

Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Telegraphen- und Telephonverwaltung = Bulletin technique / Administration des télégraphes et des téléphones suisses = Bollettino tecnico / Amministrazione dei telegrafi e dei telefoni svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Telegraphen- und Telephonverwaltung

Band: 20 (1942)

Heft: 5

Artikel: Erzwungene elektromagnetische Schwingungen am Ellipsoid und an der Kugel bei zonaler Anregung. Zweite Mitteilung

Autor: Metzler, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-873273>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

TECHNISCHE MITTEILUNGEN

HERAUSGEGEBEN VON DER SCHWEIZ. TELEGRAPHEN- UND TELEPHON-VERWALTUNG

BULLETIN TECHNIQUE

PUBLIÉ PAR L'ADMINISTRATION DES TÉLÉGRAPHES ET DES TÉLÉPHONES SUISSES

BOLLETTINO TECNICO

PUBBLICATO DALL'AMMINISTRAZIONE DEI TELEGRAFI E DEI TELEFONI SVIZZERI



Inhalt — Sommaire — Sommario: Erzwungene elektromagnetische Schwingungen am Ellipsoid und an der Kugel bei zonaler Anregung. — Fehlerortsberechnung bei Isolationsdefekten an Kabeln verschiedener Aderdurchmesser. — Störungsdienst in Bern. Le Service des dérangements à Berne. — Missbrauch des Telephons. L'emploi abusif du téléphone. — Aus der Geschichte des schweizerischen Telegraphen. — Die Hochwachten in der Schweiz. La vigigraphie en Suisse. — Schweizerische Radioausstellung 1942. — Verschiedenes. Divers: Le développement futur du téléphone et la taxe d'abonnement. — Nachahmenswertes Beispiel. — V. Poulsen † — Un campanile. — Suite à la „Confession tardive“ ou ... la télédiffusion au Tessin. — Ein Tröstlein für den Bundesrat. — Personalmeldungen. Personnel. Personale.

Erzwungene elektromagnetische Schwingungen am Ellipsoid und an der Kugel bei zonaler Anregung.

(Zweite Mitteilung.)

E. Metzler.

621.396.11

In einer ersten vorläufigen Mitteilung zu diesem Thema (TM TT Nr. 6, 1941) wurde ausgehend von den Feldgleichungen die Formulierung des Problems in rotationssymmetrischen elliptischen Koordinaten gegeben. Die entstehende unhomogene partielle Diff. Gl. in den Koordinaten u und y ist vom Laméschen Typus. Es wurde gezeigt, wie die in der Erregungszone auftretende Unhomogenität physikalisch als *Sprung des Skalarpotentials* oder der *Ladungsdichte* an der Leiteroberfläche zu erklären ist; weiter wurde eine formal korrekte Lösung des Problems für verschwindende Exzentrizität, d. h. für die Kugel, angegeben.

Nachdem heute auch die Behandlung für beliebige Exzentrizitäten zu einem Abschluss gelangt ist, nicht ohne dass bezüglich der für die Reihenentwicklungen in Frage kommenden Funktionen gegenüber der ersten Mitteilung gewisse Änderungen sich als nötig erwiesen hätten, soll in dieser zweiten Mittei-

lung eine abschliessende Uebersicht der Gedankengänge und Resultate gegeben werden.

Durch Energiebetrachtungen können ausgehend von den Lösungen der erzwungenen Schwingungen für ein endliches Raumgebiet Schlüsse in bezug auf die Art der für ein unendliches Gebiet benötigten Lösungen gezogen werden. Dabei ist in beiden Fällen, d. h. des endlichen bzw. unendlichen Gebietes, die homogene Randbedingung auf einer inneren begrenzenden Fläche dieselbe.

Als Ergebnis der Weiterentwicklung des Problems ist die Lösung der Diff. Gl. (1) der ersten Mitteilung nicht mehr an eine endliche Tangentialkomponente des Vektors \mathfrak{E} der Oberfläche des Ellipsoides gebunden, mit andern Worten, der Uebergang zu praktisch vollkommener Leitfähigkeit darf vollzogen werden. Der Lösungsansatz wird dadurch vereinfacht.

Die Diff. Gl. der magnetischen Umlaufspannung $M(u, y)$ schreibt sich jetzt

$$(1)' \quad (u^2 - e^2) M_{uu} + (1 - y^2) M_{yy} + x^2 (u^2 - e^2 y^2) M = \begin{cases} j \frac{\omega}{c} (u^2 - e^2 \eta_s^2) \rho_s \operatorname{rot} \mathfrak{E}_i^{(e)} & u = u_0 \\ & y = \eta_s \\ 0 & u \neq u_0 \end{cases}$$

u und ey bedeuten die grosse bzw. kleine Halbachse des Rot. Ellipsoides.

$x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ω ist die Kreisfrequenz der einge-

prägten EMK, die man durch einen Grenzübergang aus dem Umlaufintegral $\oint \mathfrak{E}_i^{(e)} ds$ erhält.

I.

Unsere Formulierung des Problems stützte sich wesentlich auf die durch Hinzunahme einer inneren eingepprägten Kraft $\mathfrak{E}_i^{(e)}$ erweiterte 2. Maxwellsche

Feldgleichung $\operatorname{rot} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_i^{(e)}) = - \frac{1}{c} \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$. Dabei

ist wohlverstanden, dass $\mathfrak{E}_i^{(e)}$ an den Leiter gebunden ist, und für den angenommenen Fall sehr grosser Leitfähigkeit im besonderen an die Leiteroberfläche, wo in der Erregungszone $y = \eta_s$ die aus der *Flächendivergenz* des \mathfrak{E} Vektors entspringende *Ladungsdichte* den schon mehrfach erwähnten *Sprung* aufweist. Unser $\mathfrak{E}_i^{(e)}$ ist durch sein Auftreten in der 2. Feldgleichung dadurch charakterisiert, dass es

$$-\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_V (\mu \mathfrak{H}^2 + \varepsilon \mathfrak{E}^2) dv = \int_F [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_n dF - \int_V \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}_i^{(e)} dv$$

Bei einem zeitlich rein periodischen Vorgang ist das Zeitmittel der im betrachteten Volumen auftretenden Energieänderungen (Glieder links) gleich Null. Der durch Ausstrahlung auftretende Energieverlust (erstes Glied rechts) wird durch die vom Generator geleistete Arbeit kompensiert. Die im Volumen enthaltene elektromagnetische Energie vermittelt über die ruhenden und bewegten Ladungen der Leiteroberfläche zwischen Generator und Strahlung, d. h. zwischen Energielieferant und Verbraucher.¹⁾

Das zweite Integral rechts beschränkt sich auf den Ort des Auftretens von $\mathfrak{E}_i^{(e)}$, also auf die Zone $y = \eta_s$, $u = u_o$ und ergibt direkt die vom Generator zugeführte Leistung $-J \cdot E_o$. ($2\pi\rho \mathfrak{H}_y^{u=u_o}$ ist identisch mit dem Gesamtstrom, der durch den Generator fliesst; aus dem Integral über $\mathfrak{E}_i^{(e)}$ entsteht durch Grenzübergang die Generatorspannung E_o).

Ist keine eingeprägte Kraft vorhanden, wohl aber eine anfängliche, keinem elektrostatischen Gleichgewichtszustand entsprechende Ladungsverteilung auf u_o , so wird von dem Moment an, wo diese Ladungsverteilung nicht mehr durch künstliche Mittel aufrechterhalten wird, ein *Ausgleichsvorgang* einsetzen. Die Energiegleichung lehrt, dass dem *Strahlungsverlust* eine *äquivalente zeitliche Abnahme der Feldenergie* entspricht. Der Vorgang kommt zur Ruhe, wenn die gesamte Energie als Strahlung die unendlich ferne Hüllfläche passiert hat.

II.

Es liegt ein durch zwei rotationssymmetrische konfokale Ellipsoidschalen σ und Σ von praktisch vollkommener Leitfähigkeit begrenztes Raumgebiet G vor. Wir untersuchen elektromagnetische Schwingungen in diesem Gebiet, bei denen die elektrischen Kraftlinien in Meridianebenen, die magnetischen Kraftlinien in Kreisen um die Symmetrieachse verlaufen. Von den in Betracht fallenden Lösungen der Schwingungsgleichung wählen wir, mit Rücksicht auf einen später zu vollziehenden Grenzübergang (die Anregung zu diesem Grenzübergang verdanke ich Herrn Prof. Tank), jene zwei, die für grosse Parameter x (halbe grosse Ellipsoidachse) eine *divergierende* bzw. eine *konvergierende Welle* darstellen.

¹⁾ In vielen modernen Arbeiten über das Antennenproblem wird die Strahlungsleistung als Integral des Produktes aus Strom und Tangentialkomponente von \mathfrak{E} über die Oberfläche des Leiters berechnet. Diese Auffassung ist irrig; beim vollkommenen Leiter verschwindet $\mathfrak{E}_{\text{tang}}$; bei endlicher Leitfähigkeit ist dieses Integral identisch mit dem Realteil der Poyntingschen Energiestromung in den Leiter hinein, stellt also den Ohmschen Verlust dar, nicht aber eine Strahlungsleistung im gewünschten Sinn.

nicht als Gradient eines Potentials erhalten wird, wie dies z. B. in der erwähnten Arbeit (1. c. erste Mitteilung) der amerikanischen Autoren Stratton und Chu der Fall ist.

Wir bilden unter Berücksichtigung von $\mathfrak{E}_i^{(e)}$ das *Energieintegral* der Maxwellschen Gleichungen, wobei wegen der Voraussetzung über die Leitfähigkeit die Leitungsstromdichte verschwindet.

Diese Lösungen verhalten sich mit dem Zeitanatz $e^{\pm j\omega t}$ in der x Koordinate asymptotisch wie

$$\frac{e^{+jxx}}{x} \text{ bzw. } \frac{e^{-jxx}}{x}$$

Auf σ und Σ erfülle die Lösung U eine homogene Randbedingung, z. B. $U = 0$. Sucht man nun durch eine lineare Kombination $U = c_1 u + c_2 v$ (wo u und v die beiden Partikularlösungen bedeuten) dieser Bedingung zu genügen, so zeigt sich, dass der in den

Funktionen u und v enthaltene Parameter $x = \frac{\omega}{c}$ nicht frei gewählt werden kann. Es muss nämlich die Determinante $u(x x)_\sigma v(x x)_\Sigma - v(x x)_\sigma u(x x)_\Sigma$ verschwinden. Diese Bedingungsgleichung besitzt, wie die Theorie zeigt, eine unendliche Anzahl reeller Wurzeln x_n , die *Eigenwerte* des Problems, denen ebenso viele *Eigenfunktionen* U_n entsprechen. Aus dem Greenschen Satz folgt unmittelbar die Orthogonalität der entstehenden Eigenfunktionen, die so normiert werden können (eine multiplikative Konstante ist frei), dass

$$\int_G U_m U_n^* dG = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Physikalisch bedeuten die Eigenfunktionen nichts anderes als die *Eigenschwingungen* unseres Gebietes, und zwar können wir, da es sich um Lösungen der Wellengleichung handelt, sie direkt identifizieren mit der elektrischen oder der magnetischen Feldstärke. Nach den Voraussetzungen über die Symmetrieverhältnisse ist es zweckmässig, die magnetische Feldstärke zu wählen. Ist also die magnetische Umlaufspannung der n^{ten} Eigenschwingung $M_n = 2\pi\rho \mathfrak{H}_n$, so gilt wegen der Orthogonalität und Normierung:

$$\int_G \frac{M_n^* M_m}{\rho^2} dG = \int_G \frac{M_n M_m^*}{\rho^2} dG = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Der Stern bedeutet die konjugiert komplexe Funktion. Die *wechselseitige magnetische Energie* zwischen zwei Eigenschwingungen des betrachteten Gebietes verschwindet im Zeitmittel, die *Eigenenergie* der n^{ten} Schwingung ist endlich. Dasselbe gilt von der elektrischen Energie, da im Vakuum $W_{\text{mag}} = W_{\text{el}}$.

Bei festgehaltenem σ lassen wir jetzt den Parameter der äusseren Grenzfläche des Gebietes G wachsen; die Randbedingungen bleiben dieselben. Die Eigenwerte x_n bleiben reell, indessen wird ihre Aufeinanderfolge rascher. Die Eigenenergien nehmen zu, aber das zeitliche Mittel ihrer Änderungen bleibt Null, da ja weder Energie vernichtet wird, noch solche neu hinzukommt.

Beim Grenzübergang $\Sigma \rightarrow \infty$ gehen die z_n in ein kontinuierliches Spektrum über; an die Stelle der homogenen Randbedingung auf Σ , welcher durch das Verschwinden der Lösung im Unendlichen wie x^{-1} ohnehin genügt wird, tritt die *Sommerfeldsche Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung*. Dem Hin- und Herpendeln der Wellen zwischen den beiden Flächen σ und Σ im endlichen Gebiet entspricht im Fall des sich ins Unendliche erstreckenden Grundgebietes ein ständiger Energieaustausch durch Ein- und Ausstrahlung. Diese Vorgänge halten sich im Zeitmittel die Waage.

Das wichtige Ergebnis ist die Feststellung, dass trotz unendlichem Grundgebiet bei reellem x keine Energie durch Strahlung verlorengeht, wenn gleichzeitig die Randbedingung auf σ erfüllt bleiben soll.

Das Ergebnis unserer Betrachtung lässt sich auf Grund des Prinzips der raumzeitlichen Erhaltung der Energie in den Satz verallgemeinern:

„Es gibt bei reellem x und unendlichem Grundgebiet keine Eigenschwingungen, die auf einer im Endlichen liegenden geschlossenen Fläche σ denselben homogenen Randbedingungen und im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung genügen.“

Dieser Satz wurde in der erwähnten Arbeit von A. Sommerfeld²⁾ auf andere Art hergeleitet und daraus für reelles x die Existenz der *Greenschen Funktion der Schwingungsgleichung für den unendlichen Raum postuliert*. In der ersten Mitteilung haben wir auf die quellenmässige Darstellung der elektromagnetischen Potentiale mittels des Ausdrucks exR/R , der von Sommerfeld als Greensche Funktion der Schwingungsgleichung für den unendlichen Raum abgeleitet und bezeichnet wurde, aufmerksam gemacht. Zur Lösung des Strahlungsproblems mittels der elektromagnetischen Potentiale wäre dann zum Kern exR/R auf der Strahleroberfläche eine Belegungsfunktion derart zu bestimmen, dass einerseits die bekannten Stetigkeitsbedingungen des Feldes an der Grenzfläche, andererseits die aus der 2. Feldgleichung sich ergebende Sprungbedingung für das Skalarpotential erfüllt ist.

In diesem Zusammenhang verweisen wir auf eine neuere Behandlung des Antennenproblems durch E. Hallén³⁾ (Vergl. zu diesem Thema auch O. Zinke „Grundlagen der Strom- und Spannungsverteilung auf Antennen“, Berliner Habilitationsschrift.)

Da es aus Gründen der Erhaltung der Energie nicht möglich ist, durch Grenzübergang vom endlichen zum unendlichen Gebiet zu zeitlich ungedämpften Eigenschwingungen dieses unendlichen Gebietes zu gelangen, die im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung und auf einer im Endlichen liegenden geschlossenen Fläche σ einer homogenen Randbedingung genügen, lassen wir jetzt komplexe Werte des Parameters x zu. Nun sind Lösungen möglich; es sind die bekannten eigentlichen, zeitlich gedämpften Eigenschwingungen.

III.

Der unendlichen Zahl reeller Eigenwerte z_n und zugehörigen Eigenfunktionen im endlichen Gebiet entspricht eine ebenfalls unendliche Zahl komplexer Eigenwerte z_n und zugehöriger Eigenfunktionen im Falle des sich ins Unendliche erstreckenden Raumes.

Berechnet sind diese Lösungen für die Kugel (J.J. Thomson 1893), für das Ellipsoid (M. Abraham 1898) und für Leiter beliebiger, gestreckter Form (E. Hallén 1931, vgl. auch: Oseen, Ark. f. Mat. Astron. och Fys. 9 1913 Nr. 12, 1914 Nr. 30, als Vorläufer der Hallénschen Rechnungen).

²⁾ A. Sommerfeld „Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung“, Jahresbericht d. Deutsch. math. Ver. 21. 1912.

³⁾ E. Hallén, „Theoretical investigations into the transmitting and receiving Qualities of Antennae“, Uppsala 1938.

Die Kugellösung wurde durch P. Debye (Ann. der Physik IV. F. 1909 pag. 73) in die Betrachtung über den „Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material“ einbezogen. Bei der bereits erwähnten Ableitung der Greenschen Funktion führt A. Sommerfeld ein Integral in der komplexen x Ebene über uneigentliche Eigenschwingungen aus (loc. cit.).

Bei den uns interessierenden, nach Sommerfeld *eigentlichen gedämpften Eigenschwingungen* ist auf eine allgemeine Besonderheit aufmerksam zu machen, die sich als Folge der Separierung in Raum- und Zeitfunktion notwendigerweise ergibt.

Die Ellipsoidlösung geht, wie man aus der Diff. Gl. (2) (erste Mitteilung) ersieht, für grosse Abstände vom Erregungszentrum in dieselbe asymptotische Form über wie die Kugellösung und stellt dann einen zu entfernteren Kugelflächen fortileitenden Wellenzug dar. Der Ausdruck für das magnetische bzw. elektrische Feld lautet in diesen Entfernungen (anstatt u aus der ersten Mitteilung schreiben wir wieder vorübergehend x), wenn man von einem unwesentlichen Proportionalitätsfaktor absieht:

$$\frac{\exp z_v (x - ct)}{x} \cdot \frac{\mathcal{E}_v(y)}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Wegen der zeitlichen Dämpfung muss der Realteil der komplexen Konstanten z_v positiv ausfallen. Wie sofort ersichtlich, würde nun, wenn für t (Zeit) ein beliebiger, aber endlicher Wert eingesetzt wird, der Ausdruck für $x \rightarrow \infty$ exponentiell über alle Grenzen wachsen; er sollte aber verschwinden wie x^{-1} . Die Bedingung des Verschwindens ist erfüllt, wenn x und t gleichzeitig dem Wert ∞ zustreben.

Diese mangelnde Bestimmtheit der durch Separation in Raum und Zeitfunktion erhaltenen mathematischen Lösung der Diff. Gl. wird durch die Vorschrift beseitigt, dass die Schwingung zur (beliebigen) Zeit $t = t_0$ auf σ ihren Anfang nimmt. Nach Massgabe ihrer „Weltlinie“ wird sie auf entfernteren Flächen verspätet eintreffen. Wir haben also, um zu einer konkreten Lösung zu gelangen, der Anfangszeit t_0 jeweils die richtige Laufzeit zuzuzählen. Insbesondere wird im Strahlungsgebiet für $x \rightarrow \infty$ die Laufzeit $t = \frac{x}{c}$, und das richtige Verschwinden

des Feldes im Unendlichen ist gewährleistet. Wir verfügen einfach in einer uns bekannten Weise entweder über die Zeit oder über den Ort.

Mit den partikulären Integralen, welche uns die Eigenschwingungen für den unendlichen Raum liefern, ist scheinbar noch nicht viel im Sinne unserer gestellten Aufgabe gewonnen. Ein gewisser physikalischer Zusammenhang muss aber offenbar bestehen. Wenn man den Ausgleichsvorgang, wie wir ihn in I in Betracht zogen, durch Aufladung stets so rasch und phasenrichtig wiederholt, dass ein neuer Anstoss erfolgt, bevor die vorausgegangene Schwingung abgeklungen ist, haben wir bereits eine gewisse Angleichung an die zeitlich ungedämpfte erzwungene Schwingung. Wir machen einen Grenzübergang und lassen sowohl das Intervall zwischen zwei Stössen als auch die Amplitude des Stosses derart zu Null gehen, dass der Scheitelwert der resultierenden Schwingung konstant bleibt.

Bei diesem Grenzübergang werden vermutlich die charakteristischen Grössen der Eigenschwingungen,

d. s. Dämpfung und Eigenwellenlänge, physikalisch auch im neuen Zustand der erzwungenen reinen Periodizität eine Bedeutung behalten.⁴⁾

IV.

Darf der Greensche Satz auf das System der gedämpften Eigenfunktionen angewendet werden?

Der magnetische Feldvektor der ν^{ten} Eigenschwingung genügt der Schwingungsgleichung

$$\Delta \mathfrak{H}_\nu + x_\nu^2 \mathfrak{H}_\nu = 0$$

Es gilt also

$$\Delta \frac{M_\nu}{\rho} + x_\nu^2 \frac{M_\nu}{\rho} = 0$$

$$\int_G (H_m \Delta H_n - H_n \Delta H_m) dG = \int_F \left(H_m \frac{\partial H_n}{\partial n} - H_n \frac{\partial H_m}{\partial n} \right) dF = 0$$

Daraus leitete sich die Orthogonalität der Eigenschwingungen des endlichen Raumgebietes G ab. Die Funktionen H_ν des unendlichen Raumes an Stelle der H_n eingesetzt, ergeben folgendes Bild: Das Integral rechts ist über die innere Begrenzungsfläche σ einerseits, andererseits über die Hüllfläche im ∞ zu erstrecken. Wegen der homogenen Randbedingung verschwindet aber der Integrand auf σ . Im Unendlichen geht, wenn man die Laufzeit berücksichtigt, H_ν wie $\frac{1}{x}$, $\frac{\partial H_\nu}{\partial n}$ wie $\frac{1}{x^2}$ zu Null. Das Flächenelement dF geht wie x^2 zu ∞ , der Integrand also (wobei sich die Integration nurmehr über ein endliches Gebiet erstreckt) wie $\frac{1}{x}$ zu Null. Die gedämpften Eigenschwingungen im unendlichen Raum bilden ein orthogonales Funktionensystem.

$$\int^\infty H_\nu H_\mu^* dG = 0 \quad \nu \neq \mu$$

Das Raumintegral über die wechselseitige Energiedichte ist Null. Für die Normierung dieser Funktionen kann man so überlegen: Beim endlichen Gebiet bedeutete die Vergrößerung dieses Gebietes ein Anwachsen der Feldenergie, im Limes $\Sigma \rightarrow \infty$ würde diese gar unendlich gross, was physikalisch plausibel erscheint, benötigte doch ein Generator zum „Auf-

⁴⁾ Die Konstanten, welche den Ablauf der gedämpften Schwingungen charakterisieren, lassen sich auf folgende Weise physikalisch einfach deuten: der Zeitfaktor $\exp(-x_\nu ct)$ der ν^{ten} gedämpften Eigenschwingung mit $x_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\lambda_\nu} - j \frac{2\pi}{\lambda_\nu}$ (λ_ν ist die

Wellenlänge der freien Schwingung, σ_ν das Dekrement) genügt einer linearen homogenen Diff.Gl. mit konstanten Koeffizienten, die wir mit denen der gleichlautenden Diff.Gl. eines geschlossenen elektrischen Schwingungskreises identifizieren. Also aus

$$\frac{d^2 J_\nu}{dt^2} + \frac{R_\nu}{L_\nu} \frac{dJ_\nu}{dt} + \frac{1}{C_\nu L_\nu} J_\nu = 0$$

folgt:

$$c \frac{\sigma_\nu}{\lambda_\nu} \rightarrow \frac{R_\nu}{2L_\nu}; \quad c \frac{2\pi}{\lambda_\nu} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{R_\nu}{2L_\nu}\right)^2 - \frac{1}{C_\nu L_\nu}}$$

Dieser Vergleich gestattet e.g. den Ersatz des Strahlers durch eine Kombination von unendlich vielen mit Widerstand behafteten, jeder einer Eigenschwingung des Strahlers zugeordneten Schwingkreisen. Ferner ergibt sich wegen der Dämpfung eine Verkürzung der Wellenlänge gegenüber der nach der Thomsonschen Formel berechneten; diese Verkürzung nimmt mit wachsender Ordnungszahl der Eigenschwingung ständig ab, usw.

$$\Delta \frac{M_\mu}{\rho} + x_\mu^2 \frac{M_\mu}{\rho} = 0$$

Schreibt man H an Stelle von $\frac{M}{\rho}$, multipliziert man

die erste Gl. mit H_μ , die zweite mit H_ν und subtrahiert man, so kommt:

$$H_\mu \Delta H_\nu - H_\nu \Delta H_\mu = (x_\mu^2 - x_\nu^2) H_\mu H_\nu$$

Bei endlichem Grundgebiet (σ, Σ) und homogenen Randbedingungen auf σ, Σ wäre nach dem Greenschen Satz

füllen“ des unendlichen Raumes mit Energie eine unendlich lange Zeit; die geleistete Arbeit selbst würde ins Unendliche wachsen. Glücklicherweise ist aber der Energieinhalt unserer gedämpften Eigenfunktionen beschränkt; er lässt sich, was einer festen Wahl der Anfangsamplitude gleichkommt, normieren.

Eine gedämpfte Eigenschwingung des unendlichen Raumes würde nach der phenomenologischen Feldtheorie immerhin erst nach unendlich langer Zeit von ihrem Anfang an gerechnet zur Ruhe kommen. Praktisch jedoch ist die Schwingung bereits nach Bruchteilen einer Sekunde vollständig verklungen. Wir können vorübergehend die Dauer der Schwingung so festlegen, dass die Endamplitude in einem bestimmten Verhältnis zum Anfangswert steht. Ist also beispielsweise die Dauer der ν^{ten} Schwingung T_ν , so ergeben sich folgende Möglichkeiten, ihren Energieinhalt zu berechnen:

- Als Zeit und Oberflächenintegral auf σ .
- Als Volumenintegral über den von der Schwingung zwischen den Zeitpunkten ihres Beginns und ihres Aufhörens erfüllten Raum. In unserem Beispiel liegt dieser Raum zwischen zwei konfokalen Ellipsoidschalen, deren Parameter entsprechend T_ν voneinander verschieden sind und die sich mit Lichtgeschwindigkeit vergrössern.
- Als Poyntingsche Energieströmung über die unendlich ferne Kugelfläche während der Zeit

$$\infty \div \infty + T_\nu \text{ oder } 0 \div T_\nu$$

Als gegeben scheint uns c) der einfacheren asymptotischen Form der Schwingung wegen. (Es erweist sich übrigens, wo über die Zeit zu integrieren ist, wegen des exponentiellen Abklingens einfacher, vom Anfang t_0 bis $t = \infty$ zu integrieren.)

Ist also die ν^{te} Eigenfunktion zu normieren, so hat man, wenn wieder die normalen Bezeichnungen aus der ersten Mitteilung verwendet werden:

$$\frac{M_\nu(u, y)}{\rho} e^{-x_\nu ct} = \frac{\mathcal{E}_\nu(y) \mathcal{H}_\nu(u)}{\rho} e^{-x_\nu ct}, \quad x_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\lambda_\nu} - j \frac{2\pi}{\lambda_\nu}$$

der Ausdruck geht in 1. Abrahamscher Näherung in y und für $u \rightarrow \infty$ über in

$$\frac{e^{-x_\nu ct}}{u} \cdot \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2}}{\cos \frac{\nu\pi}{2}} \quad \begin{matrix} \cos & \text{für ungerade } \nu \\ \sin & \text{für gerade } \nu \end{matrix}$$

Und die Norm der Funktion folgt aus

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} \int_{t=0}^{\infty} \frac{|M_{\nu}(u, y) e^{-x_{\nu} c t}|^2}{\rho^2} d\Sigma dt = \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-2 \frac{\sigma_{\nu}}{\lambda_{\nu}} c t}}{u^2} \frac{\left(\frac{\sin \nu \frac{\pi}{2}}{\cos \nu \frac{\pi}{2}} \right)^2}{1 - y^2} d\Sigma dt$$

Das Flächenelement ist aber $d\Sigma = 2\pi u^2 dy$; wir integrieren und erhalten für die normierte ν^{te} Eigenfunktion

$$\frac{M_{\nu}(u, y)}{\sqrt{(u^2 - e^2)(1 - y^2)}} \frac{\sqrt{\frac{2\sigma_{\nu}}{\lambda_{\nu}} c}}{\sqrt{\int_{-1}^{+1} \frac{\left(\frac{\sin \nu \frac{\pi}{2}}{\cos \nu \frac{\pi}{2}} \right)^2}{1 - y^2} dy}}$$

Das im Nenner stehende Integral lässt sich leicht berechnen; man findet mit den Bezeichnungen von Jahnke-Emde:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2 \frac{\nu \pi}{2}}{1 - y^2} dy = \frac{1}{2} \left\{ \ln \gamma + \ln 2\nu\pi - ci 2\nu\pi \right\} \quad \nu \text{ ungerade}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \frac{\nu \pi}{2}}{1 - y^2} dy = \frac{1}{2} \left\{ \ln \gamma + \ln 2\nu\pi - ci 2\nu\pi \right\} \quad \nu \text{ gerade}$$

Das so normierte Orthogonalsystem der Eigenfunktionen für ein Gebiet, das sich von einer inneren geschlossenen Begrenzungsfläche aus ins Unendliche erstreckt, besitzt einen natürlich definierten Anwendungsbereich. Die Funktionen beschreiben jede einen Normalvorgang, der als elektromagnetische Störung zu einer gegebenen Zeit auf der Oberfläche des sehr gut leitenden Ellipsoides seinen Anfang nimmt.

Eine beliebige erzwungene statische Ladungsverteilung an der Leiteroberfläche, die plötzlich durch den Wegfall der äusseren Kräfte sich selbst überlassen wird, lässt sich nach dem vorliegenden Orthogonalsystem in eine Reihe von „Normalvorgängen“ entwickeln, wobei jeder Vorgang einen eigenen zeitlichen Verlauf besitzt.

Der Raumteil der definierten Eigenfunktionen erfüllt unabhängig die Wellengleichung; schreiben wir deshalb auf der Quellfläche, d. i. die Leiteroberfläche, sei es eine bestimmte erzwungene Bewegung der Ladungen, sei es die Gegenwart der EMK eines Generators vor, so muss es möglich sein, den entstehenden Schwingungszustand aus Normalvorgängen aufzubauen (die Wirkung der EMK konnte ja als Sprung der Ladungsdichte erklärt werden).

Gelingt es, aus den unendlich vielen Lösungen der Gleichung $\Delta \frac{M_{\nu}}{\rho} + x_{\nu}^2 \frac{M_{\nu}}{\rho} = 0$ eine konvergente

Reihe zu bilden, die unserer erzwungenen Quellenverteilung an der Leiteroberfläche entspricht, so ist die uns gestellte Aufgabe gelöst. Mit der Orthogonalisierung und Normierung unseres Funktionensystems (wobei die Tatsache des unendlichen Grundgebietes nicht mehr direkt in Erscheinung tritt) und der grundsätzlichen Beschränkung der Quellverteilung auf die Leiteroberfläche ist das Problem der Reihenentwicklung durch nichts mehr von dem ein

endliches Gebiet betreffenden unterschieden; die bekannten Entwicklungssätze können deshalb angewendet werden.

V.

Die Diff. Gl. (1)' ist mit Ausnahme der Erregungszone überall homogen, d. h. man erhält in der Greenschen Funktion des Differentialausdrucks links (x ist reell und deshalb kein Eigenwert) unmittelbar die Lösung des Problems selbst. Diese Lösung heisst

$$\text{Re } M(u, y) e^{-i\omega t} \equiv \text{Re } \rho H e^{-i\omega t}$$

Zu diesem Zweck bilden wir die Zackenfunktion, d. h. die Reihendarstellung der Unhomogenität durch die Eigenfunktionen. Dann lässt sich die von Prof. Sommerfeld (loc. cit. pag. 33) gegebene Ableitung anwenden.

Abkürzend schreiben wir wieder $\frac{M_{\nu}}{\rho} = H_{\nu}$, dazu

$j \frac{\omega}{c} E_0 = S(u_0, \eta_s)$, dann lautet die Diff. Gl. (1)'

$$\Delta H + x^2 H = S(u_0, \eta_s) \quad a)$$

Die Eigenfunktionen genügen der Diff. Gl.

$$\Delta H_{\nu} + x_{\nu}^2 H_{\nu} = 0 \quad b)$$

Weiter soll $S = \sum a_{\nu} H_{\nu}$ $H = \sum b_{\nu} H_{\nu}$ $c)$

somit ist $\Delta H = - \sum b_{\nu} x_{\nu}^2 H_{\nu}$ $d)$

$$\Delta H + x^2 H = \sum b_{\nu} (x^2 - x_{\nu}^2) H_{\nu} \quad e)$$

Wegen a) folgt somit $b_{\nu} = \frac{a_{\nu}}{x^2 - x_{\nu}^2}$

Für die Entwicklungskoeffizienten der ausgearteten Zacke (der Grenzübergang wird in der in Vorbereitung befindlichen Arbeit gebracht) erhält man

$$a_{\nu} = H_{\nu}(u_0, \eta_s) \quad \text{daraus} \quad b_{\nu} = \frac{H_{\nu}(u_0, \eta_s)}{x^2 - x_{\nu}^2}$$

und die Lösung von a), wenn man auf die ursprünglichen Bezeichnungen zurückgeht:

$$M(u, y) = jz \frac{E_0}{\sqrt{(u_0^2 - e^2)(1 - \eta_s^2)}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{M_v(u, y) M_v(u_0, \eta_s)}{x^2 - x_v^2}$$

Die Lösung genügt

1. der Wellengleichung,
2. der homogenen Randbedingung auf u_0 , da die Glieder der Reihe ihr einzeln genügen,
3. der Ausstrahlungsbedingung wenn, wie das für die Raumfaktoren der Eigenschwingungen der Fall sein muss, die Laufzeit berücksichtigt wird,
4. wegen des Anwachsens des Nenners der Konvergenzbedingung wie analoge Entwicklungen für ein endliches Gebiet.

Unser Ausdruck unterscheidet sich formal durch nichts von der erzwungenen Schwingung eines end-

lichen Raumgebietes. Und doch besteht ein grosser Unterschied, kann doch beim endlichen Gebiet, wo die x_n^2 reell waren, ein vollständiges Verschwinden eines Nenners eintreten, dann nämlich, wenn die erregende Frequenz mit einer der Eigenschwingungszahlen übereinstimmt. Nicht so in unserem Fall, wo neben dem reellen x^2 die x_v^2 von Haus aus komplex sind und somit bei endlicher Erregung die Amplitude immer beschränkt bleibt. Dass *Resonanzen* auftreten, bedingt die Übereinstimmung der reellen Teile von x^2 und x_v^2 . Eine Reihe wichtiger Schlüsse lässt sich aus unserer Lösung ziehen. Auf die *Rezi-*

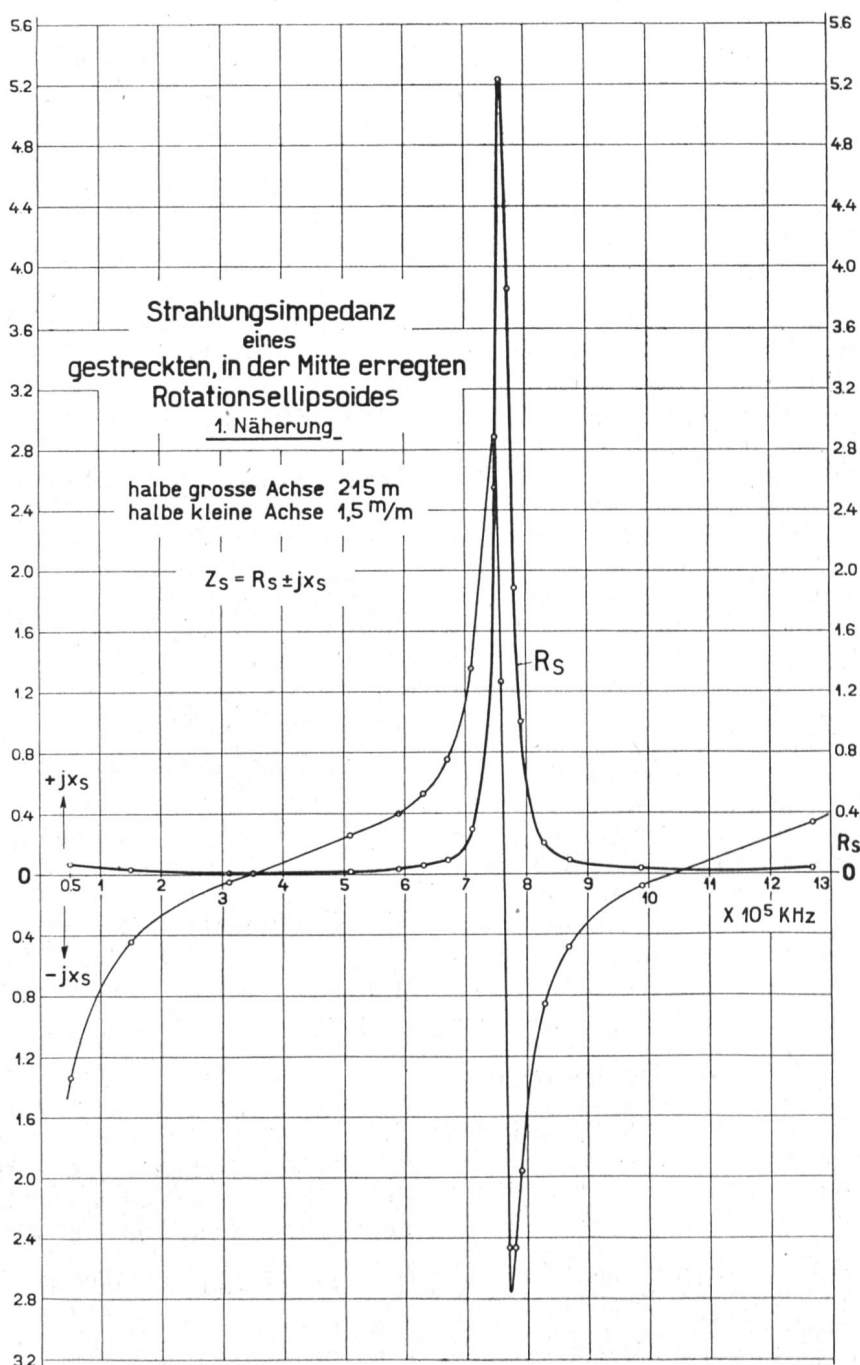


Fig. 1.

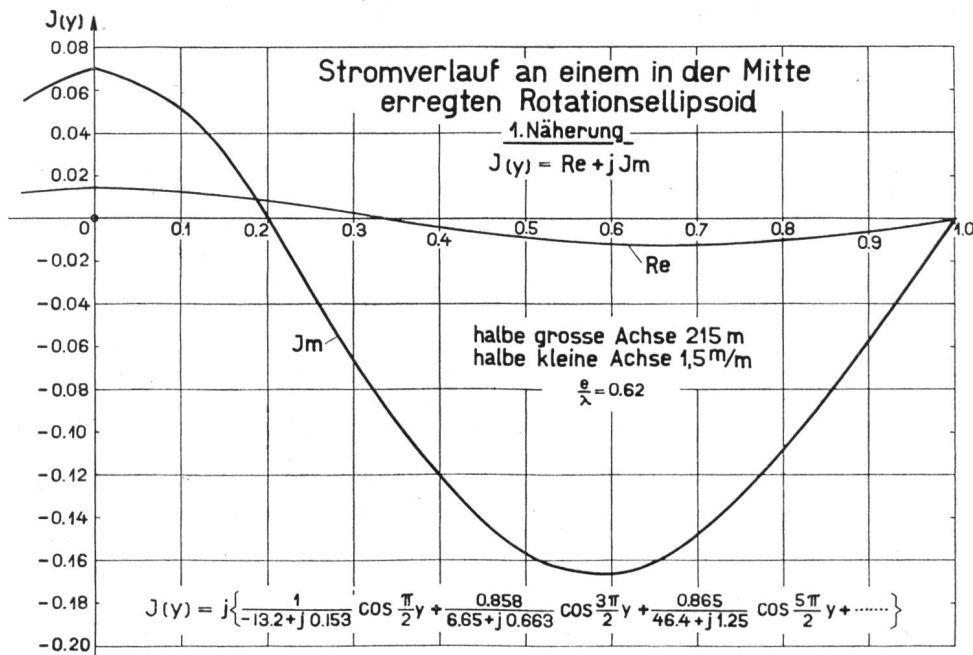


Fig. 2.

prozilüt zwischen Aufpunkt und Quellpunkt in u_o wurde in der ersten Mitteilung bereits hingewiesen. Unsere Methode der gedämpften Eigenfunktionen lässt sich auch auf *zylindrische Leiter* anwenden, für welche E. Hallén (1. c.) die Eigenschwingungen mit grosser Genauigkeit berechnet hat.

Wie *belastete Leiter* zu behandeln sind, wurde in der ersten Mitteilung bereits angegeben.

Um ein Bild vom grundsätzlichen Verhalten der Lösung zu gewinnen, haben wir für ein sehr gestrecktes Ellipsoid von 430 m Länge und 1,5 mm halber kleiner Achse den Scheineingangswiderstand für ein breites Frequenzband in unbenannten Einheiten berechnet (Fig. 1). In Fig. 2 ist die Stromverteilung auf demselben Ellipsoid mit der Annahme $\frac{2e}{\lambda} = 0.62$ dargestellt. In beiden Fällen ist der auch in 1. Näherung zeitraubenden Rechnung wegen die Erregungszone in $y = \eta_s = 0$ angenommen; die geradzahigen Eigenfunktionen fallen damit fort.

VI.

Das Studium der speziellen Aufgabe erzwungener Schwingungen am Rotationsellipsoid führt uns in seinen Ergebnissen über den Rhythmus der ursprünglichen Fragestellung hinaus zu einem Lösungsansatz bei allgemeiner Problemstellung. Von besonderem technischem Interesse dürfte u. a. die Behandlung der erzwungenen Schwingungen an zylindrischen Leitern sein.

Um zu allgemeinen Lösungsansätzen zu gelangen, wobei auch die Rotationssymmetrie nicht unbedingt gefordert wird, ist es notwendig, das Feld anstatt aus den klassischen Feldgleichungen, aus dem *Hertzschen Vektor* oder aus den zu diesem in ein-

facher Beziehung stehenden *elektromagnetischen Potentialen* zu berechnen.

Wir beschränken uns auf eine grundsätzliche Formulierung in einem Cartesischen Koordinatensystem, wo x, y, z die Koordinaten des Aufpunktes, ξ, η, ζ diejenigen des Quellpunktes bedeuten. Man hat mit üblichen Bezeichnungen \mathfrak{A} und φ für das Vektorpotential bzw. das Skalarpotential im Gaußschen Maßsystem:

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathfrak{A}}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c} i \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x, y, z) \quad i = i(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -4\pi q \quad \varphi = \varphi(x, y, z) \quad q = q(\xi, \eta, \zeta)$$

Anstatt der Stromdichte i schreiben wir mit der Annahme grosser Leitfähigkeit $\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$, wobei ξ, η, ζ einen auf der Leiteroberfläche σ liegenden Punkt festlegen. Die Ladungsdichte q ist als Flächendivergenz des Vektors \mathfrak{E} an der Leiteroberfläche definiert. Die Erregung sei wieder zonal, die betreffende Zone S durch die Angaben $S(\xi, \eta, \zeta_o)$ gegeben.

Dann gilt für die erzwungene Schwingung

$$\Delta \mathfrak{A} + x^2 \mathfrak{A} = -\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$$

und für die ν^{te} Eigenschwingung

$$\Delta \mathfrak{A}_\nu + x_\nu^2 \mathfrak{A}_\nu = -\mathfrak{S}_\nu(\xi, \eta, \zeta)$$

Wir können aber nach Vorausgegangenem die erzwungene Quellverteilung in die Reihe entwickeln:

$$\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta) = j x E_o \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{S}_\nu(\xi, \eta, \zeta) \mathfrak{S}_\nu(\xi, \eta, \zeta_o)}{x^2 - x_\nu^2}$$

Und die Lösung für das Vektorpotential der erzwungenen Schwingung lautet:

$$\mathfrak{A}(x, y, z, t, x) = -j x E_o \int_{\sigma} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{S}_\nu(\xi, \eta, \zeta) \mathfrak{S}_\nu(\xi, \eta, \zeta_o)}{x^2 - x_\nu^2} \right) \frac{e^{j x (ct - r)}}{r} d\sigma$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

Das Vektorpotential kommt in Resonanz mit der y^{ten} *E. Sch.*, wenn das aufgedrückte x^2 mit dem Realteil von x^2 übereinstimmt. Das Skalarpotential φ setzt sich, wie bereits in der ersten Mitteilung ausgeführt, aus zwei Teilpotentialen, herrührend von der Ladungsverteilung auf σ beidseitig der Erregungszone zusammen und erfährt beim Durchgang durch die Generatorzone einen Sprung von der Grösse der EMK E_0 .

Auch hier wie beim Beispiel des Rotationsellipsoids wird die Quellverteilung auf σ nach den Eigenfunktionen des unendlichen Raumes entwickelt (vgl. pag. 166).

Die Anwendung der hier entwickelten Theorie auf zylindrische Leiter löst z. B. die seit langem strittige Frage der Wellenlängenverkürzung auf Drahtantennen. Das Mass der Verkürzung wird offenbar bestimmt durch diejenige der nächstgelegenen Eigenschwingung (vgl. die Fussnote Seite 164). Nach den Rechnungen von Hallén sind diese Verkürzungen bei den Zylindereigenschwingungen erheblich grösser als beim gestreckten Ellipsoid.

Zusammenfassung.

Die Differentialgleichung durch innere eingeprägte Kräfte erzwungener elektrischer Schwingungen am verlängerten Rotationsellipsoid bei zonaler Anregung wird für beliebige Exzentrizitäten exakt gelöst. Die in der

ersten vorläufigen Mitteilung (*Techn. Mitteilungen der schweiz. Telegraphen- und Telefonverwaltung Nr. 6, 1941*) angegebenen Erweiterungen des Ansatzes für die Wirkung konzentrierter Belastungen (Induktivitäten, Kapazitäten, Widerstände) können nach den jetzt vorliegenden Ergebnissen konkret behandelt werden. Es wird gezeigt, dass die eigentlichen gedämpften elektrischen Eigenschwingungen an geschlossenen Flächen bei sich ins Unendliche erstreckendem Grundgebiet ein orthogonales normierbares Funktionensystem bilden. Diese Funktionen können zur Darstellung eines Ausgleichsvorgangs bei beliebig vorgeschriebener anfänglicher Ladungsverteilung auf der betrachteten Fläche benützt werden. Wird die Ladungsverteilung nach periodischem Gesetz durch eine eingeprägte EMK unterhalten, so entsteht die Lösung des Problems der erzwungenen Schwingungen.

Die Methode der Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen des unendlichen Raumes lässt sich auf beliebig geformte Leiter verallgemeinern, insbesondere auf solche von zylindrischer Form, für welche die Lösung der gedämpften Schwingungen in der Literatur vorhanden ist.

In praktischer Anwendung der Theorie werden die berechnete Stromverteilung und der Scheineingangswiderstand an einem gestreckten Rotationsellipsoid in 1. Näherung graphisch veranschaulicht.

Bern, 4. September 1942.

Fehlerortsberechnung bei Isolationsdefekten an Kabeln verschiedener Aderdurchmesser.

621.317.333.4

Heute sind unsere Teilnehmerkabelanlagen vielfach aus Kabellängen verschiedener Aderdurchmesser zusammengespleisst. Für die Kabeladern wird noch ausschliesslich Kupfer verwendet. Im folgenden soll angegeben werden, wie der Fehlerort bei Isolationsdefekten an solchen Leitungen verschiedener Querschnitte berechnet werden kann.

Es ist nach den Methoden Murray oder Varley R_x in Ohm zu bestimmen. Die Entfernung des Fehlerortes von der Meßstelle in Meter kann dann folgendermassen berechnet werden:

Da der spezifische Widerstand ρ der verschiedenen Kabel gleich ist, lassen sich die Längen für jede Sektion durch Multiplikation mit einem Faktor γ auf

die Aequivalenz des in den Lokalkabelanlagen vorherrschenden Aderdurchmessers 0,8 bringen. Es besteht die Proportion

$$\gamma : 1 = \frac{1}{d^2} : \frac{1}{0,8^2}, \text{ daraus} \\ \gamma = \frac{0,8^2}{d^2}$$

Die Werte γ der bei uns gebräuchlichen Aderdurchmesser können beistehender Tabelle entnommen werden.

d	γ
0,6	1,778
0,8	1
0,9	0,790
1,0	0,640
1,2	0,444
1,4	0,327
1,5	0,284
1,8	0,198
2,0	0,160

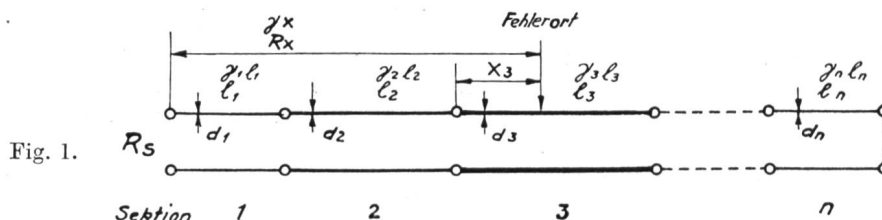


Fig. 1.

Es bedeuten:

$\gamma_1 l_1$ = Aequivalenzlänge der Kabelsektion 1

$\sum \gamma l$ = Aequivalenzlänge der Meßstrecke

γx = Aequivalenzentfernung des Fehlerortes von der Meßstelle

k = Widerstand von 1 m Ader 0,8 mm Durchmesser

x_3 = Entfernung des Fehlerortes von Anfang Sektion 3 in m.

Dann gelten die Beziehungen:

$$\sum \gamma l = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots + \gamma_n l_n$$

$$k = \frac{R_s}{2 \sum \gamma l}$$

$$\gamma x = \frac{R_x}{k}$$