Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 32 (1954)

Heft: 2

Artikel: Phasendrehende Netzwerke

Autor: Ehrenberg, Wolf S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874459

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nº 2 - BERN, 1. II. 1954 - JAHRGANG - ANNÉE - ANNO XXXII

TECHNISCHE MITTEILUNGEN

BULLETIN TECHNIQUE

PTT

BOLLETTINO TECNICO

Herausgegeben von der Schweizerischen Post-, Telegraphen- und Telephonverwaltung. Publié par l'administration des postes, télégraphes et téléphones suisses. Pubblicato dall'amministrazione delle poste, dei telegrafi e dei telefoni svizzeri

Phasendrehende Netzwerke*)

Von *Wolf S. Ehrenberg*, Zürich

621.392.2

Zusammenfassung. *Das Problem der Phasendrehung eines relativ breiten Frequenzbandes, wie sie für eine Art der Einseitenbandmodulation benötigt wird, ist in den letzten Jahren wiederholt behandelt worden. Hier wird nach Besprechung einer bekannten, allgemeinen Berechnungsmethode und ihrer praktischen Anwendungsmöglichkeiten eine Fehlerrechnung durchgeführt. Diese gibt Aufschluss über die Auswirkungen der Toleranz wirklicher Komponenten auf Phasendrehung und Amplitude und somit auf die Güte der Unterdrückung des einen Seitenbandes.*

Der Aufwand für eine allgemein durchgeführte Fehlerrechnung würde viel zu gross werden; hingegen gewährt bereits eine einfachere Betrachtung an Hand eines Beispieles einen ziemlich guten Einblick in die Fehlerverhältnisse im allgemeinen.

Die Toleranz der Komponenten beeinflusst die Unterdrückung auf mannigfache Weise, und zwar durch Phasen- und Amplitudenfehler, die ihrerseits «symmetrisch» und «asymmetrisch» sind. Es müssen somit vier Fehlerrechnungen durchgeführt werden. Es zeigt sich dabei, dass die erforderlichen Toleranzen durchaus realisierbare Werte annehmen.

Nach einem kritischen Vergleich der verschiedenen Fehlerquellen wird noch die Abhängigkeit der Toleranzempfindlichkeit vom Schaltungsgrad behandelt und damit die Untersuchung etwas verallgemeinert.

Résumé. *Le problème de la rotation de la phase dans une bande de fréquences relativement large comme celle dont on a besoin pour un genre de modulation à bande latérale unique a été souvent traité ces dernières années. Après avoir discuté une méthode générale de calcul connue et ses possibilités d'application pratique, on a effectué un calcul d'erreur. Celui-ci renseigne sur les effets de la tolérance des composantes actives sur la rotation de la phase et sur l'amplitude, partant, sur le degré d'affaiblissement d'une des bandes latérales.*

Le travail qu'exigerait un calcul d'erreur général serait beaucoup trop considérable; en revanche, des considérations simples basées sur un exemple permettent de se faire une idée des erreurs qui interviennent.

La tolérance admise pour les composantes influence de diverses manières l'affaiblissement d'une bande par des erreurs de phase et d'amplitude symétriques et asymétriques. Il faut donc faire quatre calculs d'erreurs. On constate alors que les tolérances exigées prennent des valeurs parfaitement réalisables.

Après avoir fait une comparaison critique des diverses sources d'erreurs, on étudie la sensibilité à la tolérance en fonction du degré du réseau électrique afin de généraliser les résultats obtenus.

1. Einleitung

Die für die übliche Einseitenbandmodulation erforderlichen, hochwertigen Bandfilter stellen einen wesentlich verteuernden Faktor dar. Auf der Suche nach einer grundsätzlich anderen Lösung befasst man sich seit einiger Zeit mit einem System, bei dem Sprachband und Träger je einer 90°-Phasendrehung unterzogen werden [1, 4, 5, 6]**). Die Arbeitsweise geht aus folgendem Blockschema hervor (Fig. 1).

Während eine Phasendrehung für den Träger trivial ist, bedarf die Drehung eines ganzen Bandes besonderer Massnahmen. Die allgemeine Berechnung der dazu erforderlichen Schaltung ist durch die Arbeit von *H. J. Orchard* [1] (siehe auch Darlington [4]) möglich geworden. Diese Schaltungen können sowohl durch *LC*- als auch durch *RC*-Glieder realisiert werden; wir werden uns nur mit *RC*-Gliedern befas-

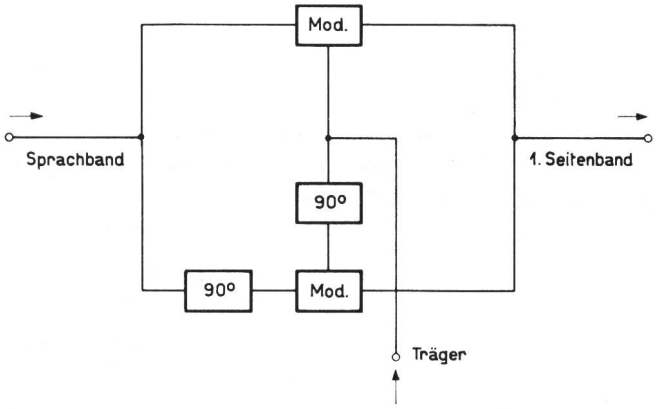

Fig. 1. Prinzipschema der Einseitenbandmodulation durch 90°-Phasendrehung.

*) Die vorliegende Arbeit entstand im Institut für Fernmeldetechnik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

**) Die in eckigen Klammern stehenden Ziffern beziehen sich auf die Bibliographie am Ende des Beitrages.

sen und Induktivitäten vermeiden. Hierfür bedienen wir uns eines weiteren Artikels von Orchard [2]; die beiden verwendeten Arbeiten sind in [8] gekürzt wiedergegeben.

Nach einer Erklärung der Methoden von Orchard wird hier über die Ergebnisse einer Untersuchung berichtet, die in erster Linie die erforderlichen Toleranzen für die Komponenten der phasendrehenden Netzwerke feststellen sollten. Diese Untersuchung wurde 1952 am Institut für Fernmeldetechnik der ETH auf Anregung von Herrn Prof. *Heinrich Weber* durchgeführt.

2. Allgemeine Realisierung einer 90°-Phasendifferenz nach [1]

Das Sprachband soll in zwei um 90° gegeneinander verschobenen Kanälen aufgespalten werden; hierzu sind zwei Allpass-Netzwerke notwendig. Die Bezeichnungen nach [1] sind:

f_a = untere Grenzfrequenz
f_b = obere Grenzfrequenz
ω_o = Bezugskreisfrequenz = $\sqrt{\omega_a \cdot \omega_b}$,
R_o = Wellenwiderstand = Abschlusswiderstand = Bezugswiderstand,
Z_T = Transferimpedanz = U_{ein}/J_{aus},
Φ = Abweichung der Phasendifferenz von 90°,
Φ_m = Höchstwert von Φ,
ω_σ = Nullstellen von tg $(\Phi/2)$,
n = Grad des Netzwerkes = Zahl der Pole,
p = $j\omega$.

Für die elliptischen Funktionen:

k = Modul,
k' = komplementärer Modul = $\sqrt{1-k^2}$ = ω_a/ω_b,
K = reelle ¼-Periode
K' = imaginäre ¼-Periode,
sn = elliptischer Sinus,
cn = elliptischer Cosinus
dn = $\sqrt{1-k^2 \mathrm{sn}^2}$

Orchard bestimmt zunächst die Abweichung von der 90°-Phasendifferenz. Allgemein wird:

$$\mathrm{tg}\,\Phi/2 = \prod_{\sigma=1}^{n} \left(\frac{\omega\sigma - \omega}{\omega\sigma + \omega}\right),$$

wobei die Nullstellen das Negative ihrer Pole sind. Die rationellste Annäherung an eine Konstante (in diesem Falle = Null) wird bei einer *Tschebbyscheff*schen Verteilung der Abweichungen erreicht. Folgende parametrische Gleichungen für Φ und ω führen zu dem gewünschten Verlauf:

$$\mathrm{tg}\,\Phi/2 = \sqrt{k_1}\,\mathrm{cn}\left[2n \cdot \frac{K_1}{K} \cdot U; k_1\right] \qquad ([1]—11a)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{dn}\left[U; k\right] \qquad ([1]—11b)$$

Schliesslich erhält man die Pole der Transferimpedanz Z_T:

$$p = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \frac{\mathrm{cn}\left[\frac{2\sigma+1}{2n} \cdot K; k\right]}{\mathrm{sn}\left[\frac{2\sigma+1}{2n} \cdot K; k\right]} \qquad ([1]-22)$$

Wir wissen, dass 1) $\mathrm{sn}^2 + \mathrm{cn}^2 = 1$ und dass 2) die Pole symmetrisch um ω_o verteilt sind (im logarithmischen Maßstab). Es folgt daraus, dass nur die sn-Werte berechnet zu werden brauchen, und zwar nur diejenigen für $\sigma < \frac{n-1}{2}$. Bei ungeradem n ist ω_o (die Pole sind auf ω_o bezogen bzw. $\omega_o = 1$ für die allgemeine, normierte Rechnung) selbst ein Pol. Zur Erzielung der erforderlichen Genauigkeit wird der elliptische Sinus mit Hilfe der *Landen*-Transformation [1] bestimmt.

Kurven für den maximalen Phasenfehler Φ_m vs. der Bandbreite $1/k' = \omega_b/\omega_a$, mit dem Schaltungsgrad n als Parameter, sind in [1] berechnet worden und hier wiedergegeben (Fig. 2).

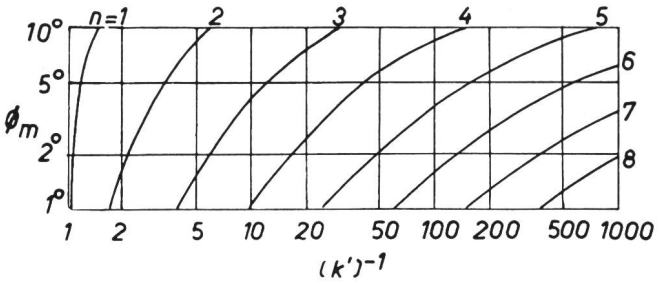

Fig. 2. Maximaler Phasenfehler in Funktion der Bandbreite, mit n als Parameter (aus [1] entnommen)

Der zulässige Phasenfehler und die Bandbreite bestimmen somit n; n und k', die reziproke Bandbreite, bestimmen zusammen die Pole, aus welchen die Transferimpedanzen folgen:

$$Z_{T_1} = \frac{(p+p_1)\,(p+p_3)\cdots\cdots(p+p_{2m+1})}{(p-p_1)\,(p-p_3)\cdots\cdots(p-p_{2m+1})}$$

$$Z_{T_2} = \frac{(p+p_2)\,(p+p_4)\cdots\cdots(p+p_{2m})}{(p-p_2)\,(p-p_4)\cdots\cdots(p-p_{2m})}$$

3. Realisierung von allgemeinen *RC*-Kreuzgliedern nach [2]

W. Cauer hat gezeigt, dass *RC*-Gebilde ebenso wie *LC*-Gebilde als kanonische Zweipole aufgebaut werden können [3]. Eine darauf basierende Methode zur Verwirklichung von Netzwerken vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit ist in [2] angegeben. Da diese Methode auf Kreuzglieder hinausläuft, ist sie für unseren Zweck (Allpässe!) sehr geeignet. Wir geben hier die Ergebnisse von [2] wieder:

Aus der Transferimpedanz Z_T erhält man die Koeffizienten $y_{12} = y_{21}$ der Leitwertmatrix:

$$y_{12} = 1/Z_T \qquad ([2]-4)$$

Indem man y_{12} in Partialbrüche zerlegt und alle Anteile (Residua) positiv macht, erhält man y_{11}.

Wenn man einen symmetrischen Vierpol wählt, folgt $y_{22} = y_{11}$. Die Leitwerte und Impedanzen ergeben sich aus der Matrizenrechnung:

$$Y_A = y_{11} + y_{12} \qquad Z_A = z_{11} + z_{12}$$
$$Y_B = y_{11} - y_{12} \qquad Z_B = z_{11} - z_{12}$$

Den kleineren der Reihenwiderstände beider Zweige spaltet man ab, bezeichnet ihn mit R_0 und setzt ihn, als Bezugswiderstand, gleich 1. Alle anderen Grössen müssen entsprechend transformiert werden. R_0 übernimmt nun die Rolle der Abschlusswiderstände laut Fig. 3.

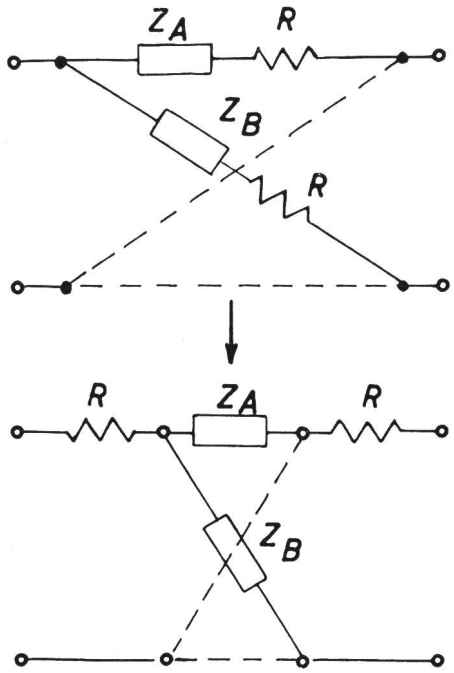

Fig. 3. Abspaltung von Abschlusswiderständen aus einem Kreuzglied

4. Einfluss von Phasen- und Amplitudenfehlern auf die Unterdrückung des einen Seitenbandes

Wir sahen, dass eine 90°-Phasenverschiebung nur angenähert erreicht werden kann. Da ausser einer theoretischen Phasenabweichung noch mit den Phasen- und Amplitudenfehlern gerechnet werden muss, die durch die Toleranzen wirklicher Komponenten bedingt sind, bestimmen wir im folgenden die Unterdrückung in Funktion beider Fehler. Im Idealfall sind beide Modulationsspannungen um 90° gegeneinander versetzt und haben gleiche Amplitude:

$$(1 + K \sin \omega t) \sin \Omega t \text{ liefert } \frac{1}{2} K \left[\cos(\omega - \Omega)\, t - \cos(\omega + \Omega) t \right]$$

$$(1 + K \cos \omega t) \cos \Omega t \text{ liefert } \frac{1}{2} K \left[\cos(\omega - \Omega)\, t + \cos(\omega + \Omega) t \right]$$

$$\text{Addition: } K \cdot \cos(\omega - \Omega)\, t$$

Wir wählen die eine der Ausgangsspannungen als Bezugsspannung und schreiben den ganzen Phasen- und Amplitudenfehler dem zweiten Allpass zu.

Mit den Bezeichnungen:

Δ = relativer Amplitudenfehler

Φ_{tot} = Phasenfehler (absolut) = Summe von theoretischem und toleranzbedingtem Fehler,

erhalten wir für

1. Allpass $\frac{1}{2} K [\cos(\omega - \Omega)\, t - \cos(\omega + \Omega)\, t]$

2. Allpass $\frac{1}{2} K [1 + \Delta] [\cos(\omega t - \Phi_{tot} - \Omega t) + \cos(\omega t - \Phi_{tot} + \Omega t)]$

Für das Verhältnis von Summen- und Differenzspannungen ergibt sich:

$$M = \frac{[(1 + \Delta) \cos \Phi_{tot} + 1] \cos(\omega - \Omega)\, t + (1 + \Delta) \sin(\omega - \Omega)\, t \sin \Phi_{tot}}{[(1 + \Delta) \cos \Phi_{tot} - 1] \cos(\omega + \Omega)\, t + (1 + \Delta) \sin(\omega + \Omega)\, t \sin \Phi_{tot}} \qquad (1)$$

Daraus folgt der Ausdruck für das Amplitudenverhältnis und somit für die Unterdrückung U in dB:

$$U = 20 \log \sqrt{\frac{2 [1 + \cos \Phi_{tot}] (1 + \Delta) + \Delta^2}{2 [1 - \cos \Phi_{tot}] (1 + \Delta) + \Delta^2}} \qquad (2)$$

Mit $\cos \Phi_{tot} \approx 1 - \frac{\Phi_{tot}^2}{2}$

erhalten wir die Näherungsformel:

$$U = 20 \log 2 \sqrt{\frac{1}{\Phi_{tot}^2 + \Delta^2}} \qquad (3)$$

5. Berechnung eines phasenverschiebenden Netzwerkes

Die Ausgangsgrössen sind: $k' = 1/7$ = reziproke Bandbreite,
$n = 4$ = Grad der Schaltung.

Die Schaltung besteht also aus zwei Kreuzgliedern 2. Grades. Die Werte der Grenzfrequenzen bzw. von ω_0 können am Schluss der Rechnung eingesetzt werden; sie sind für den Gang der Berechnung unwesentlich. Für Φ_m folgt aus Fig. 2 der Wert von etwa 30'. Die zur Ermittlung der Pole notwendigen elliptischen Funktionen werden wie folgt bestimmt:

Mit $\sigma = 0$; 1 und $n = 4$ sind die gesuchten n-Funktionen von der Form:

$$\mathrm{sn}\left[\frac{2\sigma + 1}{2n} \cdot K ; k\right] = \text{A) } \mathrm{sn}\left[\frac{1}{8} K ; k\right], \text{B) } \mathrm{sn}\left[\frac{3}{8} K ; k\right].$$

$$\text{Mit a) } k_n = \frac{1 - k'_{n-1}}{1 + k'_{n-1}} \quad \text{b) } k'_n = \sqrt{1 - k_n^2} \quad \text{c) } \mathrm{sn}(k_n) = \frac{(1 + k_{n+1})\, \mathrm{sn}(k_{n+1})}{1 + k_{n+1} \cdot \mathrm{sn}^2(k_{n+1})}$$

p) $\sin\left(\frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1951$ e) $\sin\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5556$ kann die folgende Tabelle aufgestellt werden:

k	k'	$\mathrm{sn}\left(\frac{1}{8}K;k\right)$	$\mathrm{sn}\left(\frac{3}{8}K;k\right)$
	0,1429	0,3955	0,8518
0,7501	0,6613	0,2354	0,6330
0,2038	0,9791	0,1970	0,5595
0,0106	0,9999	0,1951	0,5556

Nach früherem folgen daraus die cn-Ausdrücke und sodann die Pole:

$$p_3 = \sqrt{7} \cdot \frac{0{,}5239}{0{,}8518} = 1{,}628;\ p_1 = \frac{1}{p_4} = 0{,}1628$$

$$p_4 = \sqrt{7} \cdot \frac{0{,}9185}{0{,}3955} = 6{,}145;\ p_2 = \frac{1}{p_3} = 0{,}6145$$

Somit ergeben sich als normierte Transferimpedanzen:

$$Z_{T1} = \frac{(p+p_1)\,(p+p_3)}{(p-p_1)\,(p-p_3)} = \frac{(p+0{,}1628)\,(p+1{,}628)}{(p-0{,}1628)\,(p-1{,}628)} \quad (4a)$$

$$Z_{T2} = \frac{(p+p_2)\,(p+p_4)}{(p-p_2)\,(p-p_4)} = \frac{(p+0{,}6145)\,(p+6{,}145)}{(p-0{,}6145)\,(p-6{,}145)} \quad (4b)$$

Für die allgemeine Berechnung des Kreuzgliedes aus einer Transferimpedanz 2. Ordnung benutzen wir folgende Bezeichnungen (p_1, p_3 sind dem 1., p_2, p_4 sind dem 2. Allpass zugeordnet):

p_a – steht für p_1 oder p_2
p_b – steht für p_3 oder p_4

Gemäss ([2]–4): $y_{12} = 1/Z_T$
Partialbruchzerlegung:

$$y_{12} = 1 - \frac{2\,(p_b+p_a)}{(p_b-p_a)} \cdot \frac{p}{(p+p_a)} + \frac{2\,(p_b+p_a)}{(p_b-p_a)} \cdot \frac{p}{(p+p_b)} \quad (5)$$

Dadurch, dass die Residua positiv gemacht werden, folgt für y_{11}:

$$y_{11} = 1 + \frac{2\,(p_b+p_a)}{(p_b-p_a)} \cdot \frac{p}{(p+p_a)} + \frac{2\,(p_b+p_a)}{(p_b-p_a)} \cdot \frac{p}{(p+p_b)} \quad (6)$$

Die Zweigimpedanzen sind:

$1/Z_p = y_{11} + y_{12}$; $1/Z_s = y_{11} - y_{12}$ (p = parallel; s = serie)

Nach einer Partialbruchzerlegung, Abspaltung von Abschlusswiderständen und einer Normierung bezüglich $R_o = 1$ folgen die Elemente der normierten Zweigimpedanzen:

Parallelkreis: $R_p = \frac{F}{2} \cdot R_o(\Omega)$ (7a)

$$C_p = \frac{F+2}{F \cdot p_b \cdot \omega_o \cdot R_o}\ \text{(Farad)} \quad (7b)$$

Reihenkreis: $R_s = \frac{2}{F} R_o(\Omega)$ (7c)

$$C_s = \frac{F}{(F+2) \cdot p_a \cdot \omega_o \cdot R_o}\ \text{(Farad)} \quad (7d)$$

wobei: $F = 4\,\frac{p_b + p_a}{p_b - p_a}$

Indem wir für k' und R_o ihre Werte setzen und mit f_a anstatt mit ω_o rechnen, erhalten wir die Elemente ($k' = 1/7$, $R_o = 600$ Ohm) (Fig. 4).

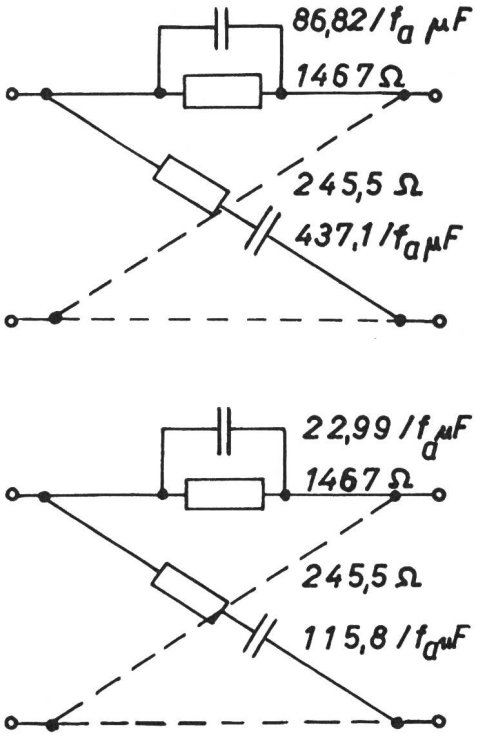

Fig. 4. Ergebnis des berechneten Beispiels mit $k' = 1/7$ und $n = 4$

6. Allgemeines zur Wahl der Schaltung

Das soeben berechnete Beispiel ist relativ einfach. Theoretisch lassen sich beliebige Bandbreiten und Genauigkeiten herstellen, indem man die Zahl der Schaltelemente vergrössert. Mit dem Grad der Schaltungen wächst aber nicht nur die Kompliziertheit der Berechnungen, sondern auch die Zahl der Fehlerquellen, bedingt durch die endliche Toleranz der Elemente. Es erscheint daher vernünftiger, vor allem die tiefen Frequenzen zu berücksichtigen, die höheren dagegen einem Bandfilter zu überlassen, das nunmehr nur bescheidenen Ansprüchen bezüg-

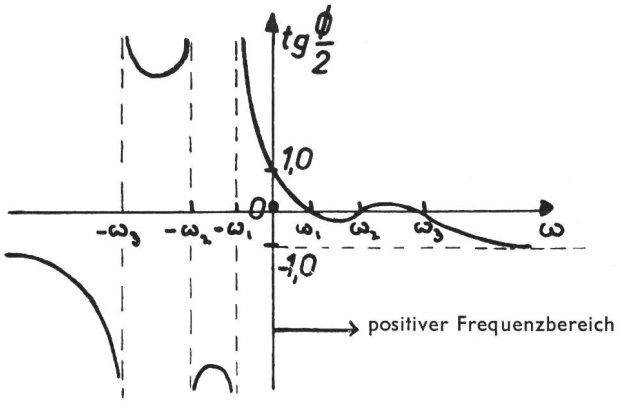

Fig. 5. Prinzipieller Verlauf des theoretischen Phasenfehlers in Funktion der Kreisfrequenz (aus [1] entnommen)

lich Flankensteilheit zu entsprechen hat. Oberhalb f_b (obere Grenzfrequenz) nimmt der Phasenfehler stetig zu und geht asymptotisch gegen 90° (die Phase somit gegen 0°), wie man aus Fig. 5 ersieht.

Durch Messung der Phasenfehler in Funktion der Frequenz lässt sich die minimale Steilheit für das die oberen Frequenzen übernehmende Bandfilter bestimmen, ebenso dessen untere Grenzfrequenz. Eine geeignete Verbindung beider Prinzipien könnte sich als wirtschaftlicher erweisen, sowohl gegenüber der reinen Bandfilter-, als auch gegenüber der reinen Phasenverschiebungs-Unterdrückung.

7. Fehlerrechnung zu phasenverschiebenden Netzwerken 4. Grades

Die wirklichen Komponenten der aufgebauten Kreuzglieder sind stets mit einer Toleranz behaftet. Die Elemente weichen von den berechneten etwas ab; dadurch werden die Ausgangsspannungen in Phase und Amplitude von den theoretischen Werten etwas abweichen.

Das symmetrische Kreuzglied kann grundsätzlich zwei Arten von Fehlern aufweisen: 1. symmetrische Fehler (bei Annahme vollkommener Symmetrie, das heisst bei Identität der äquivalenten Zweige *sowie deren Fehler*), und 2. asymmetrische Fehler (bei der Annahme, dass ein Zweig korrekt sei und der ihm äquivalente einen Fehler ihm gegenüber aufweist).

Im folgenden werden, anhand des berechneten Beispieles 4. Grades, die Phasen- und Amplitudenfehler beider Arten in Funktion der normierten Frequenz f/f_a (f_a = untere Grenzfrequenz) bestimmt. Es ist noch zu bemerken, dass die asymmetrischen Fehler fortfallen, sobald eine Sparschaltung verwendet wird – siehe zum Beispiel *Feldtkeller*, Vierpoltheorie.

a) *Der symmetrische Phasenfehler*

Für das Kreuzglied 2. Grades lautet der Ausdruck für die Betriebsdämpfung:

$$g_B = \ln\left[\frac{(R_o+R_p)-\omega^2 C_s C_p R_p R_o(R_o+R_s)+j\omega(C_s R_o^2+C_s R_s R_o+C_p R_p R_o+C_s R_p R_o+C_s R_s R_p)}{R_o-\omega^2 C_s C_p R_p R_o R_s \quad -j\omega(-C_s R_s R_o-C_p R_p R_o+C_s R_p R_o)}\right] \quad ([8]—4)$$

Unter der Annahme konstanter Dämpfung (Allpass!) folgt schliesslich aus dem Nenner:

$$d\varphi = \frac{2B}{A\left[1+\left(\frac{B}{A}\right)^2\right]}\left[\frac{dB}{B}-\frac{dA}{A}\right] \text{ (Radian)} \quad (8)$$

mit

$$A = 1-\omega^2 C_s C_p R_s R_p$$
$$B = \omega(-C_s R_s - C_p R_p + C_s R_p)$$

Ferner sind

$$\frac{dA}{A} = -\frac{\omega^2 C_s C_p R_s R_p}{1-\omega^2 C_s C_p R_s R_p}\cdot\left[\frac{dC_s}{C_s}+\frac{dC_p}{C_p}+\frac{dR_s}{R_s}+\frac{dR_p}{R_p}\right] \quad (9)$$

$$\frac{dB}{B} = \frac{C_s(R_p-R_s)\frac{dC_s}{C_s} - C_p R_p\frac{dC_p}{C_p} - C_s R_s\frac{dR_s}{R_s} + R_p(C_s-C_p)\frac{dR_p}{R_p}}{(-C_s R_s - C_p R_p + C_s R_p)} \quad (10)$$

In diesem Stadium setzen wir die numerischen Werte unseres Beispieles ein und erhalten als Phasenfehler eines Kreuzgliedes:

$$d\varphi = \frac{B}{A\left[1+\left(\frac{B}{A}\right)^2\right]}\cdot\left[\left(\frac{x}{1-x}+1{,}31\right)\frac{dC_s}{C_s}+\left(\frac{x}{1-x}-0{,}31\right)\frac{dC_p}{C_p}+\left(\frac{x}{1-x}-0{,}26\right)\frac{dR_s}{R_s}+\left(\frac{x}{1-x}+1{,}26\right)\frac{dR_p}{R_p}\right],$$

wobei $1-x = A$; $x = \omega^2 C_s C_p R_s R_p$ (11)

A ist eine Grösse der Form $(1-k\,.\,f^2/f_a^2)$ und besitzt Nullstellen. Der Ausdruck vor der Klammer in (8) verschwindet für A gegen 0:

$$\frac{2B}{A\left[1+\left(\frac{B}{A}\right)^2\right]} = \frac{2AB}{A^2+B^2}; \quad \lim_{A\to 0}\left(\frac{2AB}{A^2+B^2}\right) = 0$$

Der Anteil von dB/B ist von f unabhängig, und sein Produkt mit dem eben genannten Ausdruck verschwindet daher ebenfalls. Es bleibt:

$$\frac{2AB}{A^2+B^2}\cdot\frac{dA}{A} = \frac{2B}{A^2+B^2}\cdot dA; \quad \lim_{A\to 0}\left(\frac{2B}{A^2+B^2}\right)\cdot dA = \frac{2}{B}\cdot dA$$

Für dA erhalten wir

$$\text{1. Kreuzglied: } |dA_1| = 0{,}538\cdot f^2/f_a^2\left[\left|\frac{dC_{s1}}{C_{s1}}\right|+\left|\frac{dC_{p1}}{C_{p1}}\right|+\left|\frac{dR_{s1}}{R_{s1}}\right|+\left|\frac{dR_{p1}}{R_{p1}}\right|\right]$$

$$\text{2. Kreuzglied: } |dA_2| = 0{,}038\cdot f^2/f_a^2\left[\left|\frac{dC_{s2}}{C_{s2}}\right|+\left|\frac{dC_{p2}}{C_{p2}}\right|+\left|\frac{dR_{s2}}{R_{s2}}\right|+\left|\frac{dR_{p2}}{R_{p2}}\right|\right]$$

Bei A gegen 0 werden die Ausdrücke vor den Klammern gleich 1. Die beiden singulären Frequenzen sind:

$$f_1/f_a = \sqrt{\frac{1}{0{,}538}} = 1{,}365 \quad (12a) \qquad f_2/f_a = \sqrt{\frac{1}{0{,}038}} = 5{,}13 \quad (12b)$$

Für diese Frequenzen erhalten wir B_1 sowie B_2 gleich 3,48, und somit werden die Phasenfehler gleich:

$$\left|d\varphi_1\right| f_{1,2} = 0{,}575 \left[\left|\frac{dC_{s1}}{C_{s1}}\right| + \left|\frac{dC_{p1}}{C_{p1}}\right| + \left|\frac{dR_{s1}}{R_{s1}}\right| + \left|\frac{dR_{p1}}{R_{p1}}\right|\right] \quad (13a)$$

$$\left|d\varphi_2\right| f_{1,2} = 0{,}575 \left[\left|\frac{dC_{s2}}{C_{s2}}\right| + \left|\frac{dC_{p2}}{C_{p2}}\right| + \left|\frac{dR_{s2}}{R_{s2}}\right| + \left|\frac{dR_{p2}}{R_{p2}}\right|\right] \quad (13b)$$

Die Nullstellen von A sind somit ungefährlich.

Die Beziehungen (8) bis (11) wurden tabellarisch punktweise ausgewertet. Wir erhalten schliesslich eine Kurvenschar, welche die Beiträge der einzelnen Elemente zum gesamten Phasenfehler der Schaltung darstellt. Die Werte sind auf einen Fehler von 1% für alle Komponenten bezogen. Der Beitrag eines Elementes darf nur einfach bewertet werden und nicht doppelt, wie man irrtümlicherweise aus dem doppelten Auftreten jedes Zweiges schliessen könnte (Fig. 6).

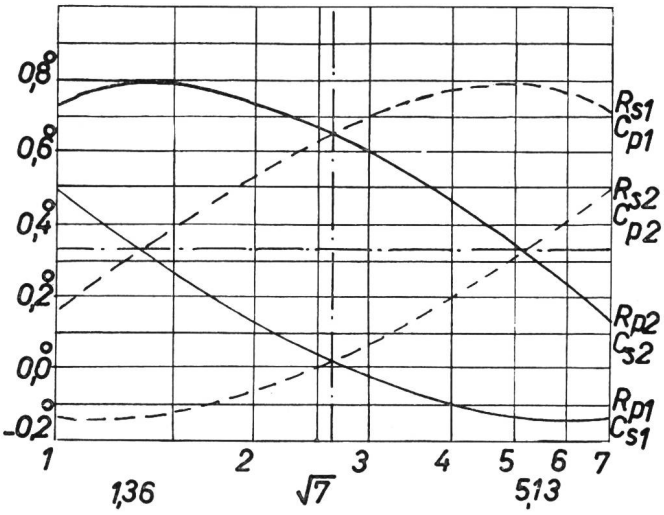

Fig. 6. Symmetrischer Phasenfehler: Beiträge der Elemente zum Gesamtfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element. Kurven, die zueinander mittelpunktsymmetrisch sind, werden durch eine gemeinsame Strichart gekennzeichnet; dies gilt auch für folgende, ähnliche Abbildungen

Der maximale Fehler, als Summe der Absolutwerte, sowie der wahrscheinliche Fehler, als Wurzel aus der Summe der Quadrate nach Gauss, zeigen einen von f/f_a praktisch unabhängigen Verlauf (Fig. 7).

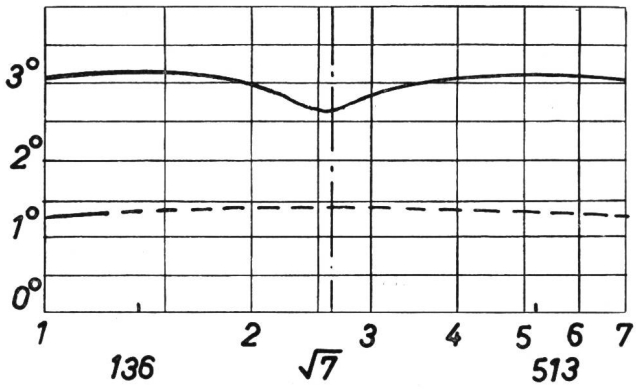

Fig. 7. Symmetrischer Phasenfehler: Maximaler (volle Linie) und wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element

b) *Der symmetrische Amplitudenfehler*

Wir bezeichnen mit

K die Eingangsspannung (gemeinsam)

K_1 die Ausgangsspannung des 1. Vierpols

K_2 die Ausgangsspannung des 2. Vierpols

K/K_1 den exp (b_{B1})

K/K_2 den exp (b_{B2})

$$\frac{de^{bB1}}{e^{bB1}} = \frac{d(K/K_1)}{K/K_1} = -\frac{dK_1}{K_1}; \quad \frac{de^{bB2}}{e^{bB2}} = -\frac{dK_2}{K_2}.$$

Somit ist der relative Fehler der Ausgangsamplitude gleich dem der Dämpfung.

Wir gehen nun wieder von dem Ausdruck für das Betriebsübertragungsmass aus und erhalten für die Dämpfung

$$e^{bB} = \sqrt{\frac{\left\{\left[1 + R_p/R_o\right] - \omega^2 C_s C_p R_p (R_o + R_s)\right\}^2 + \omega^2 \cdot \left\{C_s R_o + C_s R_s + C_p R_p + C_s R_p + C_s R_s R_p/R_o\right\}^2}{\left\{1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right\}^2 + \omega^2 \left\{-C_s R_s - C_p R_p + C_s R_p\right\}^2}} \quad (14)$$

Die Ableitung dieses Ausdrucks:

$$\frac{de^{bB}}{e^{bB}} = \frac{1}{2} \frac{\left\{\left[1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right]^2 + \omega^2 \left[-C_s R_s - C_p R_p + C_s R_p\right]^2\right\} \cdot \text{(Innere Ableitung)}}{\left[\left(1 + \frac{R_p}{R_o}\right) - \omega^2 C_s C_p R_p (R_o + R_s)\right]^2 + \omega^2 \left[C_s R_o + C_s R_s + C_p R_p + C_s R_p + C_s R_s R_p/R_o\right]^2} \quad (15)$$

Die innere Ableitung ist:

$$d(\text{Innen}) = \frac{d(\text{Nenner}) \times \text{Zähler} - d(\text{Zähler}) \times \text{Nenner}}{(\text{Nenner})^2} \quad (16)$$

«Nenner» und «Zähler» beziehen sich auf den Ausdruck unter der Wurzel.

Jetzt bestimmen wir die Ableitungen von «Nenner» und «Zähler» und setzen unsere normierten, numerischen Werte ein.

Nachdem diese Ausdrücke und die aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke punktweise berechnet wurden, erhalten wir eine Kurvenschar, welche die Beiträge der einzelnen Elemente zum gesamten Amplitudenfehler des Netzwerkes darstellt. Im übrigen gilt wieder das für den symmetrischen Phasenfehler Gesagte (Fig. 8 und 9).

c) *Der asymmetrische Phasenfehler*

Das asymmetrische Kreuzglied kann man aus folgender *Parallelschaltung* erhalten (Fig. 10). (man beachte die Pfeilrichtungen!)

Die Leitwertmatrizen der ersten zwei Vierpole:

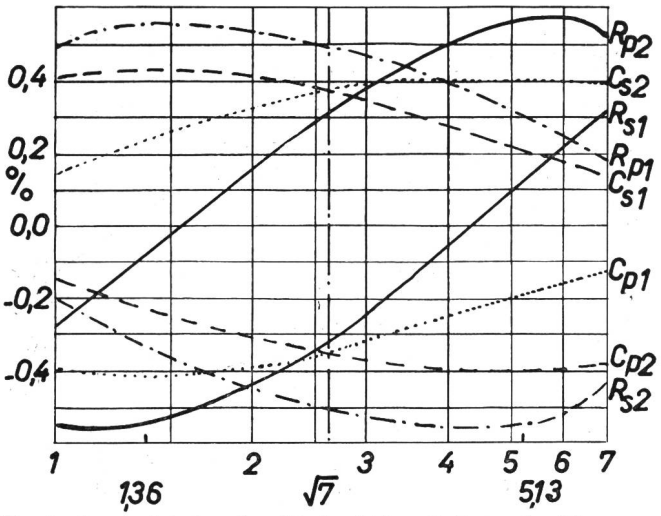

Fig. 8. Symmetrischer Amplitudenfehler: Beiträge der Elemente zum Gesamtfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element

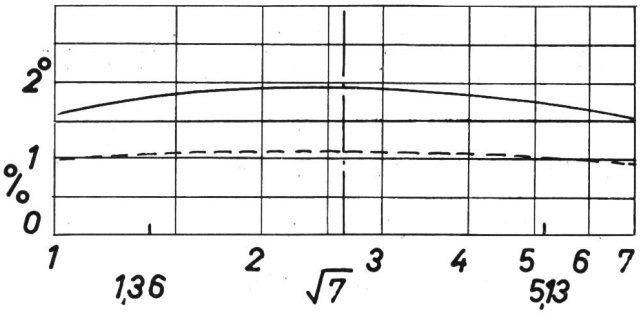

Fig. 9. Symmetrischer Amplitudenfehler: Maximaler (volle Linie) und wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element.

$$\left\| Y_1 \right\| = \frac{1}{Z_p + Z'_p} \cdot \left\| \begin{matrix} +1 & -1 \\ +1 & -1 \end{matrix} \right\| \tag{17a}$$

$$\left\| Y_2 \right\| = \frac{1}{Z_s + Z'_s} \cdot \left\| \begin{matrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\| \tag{17b}$$

Durch Addition erhalten wir die Leitwertmatrix des Kreuzgliedes, aus der schliesslich die A-Matrix folgt:

$$\left\| \mathfrak{A} \right\| = \frac{1}{-Z_p(2+\Delta) + Z_s(2+\delta)} \cdot \left\| \begin{matrix} Z_p(2+\Delta) + Z_s(2+\delta) & Z_p Z_s (2+\Delta)(2+\delta) \\ 4 & \end{matrix} \right\| \tag{18}$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\Delta = dZ_p/Z_p \;;\; Z_p + Z'_p = Z_p\,(2+\Delta)$$
$$\delta = dZ_s/Z_s \;;\; Z_s + Z'_s = Z_s\,(2+\delta)$$

Mit: $e^{gB} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{12} \cdot \frac{1}{R_o} + a_{21} \cdot R_o + a_{22}\right]$

Folgt:

$$e^{gB} = \frac{1}{2[-Z_p(2+\Delta) + Z_s(2+\delta)]} \left\{ 2\left[Z_p(2+\Delta) + Z_s(2+\delta)\right] + \frac{Z_p Z_s}{R_o}(2+\Delta)(2+\delta) + 4R_o \right\} \tag{19}$$

Unsere zwei Zweigimpedanzen sind allgemein:

$$Z_p = \frac{R_p}{1 + j\omega C_p R_p} \;;\; Z_s = \frac{1 + j\omega C_s R_s}{j\omega C_s}$$

und somit folgt das Betriebsübertragungsmass des asymmetrischen Kreuzgliedes 2. Ordnung:

$$e^{gB} = \frac{(2+\delta)\left[2 + (2+\Delta)\frac{R_p}{R_o}\right] - \omega^2 \cdot 2C_s C_p R_p \left[(2+\delta)R_s + 2R_o\right]}{(2+\delta)\cdot 2 \quad - \omega^2 \cdot 2C_s C_p R_p R_s (2+\delta)}$$
$$+ \frac{j\omega\left[2(2+\Delta)C_s R_p + 2(2+\delta)(C_s R_s + C_p R_p) + (2+\Delta)(2+\delta)\frac{1}{R_o} \cdot C_s R_s R_p + 4R_o C_s\right]}{-j\omega\left[2(2+\Delta)C_s R_p - 2(2+\delta)(C_s R_s + C_p R_p)\right]} \tag{20}$$

Unter der Annahme, dass $\Delta, \delta \leqslant 2$ sind, erhalten wir schliesslich:

$$d\varphi = \frac{2B}{A\left[1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2\right]}\left(\frac{dB}{B} - \frac{dA}{A}\right) \tag{21}$$

wobei $A = (2+\delta)(1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p)$,

$B = \omega\left[(2+\Delta)C_s R_p - (2+\delta)(C_s R_s + C_p R_p)\right]$ sind.

Die Ableitungen davon sind:

$$\frac{dA}{A} = \frac{1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p}{(2+\delta)(1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p)} \cdot \delta = \frac{\delta}{2+\delta} \tag{22a}$$

$$\frac{dB}{B} = \frac{C_s R_p \cdot \Delta - (C_s R_s + C_p R_p)\cdot\delta}{C_s R_p(2+\Delta) - (C_s R_s + C_p R_p)(2+\delta)} \tag{22b}$$

und mit unseren numerischen Werten:

$$\frac{dB_1}{B_1} - \frac{dA_1}{A_1} \approx \frac{0{,}64 \cdot \Delta_1 - 0{,}23 \cdot \delta_1}{1{,}28 - 0{,}46} - \frac{\delta_1}{2} = 0{,}78\left[\left|\Delta_1\right| + \left|\delta_1\right|\right] \tag{23a}$$

$$\frac{dB_2}{B_2} - \frac{dA_2}{A_2} \approx \frac{0{,}17 \cdot \Delta_2 - 0{,}06 \cdot \delta_2}{0{,}34 - 0{,}12} - \frac{\delta_2}{2} = 0{,}78\left[\left|\Delta_2\right| + \left|\delta_2\right|\right] \tag{23b}$$

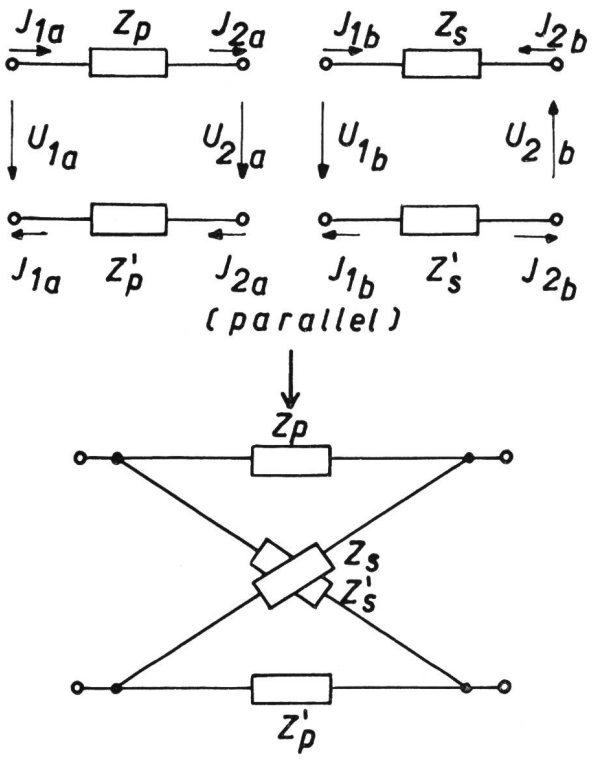

Fig. 10. Das asymmetrische Kreuzglied als Parallelschaltung zweier Vierpole

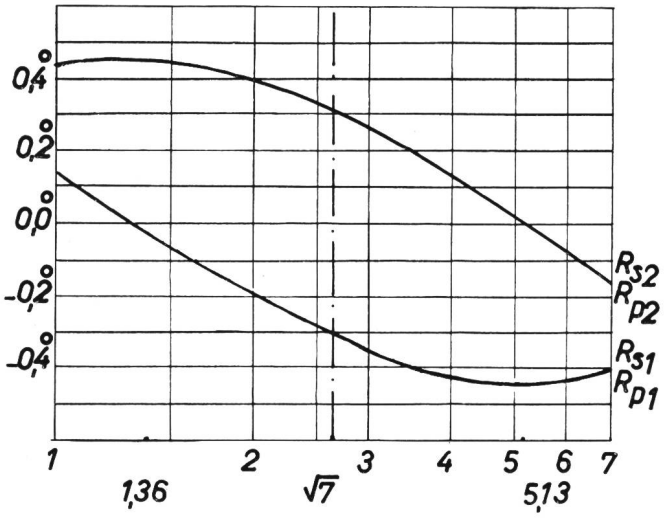

Fig. 11. Asymmetrischer Phasenfehler: Beiträge der Elemente zum Gesamtfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element. (Die Beiträge der C-Komponenten werden textgemäss denjenigen der R-Komponenten gleichgesetzt, die Kurven jedoch nicht doppelt bewertet, da, lt. (25): $dZ/Z = dR/R = dC/C$, nicht aber $dZ/Z = dR/R + dC/C$)

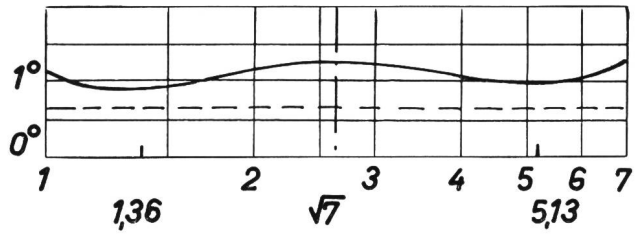

Fig. 12. Asymmetrischer Phasenfehler: Maximaler (volle Linie) und wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element

Es bleibt noch übrig, den Zusammenhang zwischen den Zweigfehlern und den Elementfehlern zu bestimmen. Für die Parallelimpedanz Z_p:

$$Z_p = \frac{R_p}{1 + j\omega C_p R_p}\ ;\ \Delta = \frac{dZ_1}{Z_1} = \frac{dZ_p}{Z_p} = \frac{1 + j\omega C_p R_p}{R_p} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega C_p R_p)^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[\left(1 + j\omega C_p R_p\right) \cdot 1 - R_p \cdot j\omega C_p \right] \cdot \Delta R_p + \left[(1 + j\omega C_p R_p) \cdot 0 - R_p \cdot j\omega C_p \right] \cdot \Delta C_p \right\};$$

$$\Delta = \frac{\Delta R_p/R_p - j\omega C_p R_p \cdot \Delta C_p/C_p}{1 + j\omega C_p R_p} \tag{24}$$

Einfachheitshalber nehmen wir nun an, die Fehler beider Elemente seien gleich:

$$\Delta R_p/R_p = \Delta C_p/C_p; \tag{25}$$

$$|\Delta| = \frac{|1 - j\omega C_p R_p|}{|1 + j\omega C_p R_p|} \cdot \left| \frac{\Delta R_p}{R_p} \right| = \frac{\Delta R_p}{R_p} = \frac{\Delta C_p}{C_p}$$

Dasselbe Resultat erhalten wir auch für den Reihenkreis. Bei der graphischen Darstellung ist darauf zu achten, dass die Fehler der Elemente *eines* Zweiges nicht addiert werden dürfen; der Zweigfehler ist gleich einem der beiden – als gleich angenommenen – Elementfehler (Fig. 11 und 12).

d) *Der asymmetrische Amplitudenfehler*

Eine Umordnung von (20) liefert:

$$e^{gB} = \frac{2\left[1 + \frac{R_p}{R_o} - \omega^2 C_p C_s \cdot R_p (R_o + R_s)\right] + \left[1 + \frac{R_p}{R_o} - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right] \delta + \frac{R_p}{R_o} \cdot \Delta}{2\left[1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right] + \left[1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right] \cdot \delta}$$

$$\frac{+ j\omega \left\{2\left[C_s R_p + C_s R_s + C_p R_p + 2 C_s R_o\right] + \left[C_s R_s + C_p R_p + C_s R_o\right] \cdot \delta + \left[C_s R_p + C_s R_o\right] \cdot \Delta\right\}}{- j\omega \left\{2\left[C_s R_p - C_s R_s - C_p R_p\right] - \left[C_s R_s + C_p R_p\right] \cdot \delta + C_s R_p \cdot \Delta\right\}} \tag{26}$$

Der Absolutwert dieses Ausdrucks hat folgende Form (unter Vernachlässigung kleiner Grössen 2. Ordnung):

$$e^{bB} = \sqrt{\frac{(A^2 + D^2) + 2(AB + DE)\delta + 2(AC + DF) \cdot \Delta}{(A_1^2 + D_1^2) + 2(A_1 B_1 + D_1 E_1)\delta + 2(A_1 C_1 + D_1 F_1)\Delta}} \tag{27}$$

wobei

$$A = 2\left[1 + \frac{R_p}{R_o} - \omega^2 C_s C_p R_p (R_o + R_s)\right]$$
$$B = \left[1 + \frac{R_p}{R_o} - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right]$$
$$C = R_p/R_o$$
$$D = 4\pi f\left[C_s R_p + C_s R_s + C_p R_p + 2 C_s R_o\right]$$
$$E = 2\pi f\left[C_s R_s + C_p R_p + C_s R_o\right]$$
$$F = 2\pi f\left[C_s R_p + C_s R_o\right]$$

$$A_1 = 2\left[1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right]$$
$$B_1 = \left[1 - \omega^2 C_s C_p R_s R_p\right]$$
$$C_1 = 0$$
$$D_1 = 4\pi f\left[C_s R_p - C_s R_s - C_p R_p\right]$$
$$E_1 = -2\pi f\left[C_s R_s + C_p R_p\right]$$
$$F_1 = 2\pi f\left[C_s R_p\right]$$

Wir suchen

$$d\,e^{bB}/e^{bB} = \frac{e^{bB} - e^{bB}(\Delta, \delta = 0)}{e^{bB}(\Delta, \delta = 0)} = ?$$

$$\text{wobei} \begin{cases} \text{Dämpfung ohne Fehler} = e^{bB}(\Delta, \delta = 0) = \sqrt{\dfrac{A^2 + D^2}{A_1^2 + D_1^2}} \\ \text{Dämpfung mit Asymmetriefehlern} = e^{bB} \end{cases}$$

Da das Rechnen mit der Wurzel sehr unbequem ist, machen wir folgenden Ansatz:

mit $(e^{bB})^2 = x^2$; $(e^{bB})^2(\Delta, \delta = 0) = y^2$

schreiben wir $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \approx 2y(x - y)$

$$\frac{x^2 - y^2}{2y^2} \approx \frac{x - y}{y} \; ; \; \frac{x^2}{2y^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right) \approx \frac{x - y}{y}.$$

Somit können wir schliesslich einsetzen:

$$\frac{d\,e^{bB}}{e^{bB}} \approx \left(\frac{AB + DE}{A^2 + D^2} - \frac{A_1 B_1 + D_1 E_1}{A_1^2 + D_1^2}\right)\delta + \left(\frac{AC + EF}{A^2 + D^2} - \frac{A_1 C_1 + E_1 F_1}{A_1^2 + D_1^2}\right)\Delta \tag{28}$$

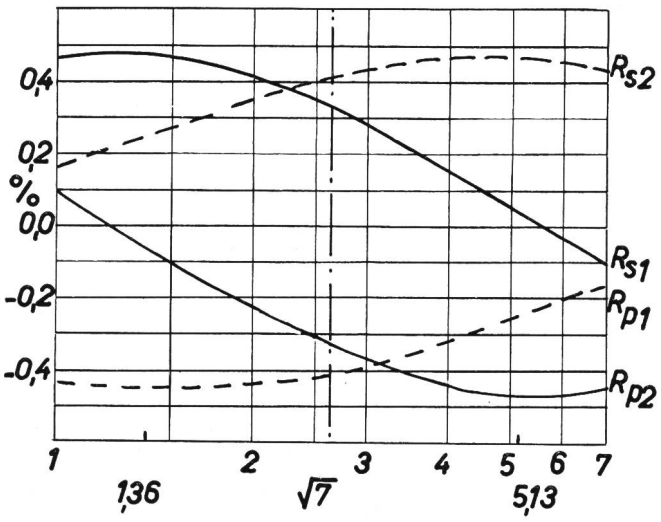

Fig. 13. Asymmetrischer Amplitudenfehler: Beiträge der Elemente zum Gesamtfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element

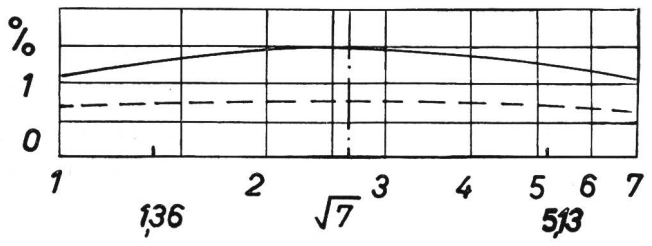

Fig. 14. Asymmetrischer Amplitudenfehler: Maximaler (volle Linie) und Wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element

Der relative Amplitudenfehler ist nach früherem gleich dem relativen Dämpfungsfehler; der Übergang zu den Elementfehlern geht wie unter (c) vor sich. Für die Kurven gilt das unter (c) Gesagte (Fig. 13 und 14).

8. Deutung der Ergebnisse der Fehlerrechnung

a) *Kritischer Vergleich der verschiedenen Fehlerarten*

Die wahrscheinlichen Fehler der vier Fehlerrechnungen (Mittelwerte über f/f_a) sind in einer Tabelle zusammengestellt:

Phasenfehler		*Amplitudenfehler*	
Symm.	Asymm.	Symm.	Asymm.
1,31°	0,63°	1,03%	0,70%

Wir ersehen daraus folgendes:

Der asymmetrische Phasenfehler ist etwa halb so gross wie der symmetrische; definitionsgemäss wurde bei dem asymmetrischen Fehler angenommen, dass der eine Zweig den Fehler Null hat, der andere hingegen mit einem Fehler behaftet sei; bei dem symmetrischen Fehler handelt es sich um gleiche Abweichungen in beiden äquivalenten Zweigen. Wir folgern daraus, dass die Asymmetrie auf den Phasenfehler keinen selbständigen Einfluss hat.

Bei dem Amplitudenfehler liegt der Fall anders, insofern, als der asymmetrische Fehler bis zu 70% des symmetrischen Fehlers beträgt. Die Asymmetrie hat hier einen – allerdings nicht übermässig grossen –

Einfluss auf den Fehler. Wie wir aber sehen werden, spielt der Amplitudenfehler an sich eine untergeordnete Rolle.

Zusammenfassend können wir behaupten, dass bei dem Aufbau von phasendrehenden Netzwerken keine spezielle Sorgfalt bezüglich der Symmetrie verwendet zu werden braucht.

b) *Einfluss von Phasen- und Amplitudenfehlern auf die Unterdrückung*

Anhand der symmetrischen Fehlerrechnung ist die Unterdrückung für einige Toleranzwerte der Komponenten berechnet worden. Da der maximale sowie der wahrscheinliche Fehler nur wenig von der Frequenz abhängen, sind Mittelwerte angenommen worden. Der Phasenfehler setzt sich zusammen aus dem theoretischen Fehler Φ_m und dem toleranzbedingten Fehler. Aus den folgenden Tabellen ist ersichtlich, dass besonders für gut abgeglichene Komponenten und beim Rechnen mit dem *wahrscheinlichen* Fehler, der Einfluss des Amplitudenfehlers gering ist. Es wurde für alle Komponenten dieselbe Toleranz angenommen; da anderenfalls die maximalen bzw. wahrscheinlichen Fehler frequenzabhängig sind, gilt das gleiche auch für die Unterdrückung. Die Frequenzabhängigkeit kann dann von Fall zu Fall sehr verschieden sein. Die Tabellen wurden anhand der Gleichung (3) berechnet.

(Rechnen mit dem maximalen Fehler)

Element-fehler	Phasen-fehler	Amplituden-fehler	Unter-drückung
10‰	0,0635 Rad	0,0293%	29,1 dB
8	0,0525	0,0234	30,8
5	0,0361	0,0146	34,2
2	0,0197	0,0059	39,8
1	0,0142	0,0029	42,8

(Rechnen mit dem wahrscheinlichen Fehler)

Element-fehler	Phasen-fehler	Amplituden-fehler	Unter-drückung
10‰	0,0320 Rad	0,0107%	35,5 dB
8	0,0272	0,0085	36,9
5	0,0203	0,0053	39,5
2	0,0134	0,0021	43,3
1	0,0110	0,0011	45,1
0 (Toleranz = 0 !)	0,0087	—	47,2

c) *Symmetrien*

Zum Schluss soll noch kurz auf das hohe Mass an Symmetrie in allen erhaltenen Kurven hingewiesen werden (bei logarithmischem Frequenzmaßstab). Die zwei singulären Frequenzen (s. Gl. 12a, b), $f/f_a = 1{,}365$ und $5{,}13$ liegen symmetrisch zur mittleren Frequenz f_o, bzw. $\omega_o = \sqrt{7}$; Schnittpunkte und Extrema fallen häufig mit diesen drei Frequenzen zusammen.

9. Abhängigkeit des Gesamtfehlers vom Schaltungsgrad

Bis jetzt haben wir uns ausschliesslich mit Netzwerken 4. Grades befasst. Mit zunehmendem Schaltungsgrad wächst die Zahl der Elemente; ob damit auch der Gesamtfehler wächst oder ob die einzelnen Beiträge sich dem Schaltungsgrad soweit anpassen, dass der Gesamtfehler vom Schaltungsgrad unabhängig wird – hierüber etwas zu erfahren war der Zweck der folgenden Berechnungen. Es wurde ausschliesslich der symmetrische Phasenfehler untersucht – anhand von vier Beispielen.

a) *Netzwerk 4. Grades, $k' = 1/7$*

Dieses ist das früher berechnete Beispiel.

b) *Netzwerk 3. Grades, $k' = 1/7$*

Die drei Pole werden wie früher bestimmt, wobei jetzt $p_2 = \omega_o = 1$ ist (normierte Rechnung). Für das Kreuzglied 1. Grades erhalten wir mit:

$$\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} (\omega C R) \qquad ([8]\text{-}2)$$

und

$$C = \frac{1}{p\,\omega_o R_o} \qquad ([8]\text{-}37)$$

folgende Elementbeiträge zum Phasenfehler:

$$d\varphi = \frac{dC/C + dR/R}{p \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{k'}} \cdot \frac{f_a}{f} + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{k'} \cdot \frac{f}{f_a}}\,;\ (R = R_o) \qquad (29)$$

In unserem Fall wird der Phasenfehler des Kreuzgliedes 1. Grades:

$$d\varphi = \frac{dC/C + dR/R}{\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{f_a}{f} + \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{f}{f_a}} \qquad (30)$$

Das zweite Kreuzglied (2. Grades) und dessen Fehlerbeitrag berechnet sich wie früher. Die graphischen Darstellungen sind in Fig. 15 und 16 veranschaulicht.

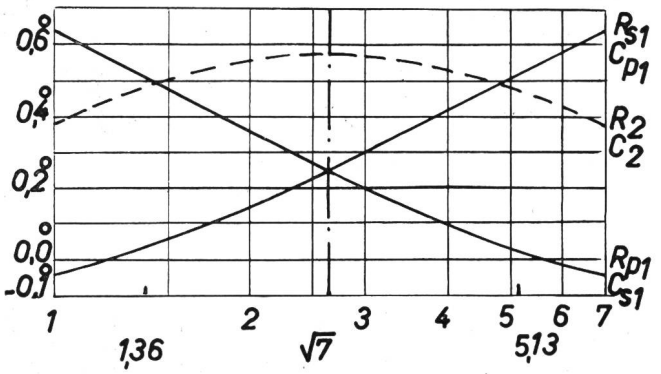

Fig. 15. Netzwerk 3. Grades, $k' = 1/7$: Beiträge der Elemente zum symmetrischen Phasenfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element

c) *Netzwerk 3. Grades, $k' = 1/3$*

Der Berechnungsgang ist wie unter (b). Hier die Ergebnisse in graphischer Darstellung (Fig. 17 und 18).

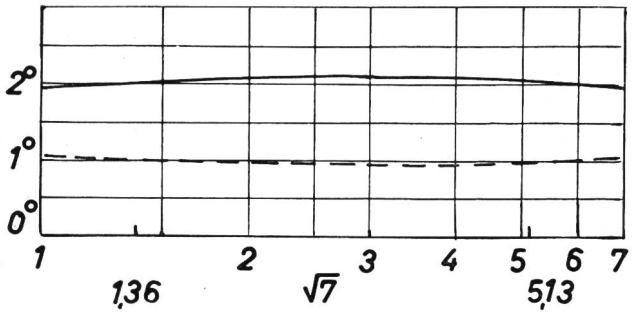

Fig. 16. Netzwerk 3. Grades, $k' = 1/7$: Maximaler (volle Linie) und wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element

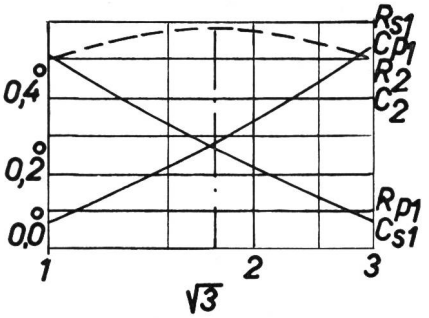

Fig. 17. Netzwerk 3. Grades, $k' = 1/3$: Beiträge der Elemente zum symmetrischen Phasenfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element

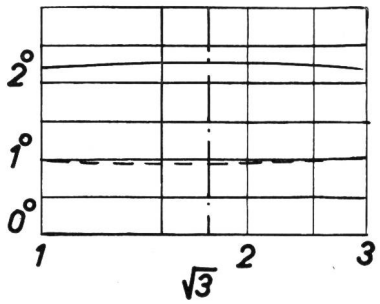

Fig. 18: Netzwerk 3. Grades, $k' = 1/3$: Maximaler (volle Linie) und wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element

d) *Netzwerk 2. Grades, k' = 1/3*

Mit den zwei Polen werden zwei Kreuzglieder 1. Ordnung nach der in (b) gezeigten Methode berechnet. Das Ergebnis ist graphisch dargestellt (Fig. 19 und 20).

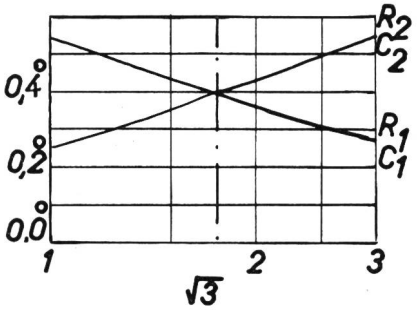

Fig. 19. Netzwerk 2. Grades, $k' = 1/3$: Beiträge der Elemente zum symmetrischen Phasenfehler, bezogen auf +1% Fehler je Element

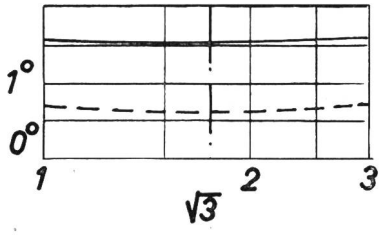

Fig. 20. Netzwerk 2. Grades, $k' = 1/3$: Maximaler (volle Linie) und wahrscheinlicher (gestrichelte Linie) Fehler, bei +1% Fehler je Element

e) *Schlussfolgerungen*

Grad der Schaltg.	k'	Max. F. (Mittelwert)	Wahrsch.F. (Mittelwert)	Verhältnis der Max. F.	Verhältnis der Wahrsch. F.
3	1/7	2,06°	0,98°		
4	1/7	2,65°	1,30°	0,78	0,77 (0,75)
2	1/3	1,59°	0,68°		
3	1/3	2,22°	1,00°	0,72	0,68 (0,67)
3	1/7	2,06°	0,98°		
3	1/3	2,22°	1,00°	0,93	0,98 (1,0)

(Zum Vergleich sind die theoretischen Werte in Klammern angeführt.)

Die Vergleichstabelle zeigt, dass mit wachsendem Schaltungsgrad ein Anwachsen des symmetrischen Phasenfehlers auftritt. Wir nehmen an, dass der symmetrische Phasenfehler eine lineare Funktion des Schaltungsgrades ist. Die Übereinstimmung dieser Hypothese mit den berechneten Werten ist völlig befriedigend. Der dritte Vergleich der Tabelle betrifft zwei Schaltungen desselben Grades, aber verschiedener k'; es zeigt sich, dass die betreffenden Fehler sich um 2% bzw. 7% unterscheiden, bei $k' = 1/7$ und 1/3. Dies entspricht theoretischen Phasenfehlern von 30' bzw. 2° 30', innerhalb welcher Grenzen sich vorkommende Fälle immer bewegen dürften. Für praktische Zwecke dürfen wir daher annehmen, dass der symmetrische Phasenfehler nur vom Schaltungsgrad abhängt.

Wie wir sahen, sind die Phasenfehler die wichtigsten; dem asymmetrischen Phasenfehler kommt keine selbständige Bedeutung zu, so dass wir ganz allgemein schliessen: die Beeinflussung der Unterdrückung durch die Toleranz der Komponenten ist eine lineare Funktion des Schaltungsgrades.

f) *Symmetrien*

Alle aufgeführten Fälle zeigen wiederum einen hohen Grad von Symmetrie, wie dies bereits beim ersten Beispiel der Fall war.

10. Messungen

Das berechnete Beispiel 4. Grades wurde für $f_a = 200$ Hz aufgebaut, die Bandbreite war somit 200...1400 Hz. Die Komponenten wurden nur mit einem «Philoscope»-Gerät abgeglichen und sind da-

her z. T. mit sehr beträchtlichen Fehlern behaftet. Beide Ausgangsspannungen wurden an die zwei Plattenpaare eines Kathodenstrahloszillographen gelegt; sobald sie um 90° versetzt sind, erscheint auf dem Schirm das Bild eines Kreises. Zwischen 250 und 600 Hz war praktisch keine Abweichung von der

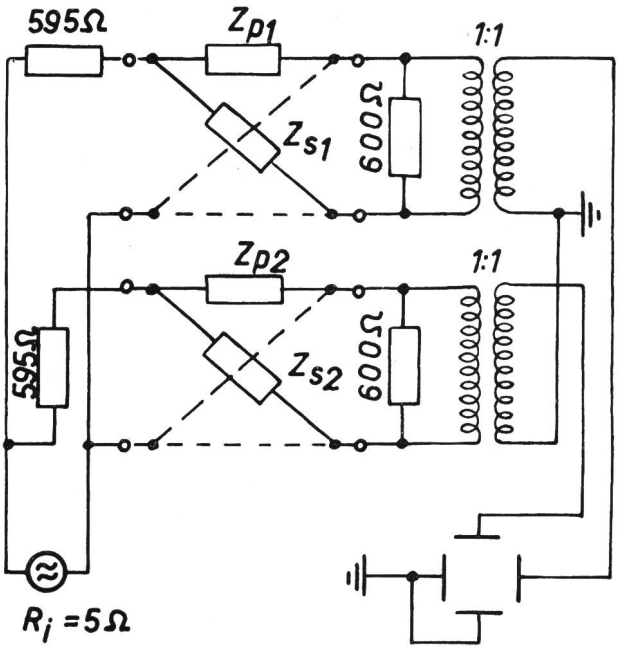

Fig. 21. Messanordnung für das Beispiel mit $k' = 1/7$, $n = 4$

Kreisform wahrnehmbar; zwischen 180 und 1800 Hz waren die grössten Phasenfehler etwa 2...3°; bei 3000 Hz entsprach der Fehler einer Unterdrückung von etwa 10 dB, bei 4000 Hz etwa 8 dB. Den Versuchsaufbau zeigt die folgende Figur (Fig. 21).

11. Zusammenfassung

Die Breitband-Phasendrehung findet immer mehr Interesse für eine verbesserte Einseitenbandmodulation. Gestützt auf eine allgemeine Berechnungsmethode von *H. J. Orchard*, die eine 90°-Phasenverschiebung durch zwei Kreuzglieder erreicht, wird ein phasendrehendes Netzwerk berechnet und ausgemessen.

Anhand des berechneten Beispieles wird eine Fehlerrechnung durchgeführt. Diese soll den Einfluss der Komponenttoleranzen auf die Unterdrückung, das heisst auf das dB-Verhältnis beider Seitenbänder bestimmen.

Die Toleranzen beeinflussen die Amplituden sowie die Phasen der Ausgangsspannungen, wobei zwischen zwei Fehlerarten unterschieden wird: bei der ersten bleibt die Symmetrie der Kreuzglieder unberührt, während bei der zweiten durch die Komponentfehler eine Asymmetrie entsteht. Der Einfluss der zweiten Art erweist sich praktisch als unerheblich.

Bei gleichen Fehlern in allen Komponenten ergibt sich für den maximalen und den wahrscheinlichen Fehler von Amplitude und Phase immer ein praktisch frequenzunabhängiger Verlauf. In diesem Fall ist auch die Unterdrückung frequenzunabhängig und kann in Funktion der Komponenttoleranz bestimmt werden.

Schliesslich wird anhand einiger Beispiele gezeigt, dass der Einfluss der Toleranzen mit wachsendem Schaltungsgrad linear zunimmt.

* * *

Für die Durchsicht des Manuskriptes bin ich Herrn Prof. H. Weber zu Dank verpflichtet. Die Zusammenfassung des Artikels von *H. J. Orchard* [1] und die Reproduktionen (Fig. 2 und 5), welche diesem entnommen wurden, werden mit der freundlichen Genehmigung der «Wireless Engineer» veröffentlicht.

Bibliographie

[1] *Orchard, H. J.* Synthesis of wideband two-phase networks. Wireless Eng. **27** (1950), 72...81.

[2] *Orchard, H. J.* Synthesis of RC-networks to have prescribed transfer functions. Proc. Inst. Radio Eng. **39** (1951), 428...432.

[3] *Cauer, W.* Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit. Arch. f. Elektrotechn. **17** (1927), 355.

[4] *Darlington, S.* Realization of a constant phase-difference. Bell Syst. Techn. J. **24** (1950), 94...101.

[5] *Dome, R. B.* Wideband phase shift networks. Electronics **19** (1946), 112...115.

[6] *Luck, D.* Properties of some wideband phase-splitting networks. Proc. Inst. Radio Eng. **37** (1949), 147...151.

[7] *Baumann, E.* Über Scheinwiderstände mit vorgeschriebenem Verhalten des Phasenwinkels. ZAMP **1** (1950), 43...52.

[8] Diplomarbeit des Verfassers, ausgeführt im Institut für Fernmeldetechnik der ETH, Juni 1952.

* * *

Im Hang zur Technik offenbart sich aber nicht nur eine innere schöpferische Kraft der Menschen, sondern auch ein Drang nach Erlösung aus aller Unzulänglichkeit. Dieser Drang kennt keine Ruhe und keine Rast. Er treibt nach Änderung und Verbesserung der Dinge; er heisst den Menschen suchen und erfinden.

Prof. Dr. F. Tank
In: Technik und Kultur. Zürich 1946