäre.[7] Die Grösse von $R_a = R_i$ kann beliebig gewählt werden. Man kann das Gesetz der Reziprozität auch für die normierten Wellen p und q formulieren. Die Betriebsbedingungen sind dann folgende: Der Vierpol werde gespeist aus einer Leitung mit dem bei der Normierung verwendeten Wellenwiderstand (vorwärts Z_{01}, rückwärts Z_{02}) und reflexionsfrei abgeschlossen mit dem entsprechenden, zur andern Seite gehörenden Wellenwiderstand Z_{02}, bzw. Z_{01}

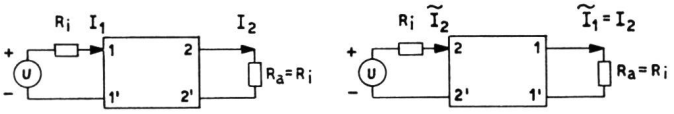

Fig. 7. Reziprozitätsgesetz für Vierpole in konventioneller Darstellung

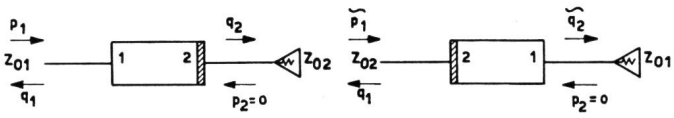

Fig. 8. Reziprozitätsgesetz für Vierpole in Wellendarstellung

[7] Das Zeichen ~ über einer Grösse bedeutet hier immer, dass diese sich auf den in umgekehrter Richtung betriebenen Vierpol bezieht.

(Fig. 8). Dann ist bei Reziprozität des Vierpoles $q_2/p_1 = \tilde{q}_2/\tilde{p}_1$, und zwar gilt die Gleichung für das komplexe Verhältnis der Amplituden. (Da die Wellengrössen normiert sind, treten in den Betriebsbedingungen auch normiert gleiche und nicht absolut gleiche Widerstände auf. Weil die Wahl der Normierungswiderstände beliebig ist, so ist der Satz in dieser Form ebenso allgemein wie in der ersten Fassung.)

Ob ein Vierpol reziprok ist oder nicht, lässt sich mit Hilfe irgend einer seiner Matrizen bekanntlich leicht feststellen. Die – ausser der letzten – bekannten Bedingungen sind [1] [2]:

$$\begin{aligned} z_{12} &= -z_{21} \\ y_{12} &= -y_{21} \\ \det \mathbf{A} &= 1 \\ d_{11} &= d_{22} \\ s_{12} &= s_{21} \\ \det \mathbf{T} &= 1 \end{aligned} \tag{27}$$

Alle diese Gleichungen sind äquivalent.

Um reziproke und nichtreziproke Vierpole im folgenden in der graphischen Darstellung auseinanderhalten zu können, seien hier folgende Schaltsymbole eingeführt:

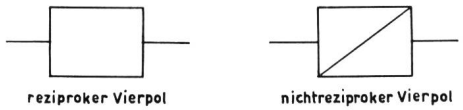

Fig. 9. Symbole für reziproke und nichtreziproke Vierpole

Falls irgendwelche Eigenschaften in dieses Symbol eingeschrieben werden, so sollen sie in jenem Dreieck eingetragen werden, dessen Spitze in der Richtung weist, für die die Eigenschaft gilt.[8]

Neben dem reziproken Vierpol ist der antireziproke der wichtigste, denn alle Vierpole können realisiert werden, entweder durch Parallelschaltung oder durch Kettenschaltung von reziproken und antireziproken Vierpolen. Antireziproke Vierpole erkennt man an einer der folgenden Eigenschaften der verschiedenen Matrizen:

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_{21} \\ y_{12} &= y_{21} \\ \det \mathbf{A} &= -1 \\ d_{11} &= -d_{22} \\ s_{12} &= -s_{21} \\ \det \mathbf{T} &= -1 \end{aligned} \tag{28}$$

[8] Vom Standpunkt der Systematik aus ist es vielleicht nicht ganz richtig, diese zwei Symbole einander so gegenüber zu stellen, da der reziproke Vierpol ein Spezialfall des nichtreziproken ist, der 2 Freiheitsgrade weniger hat als dieser. Man könnte natürlich entsprechend weitere Symbole einführen für antireziproke und für komplex reziproke Netzwerke. Da aber, wenigstens vorläufig, die reziproken Vierpole den weitaus grössten Teil der praktisch verwendeten ausmachen und die nichtreziproken die Ausnahme darstellen, wollen wir uns auf dieses Symbol beschränken.

Als wichtigstes Beispiel der antireziproken Vierpole sei hier der ideale Gyrator genannt, der unter den antireziproken Vierpolen eine ähnliche Stellung einnimmt wie der ideale Übertrager bei den reziproken.

Seine Matrizen sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{Vmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{Vmatrix} & \mathbf{Y} &= \begin{Vmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{Vmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{Vmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{Vmatrix} \\ \mathbf{T} &= \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} & \mathbf{S} &= \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

Die Reihen-Parallelmatrix **D** existiert nicht.

Nachdem wir reziproke und antireziproke Vierpole betrachtet haben, machen wir eine Erweiterung des Reziprozitätsbegriffes, indem wir den *komplex reziproken* oder, abgekürzt, «reziplexen» Vierpol, folgendermassen definieren: Ein Vierpol werde, wie in Figur 7, bzw. Figur 8, aus einer Spannungsquelle mit innerer Impedanz Z, bzw. von einer Leitung mit dem normierten Wellenwiderstand Z_{0m} gespeist; er sei ferner belastet mit der Impedanz Z, bzw. mit dem normierten Wellenwiderstand Z_{0n}. Ein komplex reziproker Vierpol kann dann umgedreht werden, ohne dass sich der *Betrag* des Verhältnisses I_n/U_m bzw. q_n/p_m ändern würde. (Die Phase dieses Verhältnisses ist hingegen beliebig, nur bei einem im engeren Sinne oder reell reziproken Vierpol ist auch die Phase in beiden Betriebsrichtungen gleich, während im antireziproken Falle die Phasendifferenz π ist.) Wenn wir in (27) an Stelle aller Grössen deren absolute Werte einsetzen, so ergeben sich die Beziehungen, die bei reziplexen Vierpolen erfüllt sein müssen. Wenn auch allgemeiner als der reell reziproke Vierpol, so ist der reziplexe doch nicht der allgemeinste. Die gemeinsame Eigenschaft aller komplex reziproken Vierpole liegt in ihrer Übertragungssymmetrie, wenn man von der Phase des Übertragungsmasses absieht. Die Beträge der Übertragungsmasse vorwärts und rückwärts sind gleich. Dies gilt für das Wellenübertragungsmass, sowie auch für das Betriebsübertragungsmass, sofern bei letzterem die innere Impedanz des Generators mit der Belastungsimpedanz übereinstimmt oder wenn in der Wellendarstellung der Vierpol reflexionsfrei abgeschlossen ist. Alle verlustlosen Vierpole sind demnach reziplex. Zwischen den Winkeln der Übertragungsmasse und den Winkeln zwischen den Matrixelementen bestehen folgende Beziehungen (β_1 bzw. β_2 sind die Winkel des Übertragungsmasses vorwärts, bzw. rückwärts):

$$\begin{aligned} \beta_1 - \beta_2 &= \arg(\det \mathbf{A}) = -\arg(z_{12}/z_{21}) = -\arg(y_{12}/y_{21}) \\ &= \arg(d_{11}/d_{22}) = \arg(s_{12}/s_{21}) = \arg(\det \mathbf{T}) \end{aligned} \tag{30}$$

Zur Unterscheidung wollen wir alle Vierpole, die nicht komplex reziprok sind, *areziprok* nennen.

Bezüglich der gewöhnlichen oder reellen Reziprozität sei hier noch ein weiterer Punkt erwähnt: Da alle Vierpole, die aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten aufgebaut werden können, reell reziprok sind, könnte man glauben, dass auch das Umgekehrte richtig sei. Dies ist aber nicht der Fall. Es gibt reell reziproke Vierpole, die nicht aus diesen Elementen realisiert werden können; ein Beispiel hierfür ist der reziproke Impedanzkonverter, auf den wir später zurückkommen werden.

5. Konvertierende und invertierende Vierpole

Vierpole werden häufig dazu verwendet, um verschiedene Schaltelemente impedanzmässig einander anzupassen, sei es zur Vermeidung störender Mehrfachreflexionen oder zur Erzeugung eines bestimmten impedanzmässigen Verhaltens einer Schaltung. Solche Vierpole sind Impedanztransformatoren im allgemeinsten Sinne. Besteht zum Beispiel reelle Proportionalität zwischen der Lastimpedanz und der Eingangsimpedanz des Vierpoles, so liegt ein gewöhnlicher Transformator im engeren Sinne des Wortes vor.

Eine besondere Gruppe des allgemeinen komplexen Transformators bilden jene Vierpole, die wir *konvertierend* nennen wollen. Jede Lastimpedanz erscheint am Eingang eines solchen Vierpoles mit einer komplexen Zahl multipliziert. Hat diese Zahl den Betrag eins und ist der Vierpol komplex reziprok, so nennen wir den Vierpol *ideal konvertierend*. Ist die Phasendifferenz der Impedanzen dann zum Beispiel π, so liegt ein Vierpol vor, der einen reellen Lastwiderstand in einen negativen Widerstand gleichen Betrages verwandelt. Konvertierende Vierpole dieser Art benützt man neuerdings beispielsweise in der Telephonie zur Entdämpfung von Übertragungsleitungen. Ein konvertierender Vierpol sei nicht etwa mit einem gewöhnlichen Phasenschieber verwechselt: ein Phasenschieber dreht die Phase einer durchtretenden Welle (Strom *und* Spannung gleichzeitig), während der konvertierende Vierpol die Phase der Abschluss*impedanz* dreht. Der allgemeine konvertierende Vierpol hat folgende Matrizen:

$$\mathbf{A}_K = \begin{Vmatrix} a_1 e^{j(\varphi+\psi)} & 0 \\ 0 & a_2 e^{j(\varphi-\psi)} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{D}_K = \begin{Vmatrix} a_1 e^{j(\varphi+\psi)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} e^{-j(\varphi-\psi)} \end{Vmatrix} \qquad (31)$$

$$\mathbf{T}_K = \frac{e^{j\varphi}}{2} \begin{Vmatrix} (a_1 e^{j\psi} + a_2 e^{-j\psi}) & (a_1 e^{j\psi} - a_2 e^{-j\psi}) \\ (a_1 e^{j\psi} - a_2 e^{-j\psi}) & (a_1 e^{j\psi} + a_2 e^{-j\psi}) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S} = 1/(a_1 e^{j\psi} + a_2 e^{-j\psi}) \begin{Vmatrix} (a_1 e^{j\psi} - a_2 e^{-j\psi}) & 2 a_1 a_2 e^{j\varphi} \\ 2 e^{-j\varphi} & -(a_1 e^{j\psi} - a_2 e^{-j\psi}) \end{Vmatrix}$$

$$(\gamma = \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} = 1)$$

Dazu gehören die Determinanten:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_1 a_2 e^{2j\varphi} \\ \det \mathbf{D} &= (a_1/a_2) e^{2j\psi} \\ \det \mathbf{T} &= a_1 a_2 e^{2j\varphi} \\ \det \mathbf{S} &= -1 \end{aligned} \qquad (32)$$

φ und ψ sind dabei beliebige Winkel.

Das Verhalten des allgemeinen konvertierenden Vierpoles kann besser überblickt werden, wenn man ihn folgendermassen in eine Kettenschaltung zerlegt:

$$\mathbf{A}_K = \begin{Vmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{j(\varphi+\psi)} & 0 \\ 0 & e^{j(\varphi-\psi)} \end{Vmatrix} = \mathbf{A}_{\ddot{u}} \mathbf{A}_a \mathbf{A}_k$$

$$\mathbf{T}_K = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} (\ddot{u} + 1/\ddot{u}) & (\ddot{u} - 1/\ddot{u}) \\ (\ddot{u} - 1/\ddot{u}) & (\ddot{u} + 1/\ddot{u}) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} \cdot e^{j\varphi} \begin{Vmatrix} \cos\psi & j\sin\psi \\ j\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_K = \frac{1}{\ddot{u} + 1/\ddot{u}} \begin{Vmatrix} (\ddot{u} - 1/\ddot{u}); & 2 \\ 2; & -(\ddot{u} - 1/\ddot{u}) \end{Vmatrix} \# \begin{Vmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{Vmatrix} \# \begin{Vmatrix} j\mathrm{tg}\psi; & e^{j\varphi}/\cos\psi \\ 1/(e^{j\varphi}\cos\psi); & -j\mathrm{tg}\psi \end{Vmatrix}$$

$$\ddot{u}^2 = a_1/a_2 \qquad a^2 = a_1 a_2 \qquad (33)$$

bedeutet: «in Kette geschaltet mit»

Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass diese drei Vierpole in beliebiger Reihenfolge in Kette geschaltet werden können, da es sich um den speziellen Fall kommutativer Matrizen handelt.

Der erste Vierpol dieser Zerlegung ist ein gewöhnlicher reeller Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} : 1$; der zweite ist ein impedanztreuer Leistungswandler, das ist vorwärts ein Verstärker mit der Spannungsverstärkung a, während er rückwärts als Dämpfungsglied mit dem Abschwächungsverhältnis a wirkt. Er ist areziprok und beidseitig impedanztreu[9], das heisst, eine am einen Ende angeschaltete Lastimpedanz erscheint unverändert an den andern Klemmen. Der dritte Vierpol ist nun ein *idealer Konverter*. Er ist reziplex und kann im allgemeinen nicht passiv realisiert werden, ausser wenn $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$. Zwischen der Eingangsimpedanz Z_1 und der Lastimpedanz Z_2 bestehen beim idealen Konverter folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= e^{2j\psi} Z_2 \quad \text{(Vorwärtsrichtung)} \\ \overset{\partial}{Z}_1 &= e^{-2j\psi} \overset{\partial}{Z}_2 \quad \text{(Rückwärtsrichtung)} \end{aligned} \qquad (34)$$

Beim allgemeinen Konverter muss noch der zugeschaltete Übertrager berücksichtigt werden, indem wir in (34) $e^{2j\psi}$ durch $\ddot{u}\, e^{2j\psi}$ ersetzen (der zweite, noch zugeschaltete Vierpol ist ja impedanztreu und hat daher auf die Konversion keinen Einfluss). Während die zwei ersten Vierpole der Zerlegung (33) auf einen einzigen Freiheitsgrad reduziert sind, das heisst deren Verhalten ist durch einen einzigen Wert vollständig definiert, hat der ideale Konverter noch zwei Bestimmungsgrössen oder Freiheitsgrade (der allgemeinste Vierpol hat deren 8 oder 4 komplexe Werte).

[9] Ein einseitig impedanztreuer Vierpol ist immer auch in der umgekehrten Richtung impedanztreu, was sofort aus den bekannten Formeln der Vierpoltheorie [1] hervorgeht.

Wir können auch diesen Vierpol noch in zwei Elementarvierpole mit je einem einzigen Freiheitsgrad aufspalten, und zwar auf unendlich viele Arten, von denen einige interessante hier angegeben seien:

Tabelle I. Zerlegungen des idealen Konverters.

Kettenmatrizen	Transfermatrizen
$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} e^{j(\varphi+\psi)} & 0 \\ 0 & e^{j(\varphi-\psi)} \end{Vmatrix}$	$\mathbf{T} = e^{j\varphi} \begin{Vmatrix} \cos\psi & j\sin\psi \\ j\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}$
$\begin{Vmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{j\psi} & 0 \\ 0 & e^{-j\psi} \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\psi & j\sin\psi \\ j\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}$	
impedanztreuer Richtphasenschieber (verlustlos, reziplex) # reziproker Konverter (aktiv) (35)	
$\begin{Vmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & -e^{j\varphi} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{j\psi} & 0 \\ 0 & -e^{-j\psi} \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 & e^{j\varphi} \\ e^{j\varphi} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} j\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\psi & j\sin\psi \end{Vmatrix}$	
Negativ-Konverter (aktiv) # antireziproker Konverter (aktiv) (36)	
$\begin{Vmatrix} 0 & Z_0 e^{j\varphi} \\ e^{j\varphi}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & Z_0/e^{j\psi} \\ e^{j\psi}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} -e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\cos\psi & -j\sin\psi \\ j\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}$	
Positiv-Inverter (verlustlos, reziplex) # antireziproker Inverter (aktiv) (37)	
$\begin{Vmatrix} 0 & Z_0 e^{j\varphi} \\ -e^{j\varphi}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -Z_0/e^{j\psi} \\ e^{j\psi}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 & e^{j\varphi} \\ -e^{j\varphi} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} j\sin\psi & \cos\psi \\ -\cos\psi & -j\sin\psi \end{Vmatrix}$	
Negativ-Inverter (aktiv) # reziproker Inverter (aktiv) (38)	

In der ersten Zerlegung tritt der interessante Richtphasenschieber auf. Dieser ist verlustlos, seine Phasenmaße vorwärts und rückwärts sind entgegengesetzt gleich. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Phasenschieber ist er beidseitig impedanztreu, was insbesondere bedeutet, dass ein solches Phasenglied bei Fehlanpassung keine von der Phase abhängige Eingangsimpedanz aufweist. Diese Eigenschaft dürfte in gewissen Fällen noch wichtiger sein als seine Nichtreziprozität. Ein derartiges Phasenglied ist in gewissen Frequenzbereichen mit passiven Elementen realisierbar.

Der impedanztreue Vierpol ist ein Spezialfall des konvertierenden. Alle impedanztreuen Vierpole lassen sich aufspalten in eine Kettenschaltung eines impedanztreuen Leistungswandlers, der phasenfrei, areziprok und aktiv ist und in einen Richtphasenschieber, der verlustlos und reziplex ist.

Beachtenswert ist auch der Negativ-Konverter in der zweiten Zerlegung der *Tabelle I.* Man kann damit durch eine reelle Last negative Widerstände erzeugen, ferner ergeben sich damit negative Kapazitäten und Induktivitäten mit deren Hilfe man zum Beispiel unvermeidliche positive Kapazitäten und Induktivitäten breitbandig kompensieren kann. Eine negative und eine gewöhnliche Reaktanz bilden dann gewissermassen einen Schwingkreis, der bei jeder Frequenz in Resonanz ist. Netzwerke aus solchen Elementen gehorchen dem *Foster*schen Reaktanztheorem nicht.

Macht man $\psi = \pi/4$, so entsteht ein Vierpol, der aus einer reellen Last eine frequenzunabhängige Reaktanz erzeugt, was beispielsweise zur Realisierung frequenzunabhängiger Phasenschieber von Bedeutung sein kann. Dies sind einige wenige Hinweise darauf, welche Rolle diese Vierpole in der Netzwerksynthese in allen Frequenzbereichen spielen können. Die beiden letzten Zerlegungen zeigen, dass konvertierende Vierpole auch aus zwei invertierenden erzeugt werden können.

Ein Vierpol ist *invertierend,* wenn zwischen Eingangsimpedanz Z_1 und Last Z_2 die folgende Beziehung besteht:

$$Z_1 = \zeta^2/Z_2 \tag{39}$$

ζ ist dabei die Inversionsimpedanz. (Bei den Wellenmatrizen werden die Impedanzen Z_1 und Z_2 vorteilhaft durch die relativen Impedanzen z_1 und z_2 ersetzt; an Stelle der Inversionsimpedanz ζ tritt dann die Inversionskonstante $c = \zeta/Z_0$). Die Matrizen eines allgemeinen invertierenden Vierpoles ergeben sich aus der Forderung (39) zu:

$$\mathbf{A}_\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 0 & R_1 e^{j(\eta+\varepsilon)} \\ (1/R_2)e^{-j(\eta-\varepsilon)} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 0 & R_1 e^{j(\eta+\varepsilon)} \\ R_2 e^{j(\eta-\varepsilon)} & 0 \end{Vmatrix} \tag{40}$$

$$\mathbf{T}_\mathrm{I} = \frac{e^{j\varepsilon}}{2} \begin{Vmatrix} -(r_1 e^{j\eta} + e^{-j\eta}/r_2) & (r_1 e^{j\eta} - e^{-j\eta}/r_2) \\ -(r_1 e^{j\eta} - e^{-j\eta}/r_2) & (r_1 e^{j\eta} + e^{-j\eta}/r_2) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{I} = \frac{1}{c\,e^{j\eta} + e^{-j\eta}/c} \begin{Vmatrix} (c\,e^{j\eta} - e^{-j\eta}/c) & -2\,b\,e^{j\varepsilon} \\ 2\,b\,e^{-j\varepsilon} & (c\,e^{j\eta} - e^{-j\eta}/c) \end{Vmatrix}$$

mit: $c = \zeta/Z_0$; $r_1 = R_1/Z_0$; $r_2 = R_2/Z_0$; $r_1 r_2 = c^2$

$b = \sqrt{R_1/R_2} = \sqrt{r_1/r_2} = c/r_2 = r_1/c$; $Z_0 = \sqrt{Z_{01} Z_{02}}$

und $\zeta^2 = R_1 R_2 = (\text{Inversionsimpedanz})^2$

ε und η sind beliebige Winkel; η bestimmt hauptsächlich die Inversionseigenschaften und damit auch die Leistungsübertragung, während ε die Art der Reziprozität festlegt.

Für die dazugehörigen Determinanten findet man folgende Beziehungen:

$$\det \mathbf{A}_\mathrm{I} = -\frac{R_1}{R_2} e^{2j\varepsilon} \qquad \det \mathbf{Z}_\mathrm{I} = \zeta^2 e^{2j\eta} = R_1 R_2 e^{2j\eta}$$

$$\det \mathbf{T}_\mathrm{I} = -b^2 e^{2j\varepsilon} \qquad \det \mathbf{S}_\mathrm{I} = \frac{(c\,e^{j\eta} - e^{-j\eta}/c)^2 + 4\,b^2}{(c\,e^{j\eta} + e^{-j\eta}/c)^2}$$

$$\text{und für } r_1 = r_2: \qquad \det \mathbf{S}_\mathrm{I} \Big|_{b=1} = 1 \tag{41}$$

Der allgemeine Inverter ist vorwärts oder rückwärts oder vollständig passiv, wenn $\eta = 0$ und $R_1 \leq R_2$ bzw. $R_2 \leq R_1$ bzw. $R_1 = R_2$ ($b \leq 1$ bzw. $b \geq 1$ bzw. $b = 1$) ist.

Um diesen Vierpol besser zu verstehen, wollen wir ihn ebenfalls in elementare Kettenglieder zerlegen.

Man kann sich durch Ausmultiplizieren überzeugen, dass folgende Kettenzerlegungen richtig sind:

$$\mathbf{A}_\mathrm{I} = \mathbf{A}_\mathrm{ü} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{a} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{i} =$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 0 & R_1 e^{j(\eta+\varepsilon)} \\ e^{-j(\eta-\varepsilon)}/R_2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & Z_0 e^{j(\varepsilon+\eta)} \\ e^{j(\varepsilon-\eta)}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} (c+1/c) & (c-1/c) \\ (c-1/c) & (c+1/c) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix} \cdot e^{j\varepsilon} \begin{Vmatrix} -\cos\eta & j\sin\eta \\ -j\sin\eta & \cos\eta \end{Vmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} (c-1/c) & 2 \\ 2 & (c-1/c) \end{Vmatrix} \# \begin{Vmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{Vmatrix} \# \frac{2}{\cos\eta} \begin{Vmatrix} j\sin\eta; & -e^{j\varepsilon} \\ e^{-j\varepsilon}\eta; & j\sin\eta \end{Vmatrix}$$

Wie bei der Zerlegung des konvertierenden Vierpoles ist der erste Teilvierpol ein idealer Übertrager und der zweite ein impedanztreuer Leistungswandler. Der dritte Teil hingegen ist der *ideale Inverter*. Dieser ist reziplex und sein Inversionsfaktor ist 1. Auch diesen Vierpol können wir noch in zwei Vierpole mit je einem einzigen Freiheitsgrad zerlegen, zum Beispiel in die folgenden Kombinationen:

idealer Inverter =

Richtphasenschieber # antireziproker Inverter =
Negativ-Konverter # reziproker Inverter =
Positiv-Inverter # reziproker Konverter =
negativer Inverter # antireziproker Konverter

Die dabei vorkommenden Elementarvierpole sind dieselben, wie die bei der Zerlegung des idealen Konverters aufgeführten Beispiele, nur in anderen Kombinationen.

Von besonderem Interesse sind immer die passiven Vierpole, das heisst, unter den hier «ideal» genannten, die verlustlosen. Beim Konverter ist der Richtphasenschieber der einzige nicht triviale verlustlose Fall (die andern sind die Übertrager mit $ü = \pm 1$). Von den idealen Invertern sind jene mit $\eta = 0$, die Positiv-Inverter, verlustlos. Dazu gehört vor allem der ideale Gyrator mit $\varepsilon = 0, \pi$. Dieser ist antireziprok (ein gewöhnlicher Gyrator kann zerlegt werden in einen Übertrager und einen idealen Gyrator). Die Matrizen des idealen Gyrators sind

$$\mathbf{A}_\mathrm{g} = \begin{Vmatrix} 0 & Z_0 \\ 1/Z_0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{Z}_\mathrm{g} = \begin{Vmatrix} 0 & Z_0 \\ Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\mathrm{g} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{S}_\mathrm{g} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad (43)$$

Der ideale Gyrator hat, wie alle in *Tabelle II* aufgeführten Vierpole, den Freiheitsgrad 0.

Er entsteht in der Mikrowellentechnik aus der Kettenschaltung eines Richtphasenschiebers und eines gewöhnlichen Phasenschiebers, beide mit der Phase $\pi/2$.

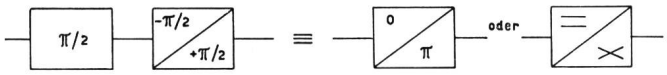

Fig. 10. Synthese des Gyrators

Anderseits entsteht aus dem idealen Konverter durch Kettenschaltung mit einem Gyrator ein idealer Inverter:

$$\mathbf{A}_\mathrm{i} = \begin{Vmatrix} 0 & Z_0 e^{j\eta} \\ e^{-j\eta}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^{j\eta} & 0 \\ 0 & e^{-j\eta} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & Z_0 \\ 1/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\mathrm{i} = \begin{Vmatrix} -\cos\eta & j\sin\eta \\ -j\sin\eta & \cos\eta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\eta & j\sin\eta \\ j\sin\eta & \cos\eta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (44)$$

Inverter Konverter Gyrator

Der Bereich der invertierenden Vierpole ist übersichtshalber in Figur 11 zusammengestellt. Man kann von irgend einem der angegebenen Vierpole in ε-Richtung weiterschreiten, wenn man zum betreffenden Vierpol einen Richtphasenschieber in Kette schaltet. Da dieser impedanztreu ist, wird damit an

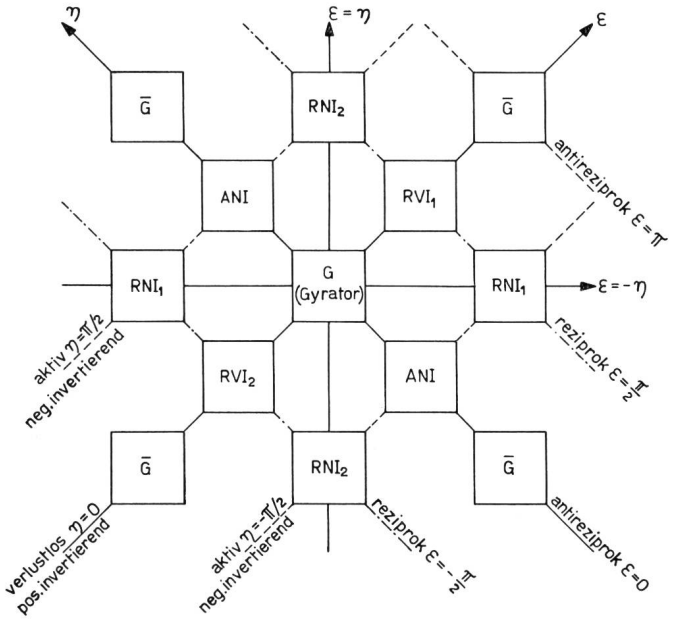

Fig. 11. Familie der invertierenden Vierpole

der Inversionskonstante nichts geändert, und weil er verlustlos ist, bleibt auch die Leistungssituation dieselbe. Schaltet man dagegen einen reziproken Konverter in Kette mit einem der Elementarvierpole, so bewegt man sich in η-Richtung. Dabei wird am Reziprozitätszustand, der durch ε gegeben ist, nichts geändert, hingegen die Inversionskonstante in der Phase gedreht.

Hier sei der Vollständigkeit halber ein weiterer Begriff erwähnt, der gelegentlich verwendet wird. Es ist dies die *bilaterale Anpassung* (bilaterally matched twoports) [5]. Ein Vierpol ist bilateral angepasst, wenn für jede Betriebsrichtung am Eingang der Wellenwiderstand erscheint, sobald auch der Ausgang mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen ist. Dazu gehören die impedanztreuen Vierpole ($\psi = 0$), also Leistungswandler, Richtphasenschieber sowie die idealen verlustlosen Inverter ($\zeta = Z$, $c = 1$), also zum Beispiel der Gyrator. Diese Eigenschaft zeigt

sich sofort in den Wellenmatrizen. Es sind bei der **S**-Matrix die Elemente der Hauptdiagonale und bei der **T**-Matrix jene der Nebendiagonale gleich Null. Dies sind übrigens jene Vierpole, bei denen sich die **S**-Matrix einer Kettenschaltung als Matrizenprodukt der **S**-Matrizen der Teil-Vierpole ergibt, eine Regel, die sonst nur für die Transfermatrix **T** und die Kettenmatrix **A** gilt. Man könnte auch einen Zustand der unilateralen Anpassung definieren, bei dem die «Anpassungstreue» nur in einer Richtung gilt. Dabei müssten dann nur die Koeffizienten t_{12} oder s_{11}, bzw. t_{21} oder s_{22} (vorwärts bzw. rückwärts) verschwinden.

Bilateral angepasste Vierpole sind unter sich kommutativ, man kann sie also in beliebiger Reihenfolge in Kette schalten, ohne dass sich die Eigenschaften des resultierenden Vierpoles ändern würden, was natürlich für die analytische Behandlung ein grosser Vorteil ist. Alle Vierpolmatrizen haben wir ja definitionsgemäss auf eine einzige Bezugsebene reduziert; diese reduzierten Matrizen enthalten das wesentliche der Vierpoleigenschaften. Im praktischen Falle besteht der Vierpol dann aus dem reduzierten Teil und einem reziproken Phasenschieber, der von der physikalischen Länge der Struktur abhängt, ebenso wird die auf Ein- und Ausgangsebene bezogene Matrix aus der reduzierten Matrix «in Kette» mit der Phasenmatrix gewonnen. Liegt nun eine Zerlegung in kommutative Vierpole oder Matrizen vor, so kann man beim Zusammenschalten zunächst alle reduzierten Matrizen «in Kette schalten» (multiplizieren bei den **T**-Matrizen) und dann die Kette aller einzelnen Phasenglieder zufügen.

Von den in den *Tabellen II und III* angegebenen (reduzierten) Elementarvierpolen sind ausser Übertrager, Reflektoren, Konvertern und Negativ-Invertern alle bilateral angepasst und daher unter sich kommutativ. Mit den Negativ-Invertern sind nur die impedanztreuen Vierpole kommutativ. Hingegen ist z. B. die Kettenschaltung von Negativ-Inverter und Phasenglied nicht kommutativ; kehrt man die Reihenfolge der Schaltung um, so muss man das Vorzeichen der Phase im Phasenschieber ebenfalls wechseln, wie in Figur 12 dargestellt.

Fig. 12. Kommutationsregel von Negativ-Inverter und Phasenschieber

Tabelle II. Elementare Vierpole mit null Freiheitsgraden (Anmerkungen siehe S. 183)

Bezeichnung		Matrix		Scheinbare Schaltung		Symbolische Darstellung
In Fig. 11		A	T	vorwärts	rückwärts	
G	Idealer Gyrator	$\begin{Vmatrix} 0 & Z_0 \\ 1/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$	1)	1)	2)
ANI	Antireziproker Negativ-Inverter	$\begin{Vmatrix} 0 & jZ_0 \\ 1/jZ_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{Vmatrix}$	p_1, q_1, jp_1, $-jq_1$		$\frac{p_1}{p_2}=-j$, $\frac{q_1}{q_2}=j$
RNI_1	Reziproker Negativ-Inverter 1. Art	$\begin{Vmatrix} 0 & +Z_0 \\ -1/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$	Z_0, Z_0, $-Z_0$		3) $Z_1=\frac{-Z_0^2}{Z_2}$
RNI_2	Reziproker Negativ-Inverter 2. Art	$\begin{Vmatrix} 0 & -Z_0 \\ 1/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$	$-Z_0$, $-Z_0$, Z_0		$Z_1=\frac{-Z_0^2}{Z_2}$
RVI_1	Reziproker verlustloser Inverter (Tiefpass)	$\begin{Vmatrix} 0 & jZ_0 \\ j/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{Vmatrix}$	$\omega L=Z_0$, $\frac{1}{\omega C}=Z_0$		
RVI_2	Reziproker verlustloser Inverter (Hochpass)	$\begin{Vmatrix} 0 & -jZ_0 \\ 1/jZ_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{Vmatrix}$	$1/\omega C=Z_0$, $\omega L=Z_0$		
	Ideale Richtleitung	$\begin{Vmatrix} 1/2 & Z_0/2 \\ 1/2Z_0 & 1/2 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$		Z_0	$\alpha=0$, ∞
RNK	Reziproker Negativ-Konverter	$\begin{Vmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{Vmatrix}$	I_1, $I=2I_1$		$Z_1=-Z_2$

Tabelle III. Elementare Vierpole mit einem einzigen Freiheitsgrad

Bezeichnung	Matrix A	Matrix T	Scheinbare Schaltung vorwärts	Scheinbare Schaltung rückwärts	Symbolische Darstellung
Richtphasenschieber (impedanztreu)	$\begin{Vmatrix} e^{-j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi} \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} e^{-j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi} \end{Vmatrix}$	1)	1)	$+\varphi$ / $-\varphi$
Gewöhnlicher Phasenschieber (reziprok)	$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & jZ_0\sin\varphi \\ -\sin\varphi/jZ_0 & \cos\varphi \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} e^{-j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix}$			φ
Impedanz- und reflexionstreuer Leistungswandler	$\begin{Vmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{Vmatrix}$ 4)	$\begin{Vmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{Vmatrix}$	I_1, I_2, U_1, $e^{-\alpha}U_2$, $e^{\alpha}I_1$, U_2	$Z_0\,\mathrm{tgh}(\alpha/2)$, $Z_0\sinh\alpha$	$-\alpha$ / $+\alpha$
Attenuator ($\alpha > 0$) beidrichtiger Verstärker ($\alpha < 0$)	$\begin{Vmatrix} \cosh\alpha & Z_0\sinh\alpha \\ \frac{\sinh\alpha}{Z_0} & \cosh\alpha \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{Vmatrix}$	$Z_0\,\mathrm{tgh}(\alpha/2)$, $Z_0\sinh\alpha$		α
Einrichtiger (angepasster) Verstärker	$\frac{1}{2v}\begin{Vmatrix} 1 & Z_0 \\ 1/Z_0 & 1 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/v \end{Vmatrix}$	I_1, I_2, Z_0, $I_2=2vI_1$	Z_0, Z_0	v
Leistungslos gesteuerte Stromquelle (hochohmiger Eingang)	$\begin{Vmatrix} 0 & 1/g \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{gZ_0}\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$	U_1, I_2, $I_2=gU_1$		g
Leistungslos gesteuerte Spannungsquelle (hochohmiger Eingang)	$\begin{Vmatrix} 1/v & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{2v}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$	U_1, $U_2=vU_1$		v
Übertrager, Sprung asym. Reflektor (verlustlos) 6	$\begin{Vmatrix} ü & 0 \\ 0 & 1/ü \end{Vmatrix}$ 5)	$\begin{Vmatrix} t & \sqrt{t^2-1} \\ \sqrt{t^2-1} & t \end{Vmatrix}$	1 : ü		+ r −
Symmetrischer reaktiver Reflektor (verlustlos) 7	$\begin{Vmatrix} t & jZ_0\sqrt{t^2-1} \\ \sqrt{t^2-1}/jZ_0 & t \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} t & j\sqrt{t^2-1} \\ -j\sqrt{t^2-1} & t \end{Vmatrix}$			+ jr + (−) (−)
Symmetrischer reeller Reflektor 9	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} (1-t) & -t \\ t & (1+t) \end{Vmatrix}$	R	Widerstandschicht	− r − (+) (+)
Einseitiger passiver Reflektor 8	$\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{1-\lvert r\rvert} & \frac{Z_0 r}{\sqrt{1-\lvert r\rvert}} \\ 0 & \sqrt{1-\lvert r\rvert} \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} \sqrt{1-\lvert r\rvert} & r/\sqrt{1-\lvert r\rvert} \\ 0 & 1/\sqrt{1-\lvert r\rvert} \end{Vmatrix}$	Richtkoppler; Kopplung $=\sqrt{r}$		r
Reziproker Konverter	$\begin{Vmatrix} e^{j\psi} & 0 \\ 0 & -e^{-j\psi} \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} \cos\psi & j\sin\psi \\ j\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}$	$U_1 = e^{j\psi}U_2$; I_1, U_1, I_2, U_2; $I_2 = e^{+j\psi}I_1$		$Z_1 = e^{2j\psi}Z_2$
Antireziproker Konverter	$\begin{Vmatrix} e^{j\psi} & 0 \\ 0 & -e^{-j\psi} \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} j\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\psi & j\sin\psi \end{Vmatrix}$	$U_1 = e^{j\psi}U_2$; I_1, U_1, I_2, U_2; $I_2 = -e^{+j\psi}I_1$		$Z_1 = e^{2j\psi}Z_2$
Negativ-Konverter	$\begin{Vmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & -e^{+j\varphi} \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 0 & e^{j\varphi} \\ e^{j\varphi} & 0 \end{Vmatrix}$	$U_1 = e^{j\varphi}U_2$; I_1, U_1, I_2, U_2; $I_2 = e^{-j\varphi}I_1$		$Z_1 = -Z_2$
Positiv-Inverter	$\begin{Vmatrix} 0 & Z_0 e^{j\varphi} \\ e^{j\varphi}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} -e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix}$	$U_1 = Z_0 e^{j\varphi} I_2$; U_1, U_2, I_2; $U_2 = Z_0 e^{-j\varphi} I_1$		$Z_1 = e^{2j\varphi}\frac{Z_0^2}{Z_2}$

Unter Berücksichtigung dieser Regel und der Vorschrift, den Negativ-Inverter nur mit impedanztreuen Vierpolen in der Reihenfolge zu vertauschen, kann auch der Phasenanteil des Negativ-Inverters mit den Phasen anderer Teilvierpole zusammengefasst werden.

6. Richtdämpfungen, Quellenvierpole

Während wir im letzten Kapitel hauptsächlich solche Vierpole betrachtet haben, die auf die Phase der Ströme, Spannungen, Wellen und Impedanzen wirkten, so wollen wir hier die *dämpfungs*unsymmetrischen Vierpole etwas genauer untersuchen. Dazu sei zuerst der Begriff des Übertragungsmasses etwas diskutiert. Das Wellenübertragungsmass ist definiert [1] als Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsleistung (gemessen in einem logarithmischen Maßstab), wenn der Ausgang mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen ist. Diese Definition hat den Vorteil, dass dieses Dämpfungsmass einen nur vom Vierpol abhängigen Wert hat, also durch die Vierpolkonstanten eindeutig festgelegt ist. Es haftet ihr der Nachteil an, dass sie im allgemeinen nicht mit den praktisch gemessenen Übertragungswerten in einer bestimmten Schaltung übereinstimmt. Aus diesem Grunde hat man das Betriebsübertragungsmass eingeführt, das viel allgemeiner ist und für beliebige Quellen- und Abschlusswiderstände dem wirklich vorhandenen Leistungsverhältnis entspricht; selbstverständlich muss für jeden einzelnen Fall Quellenwiderstand und Abschlusswiderstand angegeben werden. Wir möchten nun hier ein Übertragungsmass einführen, das der Koaxial- und Hohlleitertechnik besonders gut angepasst ist und das sich ganz in die Theorie der Wellenmatrizen einfügt. Es hat die gleiche Definition wie das Betriebsübertragungsmass, wobei zusätzlich festgelegt wird, dass der Quellenwiderstand gleich dem Bezugswiderstand Z_{01} des Einganges und die Last gleich dem Bezugswiderstand Z_{02} des Ausganges sein soll. Der Ausgang ist also reflexionsfrei ($p_2 = 0$) abgeschlossen. Damit trägt man dem Umstand Rechnung, dass die Wellenmatrizen eigentlich auch Betriebsmatrizen sind, mit denen man genau jene Grösse erfasst, die im praktischen Falle bei der Leitungstechnik an diesen Elementen gemessen werden. Das so definierte *normierte Übertragungsmass* wird also gemessen als das Verhältnis der maximalen Leistung, die eine Quelle mit dem inneren Widerstand Z_{01} nach aussen abgeben kann, zu der Leistung, die sie über den Vierpol an den Widerstand Z_{02} abgeben kann. Das Leistungsverhältnis wird in einem logarithmischen Maßstabe ausgedrückt und die Widerstände Z_{01} und Z_{02} sind die Bezugswiderstände des Vierpoles. Falls $Z_{01} = Z_{02}$, so ist die *normierte Dämpfung* (der Realanteil des normierten Übertragungsmasses) gleich der Einfügungsdämpfung, wenn diese ebenfalls auf Z_{01} bezogen wird. Wir sehen hier erneut, welch wichtige Rolle die Bezugswiderstände (meistens *der* Bezugswiderstand) eines Systemes in der Leitungstechnik spielen. Dies kommt daher, dass man im allgemeinen bei dieser Technik bestrebt ist, jedes Schaltelement möglichst gut an den nominellen Bezugswiderstand anzupassen und seltener etwa an den wirklichen Eingangswiderstand des darauffolgenden Elementes; die Gründe dazu sind erstens messtechnischer, zweitens fabrikatorischer Art, da ja oft bei der Fabrikation von Einzelteilen nicht bekannt ist, in welchem Zusammenhang das betreffende Element später verwendet wird. So sind zum Beispiel handelsübliche koaxiale Dämpfungen selten reflexionslos, das heisst, ihr Wellenwiderstand weicht vom Bezugswiderstand, der beispielsweise mit 50 Ohm angegeben wird, mehr oder weniger ab. Die angegebene Dämpfung ist jedoch die *normierte*, das heisst, jene, die man mit Messinstrumenten misst, deren Wellenwiderstand genau gleich dem Bezugswiderstand ist.

Zwischen dem normierten Übertragungsmass $(\alpha_N + j\beta_N)$ und den Matrixelementen bestehen folgende Beziehungen (vorwärts):

$$e^{(\alpha_{1N} + j\beta_{1N})} = \frac{1}{2}\left(a_{11}\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + a_{12}\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} + a_{21}\sqrt{Z_{01}Z_{02}} + a_{22}\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\right) = t_{22} = 1/s_{21}$$

$$= \frac{1}{2z_{21}}\left(z_{11}\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} + \sqrt{Z_{01}Z_{02}} - \frac{\det \mathbf{Z}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} - \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\right) \tag{45}$$

und rückwärts:

$$e^{(\alpha_{2N} + j\beta_{2N})} = t_{22}/\det \mathbf{T} = 1/s_{12} = e^{(\alpha_{1N} + j\beta_{1N})}/\det \mathbf{A} \tag{46}$$

Legende zu den Tabellen II und III:

1) Negative Laufzeiten sind natürlich nicht möglich, deshalb sind die hier angegebenen Elementarvierpole in der physikalischen Realisierung immer noch mit einem reziproken Phasenschieber (einem Leitungsstück mit Z_0) in Kette geschaltet.

2) Feldtkeller und Normenmacher [6] verwenden für den Gyrator das sehr prägnante Symbol nach Fig. A, das wir nur im Interesse einer allgemeinen, einheitlichen Symbolisierung der nichtreziproken Vierpole nicht übernommen haben;

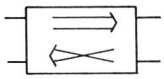

Fig. A

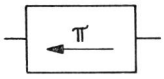

Fig. B

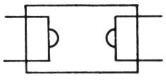

Fig. C

Hogan [12] benützt das Symbol nach Fig. B. Die Darstellung nach Fig. C stammt von Tellegen [11], sie hat den Nachteil, dass die Nichtumkehrbarkeit nicht zum Ausdruck kommt.

3) Z_1 = Eingangsimpedanz Z_2 = Lastimpedanz

4) $\alpha > 0$ bedeutet hier Dämpfung, $\alpha < 0$ Verstärkung.

5) $\ddot{u} = t + \sqrt{t^2 - 1}$ Reflexion $r = \sqrt{t^2 - 1}/t$ $t = 1/\sqrt{1 - r^2}$

6) $r = \sqrt{t^2 - 1}/t$ = reell

7) Reflexion = $jr = j\sqrt{t^2 - 1}/t$ = imaginär (reaktiv)

8) Die Reflexion r wurde hier reell angenommen. Ist sie komplex, so handelt es sich um einen Vierpol mit 2 Freiheitsgraden; die Matrizen sind in diesem Falle dieselben.

9) $r = Z_0/(2R + Z_0)$ $t = Z_0/2R$ $S = \begin{Vmatrix} -r & (1-r)/2 \\ (1-r)/2 & -r \end{Vmatrix}$

Auffallend sind vor allem die einfachen Beziehungen, die sich zu den Elementen der Wellenmatrizen ergeben.

Vierpole mit imaginärem Übertragungsmass haben wir im letzten Kapitel behandelt. Hier wollen wir uns solchen mit reellem Übertragungsmass zuwenden, also den Dämpfungsgliedern und Verstärkern. Allgemeine Dämpfungsglieder und Verstärker werden natürlich immer auch einen Phasengang haben; man kann aber für die Berechnung immer einen Vierpol abspalten, der nur die Phasenbeziehungen enthält.

Der bekannteste Vierpol mit reellem Übertragungsmass ist das gewöhnliche angepasste Dämpfungsglied mit $U_1/U_2 = p_1/q_2 = a = e^{\alpha}$. Seine Matrizen schreiben sich:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \cosh\alpha & Z_0 \sinh\alpha \\ \sinh\alpha/Z_0 & \cosh\alpha \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} (a+1/a) & Z_0(a-1/a) \\ (a-1/a)/Z_0 & (a+1/a) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{Z_0}{a-1/a}\begin{Vmatrix} (a+1/a) & -2 \\ 2 & (a+1/a) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} \qquad (47)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 0 & 1/a \\ 1/a & 0 \end{Vmatrix}$$

Falls $a \gtrless 1$ ist, handelt es sich um ein passives Dämpfungsglied, ist $a < 1$, so liegt ein aktiver Vierpol vor, der in beiden Richtungen verstärkt. Beim Betrachten der Matrizen fällt einem sofort die Analogie zum Übertrager auf, wobei formal die Rollen der **A**- und **Z**-Matrizen mit den Wellenmatrizen vertauscht sind. Entsprechend kann man auch diesen Vierpol als Wandler betrachten, und zwar als reziproken Reflexionswandler oder Leistungswandler. Die Reflexion einer Last wird durch Kettenschaltung eines Dämpfungsgliedes um a^2 geändert. Neben den Vorteilen eines beidrichtigen Verstärkers ist durch diese Betrachtungsweise auch ein Nachteil ersichtlich: störende Reflexionen werden vergrössert.

Einen weiteren Vierpol mit phasenfreiem Übertragungsmass haben wir im letzten Abschnitt kennen gelernt, den *impedanz- und reflexionstreuen* Leistungswandler. Seine Matrizen waren:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{Vmatrix} \quad (a = e^{\alpha})$$

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{Vmatrix} \qquad (48)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 0 & 1/a \\ a & 0 \end{Vmatrix}$$

Dieser Vierpol ist areziprok, er wirkt in der einen Richtung als Verstärker (vorwärts, wenn $a > 1$) und in der andern als Dämpfungsglied. Die Kettenschaltung eines reziproken und eines impedanztreuen Wandlers ergibt einen allgemeinen dämpfungsunsymmetrischen Vierpol.

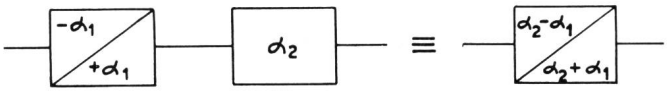

Fig. 13. Zerlegung des allgemeinen dämpfungsunsymmetrischen Vierpols

Ist dabei $\alpha_2 \geqq \alpha_1 \geqq 0$, so ist der Vierpol passiv und wir nennen ihn *Richtdämpfung* oder, in der Leitungstechnik, *Richtleitung*. Im Idealfall wäre dabei $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$; $\alpha_2 + \alpha_1 = \infty$, das heisst, die ideale Richtleitung ist verlustlos für die eine Durchlassrichtung und dämpft vollständig für die andere Richtung; sie hat demnach folgende Matrizen:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & Z_0 \\ 1/Z_0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = Z_0\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{Z}} = Z_0\begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (49)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Der so definierte Vierpol ist eine sogenannte *absorbierende* Richtleitung, in der die rückwärts in den Vierpol fliessende Leistung vollständig oder teilweise absorbiert wird. Daneben gibt es auch eine *reflektierende* Richtleitung, bei der die Leistung in einer Richtung durchgelassen, in der andern reflektiert wird. Diese letztere kann durch folgende Matrizen[10] dargestellt werden:

$$\mathbf{A} = e^{j\varphi/2}\begin{Vmatrix} \sinh(\varphi/2) & Z_0\cosh(\varphi/2) \\ (1/Z_0)\sin(\varphi/2) & \cosh(\varphi/2) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -e^{j\varphi} & 1 \end{Vmatrix} \qquad (50)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{Vmatrix} e^{j\varphi} & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ein solcher Vierpol ist, wie wir schon im 3. Abschnitt gesehen haben, aktiv. Es ist hingegen möglich, passive Vierpole zu realisieren, die eine gewisse Näherung zur idealen reflektierenden Richtleitung darstellen, indem sie in einer Richtung die Energie teilweise durchlassen, während sie in der andern Richtung teilweise reflektieren, teilweise absorbieren. Die in diesem Sinne optimale passive reflektierende Richtleitung lässt in einer Richtung die Hälfte der Leistung durch, während sie in umgekehrter Richtung die Hälfte reflektiert. Der Rest der beiden einfallenden

Leistungen wird absorbiert. Die Vierpolmatrizen[10] sind also:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -e^{j\varphi} & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{j\varphi} \end{Vmatrix} \tag{51}$$

Etwas allgemeinere passive, teilweise reflektierende Richtleitungen erhält man, wenn man beachtet, dass für Passivität

$$|s_{21}|^2 + |s_{22}|^2 \leq 1 \tag{52}$$

sein muss, falls man $s_{11} = s_{12} = 0$ annimmt.

Ähnlicher Art wie die Richtleitungen sind die gewöhnlichen Verstärker, einzig dass die Leistung in Durchlassrichtung nicht gleich bleibt oder abnimmt, sondern vergrössert wird. Die Matrizen eines beidseitig angepassten idealen Verstärkers sind:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 1/v & Z_0/v \\ 1/Z_0 v & 1/v \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{Z} = Z_0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ v & -1 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/v \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{Vmatrix} \tag{53}$$

mit v^2 = Leistungsverstärkung = $P_{\text{aus}}/P_{\text{ein}}$

Man erkennt aus der Ähnlichkeit mit den Richtleitungen auch, warum letztere so wichtig sind: sie ersetzen in vielen Fällen einen Verstärker, besonders da, wo die Aufgabe des Verstärkers nicht in erster Linie die Leistungsverstärkung, sondern die Trennung ist, also zum Beispiel das Verhindern von Rückwirkungen aus einem vielleicht unstabilen Teil einer Schaltung in einen lastempfindlichen Teil. Eine solche Trennung wird oft durch reziproke Dämpfungsglieder erreicht. Mit Richtleitungen erspart man in diesem Falle Leistungsverluste und dabei unter Umständen Verstärker. In Frequenzgebieten, wo zur Realisierung einer passiven Richtleitung aktive Elemente notwendig sind, fallen diese Vorteile natürlich dahin.

Wenn wir von Verstärkern sprechen, so müssen wir auch allgemein etwas über die Quellen sagen. In der klassischen Netzwerktheorie unterscheidet man Strom- und Spannungsquellen. Diese Unterscheidung ist in der Leitungstechnik nicht sehr zweckmässig und wir arbeiten hier besser mit dem Begriffe der *Leistungsquellen*. Eine ideale Spannungsquelle stellt impedanzmässig einen Kurzschluss dar, das heisst, ein der Spannungsquelle von aussen aufgedrückter Strom erzeugt in der Quelle keinen Spannungsabfall. Sinngemäss definieren wir eine ideale Leistungsquelle so, dass eine in die Quelle laufende Welle nicht reflektiert wird, sie muss deshalb eine innere Impedanz gleich dem normierten Wellenwiderstand haben. Im praktischen Falle haben Strom- und Spannungsquellen immer einen inneren Widerstand, dank dem zu jeder Stromquelle eine äquivalente Spannungsquelle und umgekehrt gefunden werden kann. Im Frequenzbereich der Leitungstechnik sind die idealisierten Bedingungen von Strom- und Spannungsquelle ohnehin fast immer schlecht erfüllt, so dass es eine Vereinfachung bedeutet, hier mit einem einzigen Quellentyp zu arbeiten. Quellen sind Zweipole und können mit nachfolgenden Symbolen dargestellt werden.

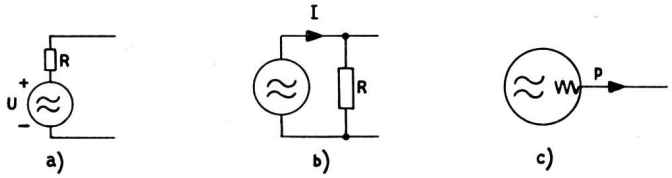

Fig. 14. Symbole für Strom- und Spannungsquellen
a) Spannungsquelle
b) Stromquelle in konventioneller Darstellung
c) Leistungsquelle in Wellendarstellung

Da es immerhin auch vorkommen kann, dass Leistungsquellen, von aussen gesehen, mit guter Näherung einen Kurzschluss oder eine offene Leitung darstellen, ist es angebracht, diese Eigenschaft im Schaltsymbol ausdrücken zu können. Den idealen Strom- und Spannungsquellen entsprechen dann folgende Darstellungen für die Leistungsquelle:

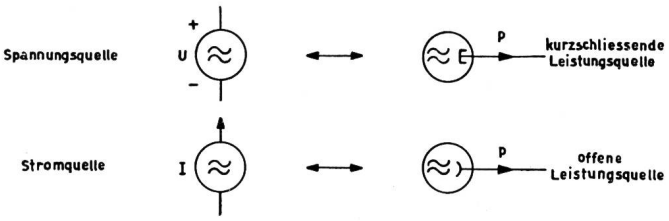

Fig. 15. Spannungs- und Stromquelle und ihre Äquivalente in der Wellendarstellung

Wichtiger als diese Zweipole sind in der Vierpoltheorie die *gesteuerten* Quellen. Auch hier kennt man wieder die Unterscheidung in spannungsgesteuert und stromgesteuert. Wellenmässig ausgedrückt heisst dies, dass die Steuerwelle total reflektiert wird; im ersten Falle mit $r = 1$, im zweiten mit $r = -1$. In der Leitungstechnik besteht kein Grund, zwischen diesen Steuerarten einen Wesensunterschied zu machen, da der Reflexionsfaktor durch Verschieben der Bezugsebene beliebig gedreht werden kann. Die leistungslose Steuerung ist in der Leitungstechnik indessen kaum zu verwirklichen, es scheint daher zweckmässiger, eine reflexionslose Steuerung als Grundtyp anzusehen. Einer teilweisen Reflexion kann dann zum Beispiel durch Kettenschaltung eines idealen Übertragers Rechnung getragen werden. Aus der gesteuerten Quelle wird damit ein einrichtig wirkender, angepasster Verstärker mit den Matrizen nach (53). Als graphisches Symbol ergibt sich dafür sinngemäss Figur 16 a; nach Figur 16 b und c könnten gegebenenfalls Quellenvierpole dargestellt werden, die auf der Steuerseite nahezu vollständig reflektieren. Für die

[10] Bei diesen Matrizen sind die Phasenbeziehungen schon so weit vereinfacht, als sich dies durch Abspalten eines reinen reziproken Phasengliedes machen lässt, und zwar so, dass die durchtretende Welle phasenfrei ist.

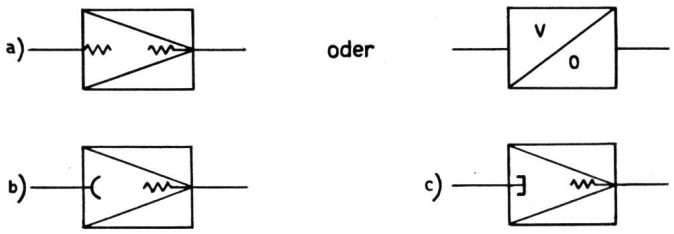

Fig. 16. Symbole für auf der Ausgangsseite angepasste Verstärker
a) einrichtiger angepasster Verstärker
b) } leistungslos (spannungs- bzw. strom-)
c) } gesteuerte Quellen oder Verstärker

Analyse kann ein praktischer, mit Anpassungsfehlern behafteter einrichtiger Verstärker in eine Kettenschaltung aus idealem Quellenvierpol mit Ein- und Ausgangsübertrager und zwei Phasengliedern zerlegt werden, wie in Figur 17 und Matrixzerlegung (54) gezeigt[11]:

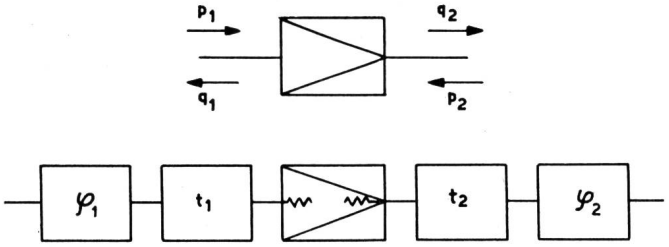

Fig. 17. Zerlegung des allgemeinen Verstärkers

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} abc & ab/c \\ ac/b & a/bc \end{Vmatrix} = \tag{54}$$

$$\frac{1}{|v|\, e^{j\varphi}} \begin{Vmatrix} e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)}\sqrt{t_1^2-1}\sqrt{t_2^2-1}\,; & e^{-j(\varphi_1-\varphi_2)}\sqrt{t_1^2-1}\cdot t_2 \\ e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} t_1 \sqrt{t_2^2-1}\,; & e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\, t_1\, t_2 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} e^{-j\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} t_1\sqrt{t_1^2-1} \\ \sqrt{t_1^2-1}\; t_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/v \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} t_2\sqrt{t_2^2-1} \\ \sqrt{t_2^2-1}\; t_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{-j\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi_2} \end{Vmatrix}$$

In der ersten Matrix ist zum Ausdruck gebracht, dass es sich um eine spezielle Matrix mit 6 Freiheitsgraden handelt (a, b, c sind komplex, ebenso v, dagegen sind t_1, t_2, φ_1, φ_2 skalar), wobei hier det $\mathbf{T} = 0$ ist. An Stelle der Übertrager hätte man bei der Zerlegung auch Blenden (symmetrische Reflektoren) oder einseitige Reflektoren verwenden können. Dieser Fall (54) gibt genau den praktischen Fall zum Beispiel eines Klystronverstärkers wieder: Die mittlere Matrix entspricht den eigentlichen Verstärkereigenschaften, die anschliessenden Übertrager der Ein- und Auskopplung, und die Phasenglieder ergeben sich je nach Bezugsebene für Ein- und Ausgang, sie sagen im übrigen nichts Wesentliches aus über den Verstärker.

[11] Der Übertrager als reflektierender Vierpol wird in Kapitel 7 behandelt.

7. Synthese allgemeiner Vierpole

Nachdem wir nun die dämpfenden Vierpole betrachtet haben, fällt es uns leicht, eine wichtige Gruppe von Vierpolen, nämlich alle beidseitig angepassten, aus einer Kettenschaltung von Elementarvierpolen zusammenzusetzen. Weil bei den angepassten Vierpolen die beiden komplexen Reflexionen q_1 und q_2 Null sind, kann man sofort folgern, dass die ursprünglich 8 Freiheitsgrade des allgemeinen Vierpols sich hier auf 4 reduzieren müssen. Als Bestimmungsgrössen eines beidseitig angepassten Vierpoles kann man zum Beispiel folgende Eigenschaften wählen:

1. symmetrische (beidrichtig gleiche) Dämpfung (oder Verstärkung).
2. asymmetrische (vor- und rückwärts entgegengesetzt gleiche) Dämpfung.
3. symmetrisches Phasenmass.
4. asymmetrisches Phasenmass.

Für jede dieser Eigenschaften haben wir einen bilateral angepassten Vierpol gefunden, die alle unter sich kommutativ sind und daher in beliebiger Reihenfolge in Kette geschaltet werden können. Diese Synthese ist in Figur 18 und in der Matrizengleichung (55) dargestellt.

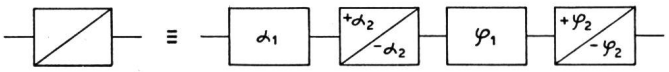

Fig. 18. Zerlegung des allgemeinen, beidseitig angepassten Vierpols

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)-j(\varphi_1+\varphi_2)} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha_1-\alpha_2)+j(\varphi_1-\varphi_2)} \end{Vmatrix} = \tag{55}$$

$$\begin{Vmatrix} e^{-\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{-\alpha_2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{-\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{\varphi_1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{-\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{-\varphi_2} \end{Vmatrix}$$

In dieser Zerlegung, neben der natürlich viele andere möglich sind, treten die wesentlichen reell reziproken, komplex reziproken und areziproken Eigenschaften besonders gut in Erscheinung. Es ist auch leicht zu übersehen, was beispielsweise mit einer Reflexion (oder Impedanz) geschieht, wenn sie nach Zwischenschaltung dieses Vierpoles gemessen wird: Die ersten beiden Teil-Vierpole sind phasenfrei. (α_1) ist ein reeller Wandler für die Reflexion (s. Abschnitt 6), während der zweite reflexionstreu ist. Das reziproke Phasenglied (φ_1) dreht die Phase der Reflexion um 2 φ_1, während der letzte Vierpol, der Richtphasenschieber, wieder reflexionstreu ist.

Zum allgemeinsten Vierpol fehlen uns bei der Synthese nach Figur 18 und (55) noch die Reflexionseigenschaften auf den beiden Seiten. Wir wollen daher zunächst noch einige Vierpole betrachten, die Reflexionen erzeugen und die reell reziprok sind. Schon früher sind wir auf den gewöhnlichen Übertrager gestossen, der folgende Matrizendarstellung hat:

Tabelle IV. Vierpole mit zwei Freiheitsgraden

Bezeichnung	Matrizen A	Matrizen T	Zerlegungsmöglichkeiten	Symbol
Impedanz-und reflexions-treuer Vierpol	$\begin{Vmatrix} e^{-(\alpha+j\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha+j\varphi)} \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} e^{-(\alpha+j\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha+j\varphi)} \end{Vmatrix}$	$+\varphi$ / $-\varphi$ — $+\alpha$ / $-\alpha$	$\alpha+j\varphi$ / $-\alpha-j\varphi$
Allgemeiner Phasenschieber	$e^{-j\varphi_2}\begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 & jZ_0\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1/jZ_0 & \cos\varphi_1 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)} & 0 \\ 0 & e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \end{Vmatrix}$	φ_1 — $+\varphi_2$ / $-\varphi_2$	$\varphi_1+\varphi_2$ / $\varphi_1-\varphi_2$
Allgemeine Richtleitung	$e^{-\alpha_2}\begin{Vmatrix} \cosh\alpha_1 & Z_0\sinh\alpha_1 \\ \frac{\sinh\alpha_1}{Z_0} & \cosh\alpha_1 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha_1-\alpha_2)} \end{Vmatrix}$	α_1 — $+\alpha_2$ / $-\alpha_2$	$\alpha_1+\alpha_2$ / $\alpha_1-\alpha_2$
Idealer Konverter	$e^{j\varphi}\begin{Vmatrix} e^{j\psi} & 0 \\ 0 & e^{-j\psi} \end{Vmatrix}$	$e^{j\varphi}\begin{Vmatrix} \cos\psi & j\sin\psi \\ j\sin\psi & \cos\psi \end{Vmatrix}$	$Z_1=e^{2j\psi}Z_2$ — $+\varphi$ / $-\varphi$	$Z_1=e^{2j\psi}Z_2$
Idealer Inverter	$e^{j\varepsilon}\begin{Vmatrix} 0 & Z_0e^{j\eta} \\ e^{-j\eta}/Z_0 & 0 \end{Vmatrix}$	$e^{j\varepsilon}\begin{Vmatrix} -\cos\eta & j\sin\eta \\ -j\sin\eta & \cos\eta \end{Vmatrix}$	$Z_1=e^{2j\eta}Z_2$ — = / × — $+\varepsilon$ / $-\varepsilon$	$Z_1=e^{2j\eta}Z_2$

$$\mathbf{A}_{\ddot{u}} = \begin{Vmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{Vmatrix} \tag{56}$$

$$\mathbf{T}_{\ddot{u}} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} (\ddot{u}+1/\ddot{u}) & (\ddot{u}-1/\ddot{u}) \\ (\ddot{u}-1/\ddot{u}) & (\ddot{u}+1/\ddot{u}) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t; & \sqrt{t^2-1} \\ \sqrt{t_2-1}; & t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cosh\tau & \sinh\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{\ddot{u}} = \frac{1}{\ddot{u}+1/\ddot{u}}\begin{Vmatrix} (\ddot{u}-1/\ddot{u}); & 2 \\ 2; & -(\ddot{u}-1/\ddot{u}) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} s; & \sqrt{1-s^2} \\ \sqrt{1-s^2}; & -s \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sin\sigma & \cos\sigma \\ \cos\sigma & -\sin\sigma \end{Vmatrix}$$

wobei

$$\ddot{u} = t + \sqrt{t^2-1} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}; \quad |t| > 1 \quad |s| < 1$$

$$t^2(1-s^2) = 1$$

Im Sonderfall des angepassten Übertragers werden die Wellenmatrizen, wie schon aus den Beispielen im Kapitel 2 hervorgeht, trivial:

$$\mathbf{T}_{\ddot{u}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{S}_{\ddot{u}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Dies rührt davon her, dass wir bei den Wellenmatrizen die Anpassung zum Prinzip erklärt haben und dass damit ein Übertrager bei der Verbindung verschiedener Leitungen als selbstverständlich betrachtet wird. Er trägt ja auch nichts bei zu den Eigenschaften des ganzen Systems, erst beim Fehlen des Übertragers wird man auf die Verbindungsstelle der zwei Leitungssysteme aufmerksam. Hingegen ist der nicht angepasste Übertrager ein wichtiges Element der Leitungstechnik, und zwar realisiert man gewöhnlich nicht, dass es sich um das Äquivalent eines Übertragers handelt, sondern man bezeichnet einen solchen Vierpol meist als asymmetrische Stufe oder Sprungstelle. Wir könnten ihn hier auch *antisymmetrischen Reflektor* nennen. Die Figuren 4 b und 4 d sind Beispiele von solchen Stufen in Hohlleitern. Die Kopplung durch eine solche Sprungstelle ist durch t, die Reflexion durch s bestimmt; die letztere ist, gesehen von der einen Seite, entgegengesetzt gleich jener gesehen auf der andern Seite.

Ein weiterer, wichtiger, ebenfalls verlustloser, reell reziproker Vierpol ist der symmetrische Reflektor. Die Sprungstelle war bezüglich Reflexion antisymmetrisch, dieser Reflektor ist symmetrisch. Beispiele solcher Vierpole in der Leitungstechnik sind Blenden, Zentrierscheiben und unkompensierte (impedanzkonstante) Sprünge, wie Figur 19 zeigt.

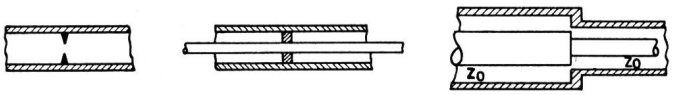

Fig. 19. Beispiele von symmetrischen Reflektoren

Die entsprechenden Matrizen sind:

$$\mathbf{A}_r = \begin{Vmatrix} t & jZ_0\sqrt{t^2-1} \\ \sqrt{t^2-1}/jZ_0 & t \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{Vmatrix} t & j\sqrt{t^2-1} \\ -j\sqrt{t^2-1} & t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cosh\tau & j\sinh\tau \\ -j\sinh\tau & \cosh\tau \end{Vmatrix} (|t| > 1) \tag{57}$$

$$\mathbf{S}_r = \begin{Vmatrix} js & \sqrt{1-s^2} \\ \sqrt{1-s^2} & js \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sinh\sigma & \cos\sigma \\ \cos\sigma & \sinh\sigma \end{Vmatrix} (|s| < 1)$$

In diesen beiden Beispielen seien s und t reelle Grössen. Es handelt sich in beiden Fällen um Vierpole mit einem einzigen Freiheitsgrad, das heisst, ein einziger Wert beschreibt den Vierpol vollständig.

Ein weiterer passiver, reell reziproker Vierpol ist der *einseitige passive Reflektor:* Sein Übertragungsmass ist in beiden Richtungen dasselbe (< 1), jedoch reflektiert er nach der einen Seite, während er – Anpassung vorausgesetzt – nach der andern Seite keine Reflexion hat; er ist also ein Beispiel eines unilateral angepassten Vierpoles. Der optimale Fall – grösste einseitige Reflexion bei geringster Durchlassdämpfung – hat folgende Matrixdarstellung:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} \sqrt{1-|r|} & r/\sqrt{1-|r|} \\ 0 & 1/\sqrt{1-|r|} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} r & \sqrt{1-|r|} \\ \sqrt{1-|r|} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (58)$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{1-|r|} & Z_0 r/\sqrt{1-|r|} \\ 0 & \sqrt{1-|r|} \end{Vmatrix}$$

Eine mögliche Realisierung durch Richtkoppler ist in Figur 20 angegeben ($p_3 = \sqrt{r}\ p_1$):

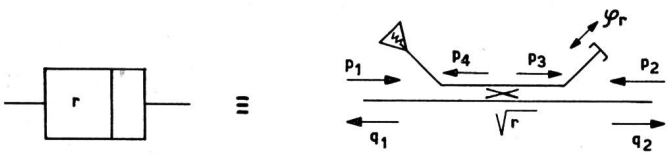

Fig. 20. Mögliche Realisierung eines einseitigen passiven Reflektors

Ein Vierpol mit einseitiger Reflexion aber ohne Durchlassdämpfung könnte realisiert werden durch Kettenschaltung des eben besprochenen mit einem beidrichtigen Verstärker.

Beim Vierpol nach Figur 20 kann die Phase des Reflexionsfaktors durch Verschieben des Kurzschlusses im 3. Kopplerzweig verändert werden. Man kann die Reflexionsvierpole aber auch so definieren, dass der Reflexionsfaktor reell ist. Ein in Kette geschaltetes Phasenglied kann der Reflexion eine beliebige Phase erteilen, wobei natürlich auch die Phase des Übertragungsfaktors beeinflusst wird.

Nun haben wir alle Elemente zur Hand, um den allgemeinsten Vierpol mit 8 Freiheitsgraden aus einer Kettenschaltung von 8 Vierpolen mit je einem einzigen Freiheitsgrad zu erzeugen. Ein Beispiel einer derartigen Synthese gibt die Figur 21:

Fassen wir je zwei dieser Vierpole zusammen, so ergibt sich die Synthese nach Figur 22:

Anstatt die Vierpole 3 und 4, 5 und 6 aus Figur 21 zusammenzufassen, kann man auch 4 und 5, 3 und 6 kombinieren. Dann enthält der Vierpol (4 # 5) alle nicht reziproken Eigenschaften des Gesamtvierpoles. Da (4 # 5) ausserdem mit jedem Vierpol kommutativ ist, (die Matrix ist ein skalarer Faktor) oder, anders ausgedrückt, weil er impedanztreu ist, kann dieser Vierpol an beliebiger Stelle, also auch am Ende der Kette eingeschaltet werden. So entsteht die Zerlegung in einen reziproken und einen nichtreziproken Vierpol [5].

Ersetzen wir in der Zerlegung nach Figur 21 die Teile 2 und 7 zum Beispiel durch symmetrische Reflektoren, so sind, ausser dem Vierpol (3 # 4), alle Teile verlustlos. Da diese beiden Vierpole in der Zerlegung auch an ein Ende der Kette gelegt werden können (wobei sich dann natürlich andere Werte ergeben für die Vierpole, da 3 nicht allgemein kommutativ ist), so hat man damit eine Zerlegung in einen verlustlosen Teil und einen Vierpol, der Leistung aufnimmt oder abgibt.

Der allgemeine Vierpol kann natürlich auf manche andere Art zerlegt werden, indem man geeignete spezielle Vierpole, von denen wir im Verlaufe dieser Diskussion eine grosse Zahl kennengelernt haben, in Kette schaltet. Parallel- und Serieschaltungen und Kombinationen aller drei Zusammenschaltarten geben weitere Synthesemöglichkeiten, die in der Literatur, besonders für Vierpole mit konzentrierten Elementen, schon weitgehend analysiert wurden. Hier ging es darum, jene Vierpole aufzuzeigen, die sich für die

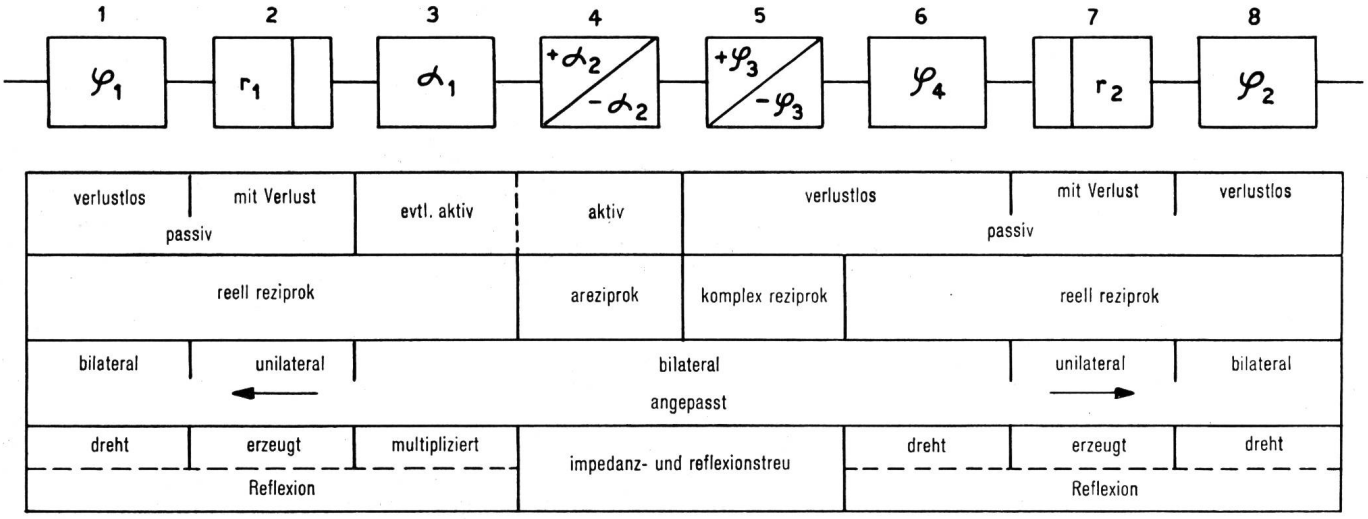

Fig. 21. Synthese des allgemeinsten Vierpols durch eine Kette von acht elementaren Vierpolen mit einem einzigen Freiheitsgrad

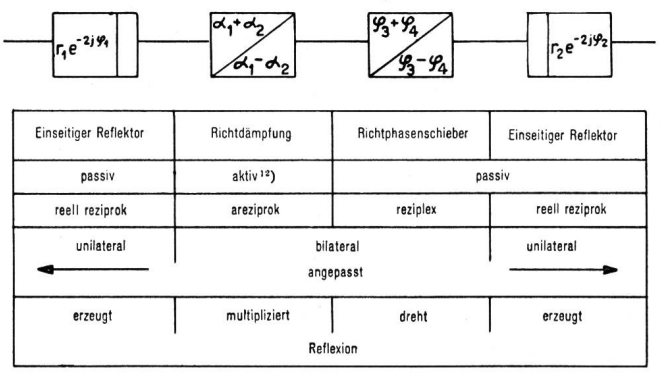

Fig. 22. Synthese des allgemeinsten Vierpols aus vier Vierpolen mit zwei Freiheitsgraden

wellenmässige Betrachtung und für die Synthese von Vierpolen der Leitungstechnik speziell gut eignen. Je nach der Art des zu behandelnden Problemes wird man diese oder jene Elementarvierpole für die Synthese bevorzugen.

Zum Schlusse muss noch auf einen wichtigen Punkt hingewiesen werden. Alle die Koeffizienten, die wir als Matrixelemente zur Charakterisierung eines Vierpoles benützt haben, können natürlich Funktionen der Frequenz sein. Im allgemeinen wird ja einem Vierpol bei Änderung der Frequenz ein bestimmtes Verhalten vorgeschrieben. So können sich natürlich seine Eigenschaften, wie Reziprozität, Passivität, Anpassung usw., in Funktion der Frequenz ändern. In der Breitbandtechnik strebt man an, die Eigenschaften möglichst konstant zu halten, während die Filtertechnik scharfe Änderungen verlangt. Einzelne Vierpole eignen sich naturgemäss besser für diese, andere für jene Frequenzanforderungen. Eine grosse Rolle spielt in diesem Zusammenhang auch das Problem der Stabilität, das mit der Frequenzabhängigkeit der Matrixelemente zusammenhängt. Es würde jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, auf diese Aspekte näher einzutreten.

Schlusswort

Für wertvolle Anregungen und für die kritische Durchsicht des Manuskriptes möchte ich den Herren Prof. Dr. *F. Tank* und Prof. *E. Baumann* herzlich danken.

ANHANG 1

Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Matrizen

Die Beziehungen zwischen den klassischen Matrizen finden sich in [1] und [10]. Aus den Gleichungen (5) und (6) ergeben sich für **T**- und **S**-Matrix (Wellenmatrizen):

$$\mathbf{T} = \frac{1}{s_{21}} \begin{Vmatrix} -\det \mathbf{S} & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{Vmatrix} \tag{59}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{t_{22}} \begin{Vmatrix} t_{12} & \det \mathbf{T} \\ 1 & -t_{21} \end{Vmatrix} \tag{60}$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \begin{Vmatrix} t_{11} & -t_{21} \\ -t_{12} & t_{22} \end{Vmatrix} \tag{61}$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{Vmatrix} s_{22} & s_{21} \\ s_{12} & s_{11} \end{Vmatrix} \tag{62}$$

($\tilde{\mathbf{S}}$ und $\tilde{\mathbf{T}}$ sind die Matrizen der umgekehrten Vierpole.)

Will man den Zusammenhang zwischen den klassischen und den Wellenmatrizen finden, so muss man zunächst jeder Seite des Vierpoles einen Bezugswiderstand zuordnen. Das Gleichungssystem (12) liefert dann den Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen einerseits und normierten Wellenamplituden anderseits. Verwenden wir zudem (5) für die **S**-Matrix und (3) für die **A**-Matrix, so können wir diese Gleichungen nach den Elementen der **S**-Matrix auflösen.

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{a'_{11} + a'_{12} - a'_{21} - a'_{22}}{a'_{11} + a'_{12} + a'_{21} + a'_{22}} \\ s_{12} &= \frac{2 \det \mathbf{A}}{a'_{11} + a'_{12} + a'_{21} + a'_{22}} \\ s_{21} &= \frac{2}{a'_{11} + a'_{12} + a'_{21} + a'_{22}} \\ s_{22} &= \frac{-a'_{11} + a'_{12} - a'_{21} + a'_{22}}{a'_{11} + a'_{12} + a'_{21} + a'_{22}} \end{aligned} \tag{63}$$

wobei

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} \\ a'_{12} &= a_{12} / \sqrt{Z_{01}\, Z_{02}} \\ a'_{21} &= a_{21} \sqrt{Z_{01}\, Z_{02}} \\ a'_{22} &= a_{22} \sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \end{aligned} \tag{64}$$

Z_{01}, Z_{02} = Bezugswiderstände

Löst man umgekehrt nach den Elementen der **A**-Matrix auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \frac{1 - s_{11} \det \mathbf{S} - s_{22} - s_{11}^2 + s_{21}\, s_{12}}{2\, s_{21}\, (1 - s_{11})} \\ a'_{12} &= \frac{1 - s_{11} \det \mathbf{S} + s_{22} - s_{11}^2 - s_{12}\, s_{21}}{2\, s_{21}\, (1 - s_{11})} \\ a'_{21} &= \frac{1 + \det \mathbf{S} - s_{11} - s_{22}}{2\, s_{21}} \\ a'_{22} &= \frac{-1 + \det \mathbf{S} + s_{11} - s_{22}}{2\, s_{21}} \end{aligned} \tag{65}$$

Analog ergeben sich aus (3) (6) und (12) die Beziehungen zwischen **A**- und **T**-Matrix:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \tfrac{1}{2}\, (a'_{11} - a'_{12} - a'_{21} + a'_{22}) \\ t_{12} &= \tfrac{1}{2}\, (a'_{11} + a'_{12} - a'_{21} - a'_{22}) \\ t_{21} &= \tfrac{1}{2}\, (a'_{11} - a'_{12} + a'_{21} - a'_{22}) \\ t_{22} &= \tfrac{1}{2}\, (a'_{11} + a'_{12} + a'_{21} + a'_{22}) \end{aligned} \tag{66}$$

[12] Nur aktiv, wenn der Übertragungsfaktor in mindestens einer Richtung grösser als 1 ist.

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \tfrac{1}{2}\,(\ \ t_{11} + t_{12} + t_{21} + t_{22}) \\
a_{12} &= \tfrac{1}{2}\,(-t_{11} + t_{12} - t_{21} + t_{22}) \\
a_{21} &= \tfrac{1}{2}\,(-t_{11} - t_{12} + t_{21} + t_{22}) \\
a_{22} &= \tfrac{1}{2}\,(\ \ t_{11} - t_{12} - t_{21} + t_{22})
\end{aligned}
\tag{67}
$$

ANHANG 2

Kettenschaltung von Vierpolen in der Darstellung durch Streumatrizen

Gegeben seien zwei Vierpole mit den Streumatrizen S′ und S″, also den Gleichungspaaren:

$$
\begin{aligned}
q'_1 &= s'_{11}\,p'_1 + s'_{12}\,p'_2 \\
q'_2 &= s'_{21}\,p'_1 + s'_{22}\,p'_2
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$$
\begin{aligned}
q''_1 &= s''_{11}\,p''_1 + s''_{12}\,p''_2 \\
q''_2 &= s''_{21}\,p''_1 + s''_{22}\,p''_2
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Diese Vierpole seien in Kette geschaltet, also:

$$p''_1 = q'_2 \quad \text{und} \quad q''_1 = p'_2 \tag{70}$$

und gesucht sei die Streumatrix der Kombination:

$$
\begin{aligned}
q'_1 &= s_{11}\,p'_1 + s_{12}\,p''_2 \\
q''_2 &= s_{21}\,p'_1 + s_{22}\,p''_2
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Aus den Gleichungen (69) (70) und (71) müssen also die Grössen p_1'', q_2', q_1'', p_2' eliminiert werden. Durch Einsetzen von (70) und (71) in (69) erhält man:

$$
\begin{aligned}
q'_1 &= s'_{11}\,p'_1 + s'_{12}\,s''_{11}\,p'_1 + s'_{12}\,s''_{12}\,p''_2 \\
&= s'_{11}\,p'_1 + s'_{12}\,s''_{12}\,p''_2 + s'_{12}\,s''_{11}\,s'_{21}\,p'_1 \\
&\qquad + s'_{12}\,s''_{11}\,s'_{22}\,q'_1 \\
&= p'_1\,(s'_{11} + s'_{12}\,s'_{21}\,s''_{11} + s'_{12}\,s'_{21}\,s'_{22}\,s'^{\,2}_{11} + \ldots) \\
&\qquad + p''_2\,(s'_{12}\,s''_{12} + s'_{12}\,s''_{12}\,s'_{22}\,s''_{11} + \ldots) \\
&= p'_1\,[s'_{11} + s'_{21}\,s'_{12}\,s''_{11}\,{}_{n}\!\sum_{0}^{\infty}\,(s'_{22}\,s''_{11})^n] \\
&\qquad + p''_2\,[s'_{12}\,s''_{12}\,{}_{n}\!\sum_{0}^{\infty}\,(s'_{22}\,s''_{11})^n] \\
&= p'_1\left[s'_{11} + \frac{s'_{12}\,s'_{21}\,s''_{11}}{1 - s'_{22}\,s''_{11}}\right] + p''_2\,\frac{s'_{12}\,s''_{12}}{1 - s'_{22}\,s''_{11}}
\end{aligned}
$$

Die Mehrfachreflexionen bilden also eine konvergierende geometrische Reihe, deren Summe sich nach der bekannten Summenformel berechnen lässt. Analog ergibt sich für q''_2 der folgende Ausdruck:

$$q''_2 = p'_1\,\frac{s'_{21}\,s''_{21}}{1 - s'_{22}\,s''_{11}} + p''_2\left[s''_{22} + \frac{s''_{21}\,s''_{12}\,s'_{22}}{1 - s'_{22}\,s''_{11}}\right]$$

Somit wird die Streumatrix S der Kettenschaltung:

$$
\mathbf{S} = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{matrix} \right\| \# \left\| \begin{matrix} s''_{11} & s''_{12} \\ s''_{21} & s''_{22} \end{matrix} \right\| = \tag{72}
$$

$$
\frac{1}{1 - s'_{22}\,s''_{11}} \left\| \begin{matrix} (s'_{11} - s''_{11}\,\det \mathrm{S}') & s'_{12}\,s''_{12} \\ s'_{21}\,s''_{21} & (s''_{22} - s'_{22}\,\det \mathrm{S}'') \end{matrix} \right\|
$$

ANHANG 3

Einrichtige und beidrichtige Passivitätsbedingungen für A-Matrix und T-Matrix

Ausgangspunkt für die Ableitung sind die Gleichungen (15a) und (15b). Im allgemeinen, komplexen Fall ist

$$
\begin{aligned}
U &= V + \mathrm{j}\,W \\
I &= J + \mathrm{j}\,K \\
a_{ik} &= \alpha_{ik} + \mathrm{j}\,\beta_{ik}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Darin sind V, W, J, K, α, β reelle Grössen. Die Vierpolgleichungen in Kettenform lauten also

$$
\begin{aligned}
V_1 + \mathrm{j}W_1 &= (V_2 + \mathrm{j}W_2)\,(\alpha_{11} + \mathrm{j}\beta_{11}) + (J_2 + \mathrm{j}K_2)\,(\alpha_{12} + \mathrm{j}\beta_{12}) \\
J_1 + \mathrm{j}K_1 &= (V_2 + \mathrm{j}W_2)\,(\alpha_{21} + \mathrm{j}\beta_{21}) + (J_2 + \mathrm{j}K_2)\,(\alpha_{22} + \mathrm{j}\beta_{22})
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Nach Real- und Imaginärteil geordnet ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \alpha_{11}\,V_2 - \beta_{11}\,W_2 + \alpha_{12}\,J_2 - \beta_{12}\,K_2 \\
W_1 &= \beta_{11}\,V_2 + \alpha_{11}\,W_2 + \beta_{12}\,J_2 - \alpha_{12}\,K_2 \\
J_1 &= \alpha_{21}\,V_2 + \beta_{21}\,W_2 + \alpha_{22}\,J_2 - \beta_{22}\,K_2 \\
K_1 &= \beta_{21}\,V_2 + \alpha_{21}\,W_2 + \beta_{22}\,J_2 + \alpha_{22}\,K_2
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Die Wirkleistung ist das skalare Produkt der komplexen Grössen U und I, also

$$P_1 = V_1\,J_1 + W_1\,K_1 \tag{76}$$

(75) in (76) eingesetzt ergibt:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (V_2^2 + W_2^2)\,g + (J_2^2 + K_2^2)\,r + (V_2\,J_2 + W_2\,K_2)\,n \\
&\quad + (V_2\,K_2 + W_2\,J_2)\,m = |U_2|^2 g + |I_2|^2 r + N_2\,n + B_2\,m
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Dabei ist P_2 die Wirkleistung und B_2 die Blindleistung auf der Lastseite und:

$$
\begin{aligned}
g &= (\alpha_{11}\,\alpha_{21} + \beta_{11}\,\beta_{21}) = (a_{11}, a_{21}) \\
r &= (\alpha_{12}\,\alpha_{22} + \beta_{12}\,\beta_{22}) = (a_{12}, a_{22}) \\
n &= (\alpha_{11}\,\alpha_{22} + \beta_{11}\,\beta_{22} + \alpha_{12}\,\alpha_{21} + \beta_{12}\,\beta_{21}) \\
&\qquad = (a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \\
m &= (\alpha_{22}\,\beta_{11} - \alpha_{11}\,\beta_{22} - \alpha_{21}\,\beta_{12} + \beta_{21}\,\alpha_{12}) \\
&\qquad = (a_{22} \times a_{11}) + (a_{12} \times a_{21})
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Ein bei 1 gespeister Vierpol ist in Richtung $1 \rightarrow 2$ passiv, wenn $P_1 \geqq P_2$ ist für alle Lastimpedanzen Z_2 mit nicht negativem Realanteil R_2. Mit (77) schreibt sich diese Forderung:

$$(1 - n)\,P_2 \leqq |U_2|^2\,g + |I_2|^2\,r + B_2\,m \tag{79}$$

oder

$$(1 - n) \leqq R_2\,g + \frac{X_2^2}{R_2}\,g + \frac{r}{R_2} + \frac{X_2}{R_2}\,m \tag{80}$$

wenn wir durch $P_2 = I_2^2\,R_2$ dividieren und $B_2 = I_2^2\,X_2$ setzen. Die Ungleichung (80) muss bei einem vorwärts passiven Vierpol erfüllt sein für alle X_2 und für $R_2 \geqq 0$. Damit (80) für beliebige Werte von X_2 und sehr grosse und sehr kleine Werte von R_2 erfüllt sein kann, muss jedenfalls

$$g \geq 0 \tag{81}$$
$$r \geq 0 \tag{82}$$
$$m = 0 \tag{83}$$

sein.

Diese Bedingungen genügen aber noch nicht. Es muss nun bestimmt werden, welches der Minimalwert der rechten Seite von (80) ist, wenn R_2 die Werte $0 \rightarrow \infty$ durchläuft. Dazu leitet man nach R_2 ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,R_2}\left(R_2\,g + \frac{r}{R_2}\right) = g - \frac{r}{R_2^{\,2}}$$

[X_2 haben wir dabei gleich 0 gesetzt, da dies den ungünstigsten Fall darstellt für (80)]. Das Minimum der rechten Seite von (80) liegt somit an der Stelle

$$R_2 = \sqrt{r/g}$$

und (80) reduziert sich zu

$$(1 - n) \leq 2\sqrt{g\,r} \tag{84}$$

oder

$$(a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \geq 1 - 2\sqrt{(a_{22}, a_{21})\,(a_{12}, a_{11})} \tag{84a}$$

Man kann zwei Fälle unterscheiden: Ist $n > 1$, so ist (84) immer erfüllt, unabhängig von g und r, die ja beide positiv sind. Ist dagegen $n < 1$, so kann man (84 a) umformen in

$$(a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \geq \frac{1}{2}\,(1 + |\det \mathbf{A}|^2) \tag{85}$$

da man durch Ausmultiplizieren zeigen kann, dass folgende Beziehung gilt:

$$m^2 + n^2 - 4\,g\,r = |\det \mathbf{A}|^2 \tag{86}$$

Speist man den Vierpol von Seite 2 her, so hat er bekanntlich die **A**-Matrix:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (1/\det \mathbf{A}) \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}$$

Analog der obenstehenden Ableitungen findet man für die Passivität in Rückwärtsrichtung ($2 \rightarrow 1$):

$$(a_{22}, a_{21}) \geq 0 \tag{87}$$
$$(a_{12}, a_{11}) \geq 0 \tag{88}$$
$$(a_{12} \times a_{21}) - (a_{22} \times a_{11}) = 0 \tag{89}$$
$$(a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \geq |\det \mathbf{A}|^2 - 2\sqrt{(a_{22}, a_{22})\,(a_{12}, a_{11})} \tag{90}$$

Man kann nach den Regeln der Vektorprodukte zeigen, dass

$$4\,gr - m^2 = 4\,g'r' - m'^2 \tag{91}$$

wobei

$$\begin{aligned} g' &= (a_{22}, a_{21}) \\ r' &= (a_{12}, a_{11}) \\ m' &= (a_{12} \times a_{21}) - (a_{22} \times a_{11}) \end{aligned} \tag{92}$$

Zu (86) gilt die analoge Beziehung:

$$m'^2 + n^2 - 4\,g'r' = |\det \mathbf{A}|^2 \tag{93}$$

Damit kann man zeigen, dass für $n < |\det \mathbf{A}|^2$ die Gleichung (90) sich durch (85) ersetzen lässt. Ist hingegen $n > |\det \mathbf{A}|^2$, so ist (90) immer erfüllt.

Aus der Kombination der abgeleiteten Bedingungen ergibt sich, dass ein beidrichtig passiver Vierpol die folgenden Forderungen gleichzeitig erfüllen muss:

$$\begin{aligned} (a_{11}, a_{12}) &\geq 0 \\ (a_{21}, a_{22}) &\geq 0 \\ (a_{11}, a_{21}) &\geq 0 \\ (a_{12}, a_{22}) &\geq 0 \\ (a_{11} \times a_{22}) &= 0 \\ (a_{12} \times a_{21}) &= 0 \\ (a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) + 2\sqrt{(a_{11}, a_{21})\,(a_{12}, a_{22})} & \\ \geq 1 \text{ und } \geq |\det \mathbf{A}|^2 & \end{aligned} \tag{94}$$

Bei einem verlustlosen Vierpol gelten überall in (94) die Gleichheitszeichen. Es ist ferner leicht einzusehen, dass ein Vierpol, wenn er einrichtig verlustlos ist, auch umgekehrt verlustlos sein muss und dass dann $|\det \mathbf{A}| = 1$, der Vierpol also komplex reziprok ist.

Soll ein Vierpol beim reellen Abschlusswiderstand R_2 (> 0) punktweise, einrichtig verlustlos sein, so ergibt sich anstelle von (80)

$$1 - n \leq R_2\,g + r/R_2, \quad \text{oder} \tag{95}$$
$$(a_{11}, a_{22}) + (a_{12}, a_{21}) \geq 1 - R_2\,(a_{11}, a_{21}) - (a_{12}, a_{22})/R_2 \tag{95a}$$

Um die einrichtigen Passivitätsbedingungen für die **T**-Matrix abzuleiten, geht man aus von der Forderung:

$$|q_2|^2 - |p_2|^2 \leq |p_1|^2 - |q_1|^2 \tag{96}$$

die erfüllt sein muss für

$$|p_2/q_2| = |r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varrho}| \leq 1 \tag{97}$$

Mit (6) ergibt sich dann:

$$r^2 - 1 + (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varrho}\,t_{21} + t_{22})\,(r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varrho}\,t_{21}^* + t_{22}^*) - (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varrho}\,t_{11} + t_{12})\,(r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varrho}\,t_{11}^* + t_{12}^*) \geq 0 \tag{98}$$

(indem man durch $|q|^2$ dividiert und die Quadrate der Beträge als Produkte der Faktoren mit ihrem konjugierten Wert schreibt.)

Benützt man nun folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} (t_{11}\,t_{11}^* - t_{21}\,t_{21}^*) &= a \\ (t_{22}\,t_{22}^* - t_{12}\,t_{12}^*) &= b \\ |t_{11}\,t_{12}^* - t_{21}\,t_{22}^*| &= c \end{aligned} \tag{99}$$

so lässt sich (98) in nachstehende Form bringen:

$$r^2\,(1 - a) - r\,[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varrho}\,(t_{11}\,t_{12}^* - t_{21}\,t_{22}^*) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varrho}\,(t_{11}^*\,t_{12} - t_{21}^*\,t_{22})] + b - 1 \geq 0$$

oder (100)

$$r^2\,(1 - a) - 2\,r\,\mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varrho}\,(t_{11}\,t_{12}^* - t_{21}\,t_{22}^*)\} + b - 1 \geq 0$$

Der ungünstigste Fall liegt dann vor, wenn der Ausdruck in der geschweiften Klammer positiv reell wird, was bei geeigneter Wahl von ϱ immer möglich ist. Somit ergibt sich folgende Bedingung, die für $0 \leq r \leq 1$ erfüllt sein muss:

$$r^2(1-a) - 2rc + (b-1) \geq 0 \qquad (101)$$

Setzt man $r = 0$ und $r = 1$, so ergeben sich sofort die Bedingungen:

$$b \geq 1 \qquad (102)$$
$$b - a \geq 2c \qquad (103)$$

Die quadratische Funktion (101) kann ausserdem im zulässigen r-Bereiche ein Minimum aufweisen, falls $a < (1-c)$ ist, und zwar an der Stelle $r = c/(1-a)$. Die Ungleichung (101) wird dann zu

$$(1-a)(b-1) \geq c^2 \qquad (104)$$

Durch Ausmultiplizieren kann man sich überzeugen, dass folgende Beziehung richtig ist:

$$c^2 + ab = |\det \mathbf{T}|^2 \qquad (105)$$

Es ergibt sich dann aus (104), wenn man für a, b und c die ursprünglichen Werte wieder einsetzt:

$$|t_{22}|^2 + |t_{11}|^2 - |t_{12}|^2 - |t_{21}|^2 \geq 1 + |\det \mathbf{T}|^2 \qquad (106)$$

Nach dem vorangegangenen ist leicht einzusehen, dass im verlustlosen Falle die Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= 0 \end{aligned} \qquad (107)$$

damit die linke Seite von (101) identisch Null sein kann.

Mit Hilfe von (62) kann man analog die Forderungen für den rückwärts passiven Vierpol aufstellen.

Für einen beidrichtig passiven Vierpol fällt die einschränkende Bestimmung (97) weg, weil der Vierpol unter allen Betriebsbedingungen mindestens so viel Energie aufnehmen muss, wie er abgibt. Die Ungleichung (106) muss dann immer erfüllt sein, während im einrichtigen Fall dies nur erforderlich ist für

$$a < 1 - c \quad \text{oder} \qquad (108)$$
$$1 - t_{11}t_{11}^* + t_{21}t_{21}^* > |t_{11}t_{12}^* - t_{21}t_{22}^*|$$

während sonst die schwächere Forderung (103) genügt.

ANHANG 4

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Wir betrachten ein geschlossenes System aus einem Vierpol, der beidseitig mit Abschlusswiderständen versehen ist. Diese sollen sich auf der gleichen Temperatur und somit im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Der zweite Hauptsatz verbietet nun, dass sich der eine Widerstand von selbst auf Kosten des anderen erwärmt. Der Vierpol als Verbindungsglied sei streng passiv, er kann also von sich aus keine Energie abgeben. In diesem Falle darf seine Temperatur nicht höher sein als jene der Abschlusswiderstände, sie könnte hingegen tiefer liegen, so dass der Vierpol Energie aus einem der beiden Abschlüsse aufnehmen kann, bis zu einem gewissen Endzustand, bei dem jedoch die Temperatur an keiner Stelle höher sein kann als am Anfang. Es gilt nun festzustellen, ob diese Bedingung eine Einschränkung der passiven Vierpole ergibt. Man betrachte ein schmales Frequenzband. Darin kann man das Rauschsignal annähernd als Sinuswelle betrachten. Jeder Abschlusswiderstand liefere ein gleich grosses Signal, entsprechend seiner verfügbaren Leistung, die ja nur von der Temperatur abhängt ($kT \Delta f$). Es sei also:

$$p_1 = e^{j\varrho} p_2 \qquad (109)$$

Damit der zweite Hauptsatz erfüllt ist, darf dann auf keiner Seite des Vierpols die austretende Welle (q_1 oder q_2) grösser sein als p_1.

Wir setzen den gewünschten Betriebszustand zusammen aus der Überlagerung folgender zwei Fälle: Im ersten Fall sei $p'_2 = 0$, $p'_1 = p_1$. Die Vierpolgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} q'_1 &= t_{12}\, q'_2 \\ p'_1 &= t_{22}\, q'_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} q'_1 &= p_1 (t_{12}/t_{22}) \\ q'_2 &= p_1/t_{22} \end{aligned} \qquad (110)$$

Im zweiten Fall wählen wir $p_1'' = 0$; $p_2'' = p_1$:

$$\begin{aligned} q''_1 &= t_{11}\, p''_2 + t_{12}\, q''_2 \\ 0 &= t_{21}\, p''_2 + t_{22}\, q''_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} q''_1 &= p''_2 (t_{11} - t_{12}\, t_{21}/t_{22}) \\ q''_2 &= -p''_2 (t_{21}/t_{22}) \end{aligned} \qquad (111)$$

Wir setzen nun $p_1 = 1$, dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} |q'_1|^2 + |q''_1|^2 &\leq |p'_1|^2 + |p''_1|^2 = 1 \\ |q'_2|^2 + |q''_2|^2 &\leq |p'_2|^2 + |p''_2|^2 = 1 \end{aligned} \qquad (112)$$

Etwas umgeformt ergibt dies

$$\begin{aligned} |t_{22}|^2 - |t_{12}|^2 &\geq |\det \mathbf{T}|^2 \\ |t_{22}|^2 - |t_{21}|^2 &\geq 1 \end{aligned} \qquad (113)$$

Diese Bedingungen entsprechen genau der früheren Forderung (102) für beide Übertragungsrichtungen. Es entsteht also keine neue Einschränkung für die möglichen Werte der Matrixelemente, ausser den schon für den passiven Vierpol bekannten.

Bibliographie

[1] *R. Feldtkeller.* Einführung in die Vierpoltheorie. 3. Auflage, Leipzig 1943.

[2] *H. J. Carlin.* An Introduction to the Use of the Scattering Matrix in Network Theory. Polytechnic Institute of Brooklyn, Microwave Research Institute. Report PIB–300.

[3] *H. J. Carlin.* Theory and Application of Gyrator Networks. Polytechnic Institute of Brooklyn, Microwave Research Institute. Report PIB–289.

[4] *E. W. Matthews.* The Use of Scattering Matrices in Microwave Circuits. IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques **3** (1955), Nr. 3, p. 21.

[5] *H. M. Altschuler* and *W. K. Kahn.* Nonreciprocal Two-Ports Represented by Modified Wheeler Networks. IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques **4** (1956), Nr. 4, p. 228.
[6] *R. Feldtkeller* und *W. Nonnenmacher.* Einheitliche elektrische Ersatzschaltbilder für elektroakustische Wandler. Archiv für elektrische Übertragung (AEÜ) 8 (1954), 191.
[7] *B. P. Bogert.* Some Gyrator and Impedance Inverter Circuits. Proc. Inst. Radio Engrs **43** (1955), 793.
[8] *W. Klein.* Die Ersatzbilder des nichtumkehrbaren Vierpols. Archiv für elektrische Übertragung (AEÜ) **6** (1952), 205.
[9] *W. Klein.* Ersatzbilder des Transistors. Frequenz **7** (1953), 59.
[10] *W. Benz.* Grundlagen für die rechnerische Behandlung von Transistorverstärkern. Telefunken-Ztg **28** (1955), 95.
[11] *B. D. H. Tellegen.* The Gyrator, a New Electric Network Element. Philips Res. Rep. **3** (1948), 81.
[12] *C. L. Hogan.* The Microwave Gyrator. Bell Syst. Techn. J. **31** (1952), 1.
[13] *H. A. Haus.* Equivalent Circuit for a Passive Nonreciprocal Network. J. Appl. Phys. **25** (1954), 1500.
[14] *H. J. Carlin.* On the Physical Realizability of Linear Nonreciprocal Networks. Proc. Inst. Radio Engrs **43** (1953), 608.
[15] *J. L. Merrill, A. F. Rose* and *J. O. Smethurst.* Negative-Impedance Telephone Repeaters. Bell Syst. Techn. J. **33** (1954), 1055.
[16] *J. G. Linvill.* Transistor Negativ-Impedance Converters. Proc. Inst. Radio Engrs **41** (1953), 725.
[17] *J. Gammie* and *J. L. Merrill.* Stability of Negativ Impedance Converters. Bell Syst. Techn. J. **34** (1955), 333.
[18] *J. L. Merrill.* Theory of the Negativ Impedance Converter. Bell Syst. Techn. J. **30** (1951), 88.
[19] *R. H. Dicke.* General Microwave Circuit Theorems. In: Principles of Microwave Circuits. Rad. Lab. Series 8 New York 1948.
[20] *H. Schulz.* Die Transformation der Vierpol-Kettenmatrix in die Diagonalform. Archiv für elektrische Übertragung **5** (1951), 257.

Ein mechanisches Modell zur Vorführung gyromagnetischer Erscheinungen*

Von *Reinhard Pottel*, Göttingen

538.242(086.6)

Zusammenfassung. *Die praktische Ausführung eines Vorführungsmodells wird beschrieben. Es dient dazu, das Verhalten eines gebundenen Elektrons mit nicht abgesättigtem Spin unter dem Einfluss magnetischer Gleich- und Wechselfelder anschaulich darzustellen und damit die gyromagnetischen Erscheinungen im klassischen Bild zu verdeutlichen. Die hierfür wesentlichen Eigenschaften Spin und magnetisches Moment des Elektrons sowie verschiedene Magnetfelder sind im Modell mit mechanischen Mitteln nachgebildet. Die grundlegenden Vorgänge, die für die Erscheinungen der para- und ferromagnetischen Resonanz, des Faraday-Effekts, des Einstein-de-Haas- und Barnett-Effekts verantwortlich sind, finden in dem vorliegenden mechanischen Modell auf einfache Weise eine weitgehende Analogie.*

Résumé. *L'auteur décrit ici l'exécution pratique d'un modèle servant à montrer le comportement d'un électron non libéré avec spin non saturé sous l'influence de champs magnétiques continus et alternatifs et à expliquer ainsi les phénomènes gyromagnétiques classiques. Les caractéristiques de l'électron entrant essentiellement en considération, le spin et le moment magnétique, de même que différents champs magnétiques, sont représentés dans le modèle par des moyens mécaniques. Les phénomènes fondamentaux, qui donnent naissance à la résonance paramagnétique et ferromagnétique, aux effets de Faraday, d'Einstein-de-Haas et de Barnett, sont rendus par le modèle de manière simple et avec une grande analogie.*

Ferro- und paramagnetische Stoffe weisen im Zusammenhang mit ihren magnetischen Eigenschaften eine Reihe von Erscheinungen auf, deren Eigenart dem Spin der magnetisch wirksamen Elektronen zuzuschreiben ist. Alle diese Erscheinungen sollen hier unter dem Begriff gyromagnetische Erscheinungen verstanden werden. Am bekanntesten sind unter diesem Namen wohl der *Richardson-Einstein-de-Haas*-Effekt und der *Barnett*-Effekt bei ferromagnetischen Stoffen. Ebenso gehört dazu aber auch das besondere Verhalten para- oder ferromagnetischer Stoffe gegenüber elektromagnetischen Wellen, wenn in diesen Stoffen äussere oder, im Falle ferromagnetischer Materialien, auch innere statische Magnetfelder vorhanden sind. Hier treten der *Faraday*-Effekt, der *Cotton-Mouton*-Effekt und die para- und ferromagnetische Resonanz auf.

Die Beeinflussung der Wellenausbreitung durch Vorgänge gyromagnetischer Natur in magnetisch wirksamen Stoffen tritt in typischer Weise und besonders stark bei der Ausbreitung elektromagnetischer cm-Wellen in Ferriten in Erscheinung, wenn diese statischen Magnetfeldern ausgesetzt sind. Betrachten wir ein unendlich ausgedehntes Ferritmedium, das von einem magnetischen Gleichfeld bestimmter Richtung durchsetzt wird und bis zur Sättigung magnetisiert ist. Eine ebene, linear polarisierte Welle, deren magnetischer Feldstärkevektor parallel zum Gleichfeld liegt, erzeugt keine Wechselmagnetisierung. Das Medium verhält sich magnetisch unwirksam, seine Hochfrequenzpermeabilität ist eins. Steht dagegen die Gleichfeldrichtung senkrecht auf dem magnetischen Feldstärkevektor und der Ausbreitungsrichtung der Welle, so tritt eine Wechselmagnetisierung auf, die bei festem Gleichfeld in bestimmter Weise von der Frequenz der Welle ab-

* **Bemerkung der Redaktion:** Die Idee, sogenannte gyromagnetische Erscheinungen, wie sie besonders bei Ferriten im Gebiet der cm-Wellen beobachtet werden können, durch ein mechanisches Modell zu veranschaulichen, ist an verschiedenen Stellen unabhängig voneinander fast gleichzeitig aufgetaucht. So beschreibt zum Beispiel *A. G. Fox* in den Bell Laboratories Record **33** (1955), 419...423, eine ganz ähnliche Apparatur. Ferner wurde ein Modell dieser Art – ebenfalls im Jahre 1955 – an einer nationalen Tagung der URSI in Zürich von *G. W. Epprecht* (Forschungs- und Versuchsanstalt PTT in Bern) anlässlich eines Vortrages über Ferrite vorgeführt. Obwohl solche Modelle ausserordentlich wertvoll sind für das Verständnis und die Demonstration der etwas komplexen Vorgänge in gyromagnetischen Medien, muss man sich doch davor hüten, vom klassischen Modell ohne die nötige Vorsicht auf die atomaren quantenmechanischen Vorgänge zu schliessen.