Application du calcul des probabilités à la détermination du nombre d'organes dans un bureau de téléphonie automatique

Autor(en): **Merker, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Technische Mitteilungen / Schweizerische Telegraphen- und Telephonverwaltung = Bulletin technique / Administration des télégraphes et des téléphones suisses = Bollettino tecnico / Amministrazione dei telegrafi e dei telefoni svizzeri**

Band (Jahr): **6 (1928)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-873726

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Bern, 1. II. 1928 № 1 Jahrgang - Année - Anno VI

Technische Mitteilungen

Herausgegeben von der schweiz. Telegraphen- und Telephon-Verwaltung

Bulletin Technique — Bollettino Tecnico

Publié par l'Administration des Télégraphes et des Téléphones suisses

Pubblicato dall' Amministrazione dei Telegrafi e dei Telefoni svizzeri

An unsere Privatabonnenten.

Um allfälligen Unterbrechungen in der Zustellung der „Technischen Mitteilungen" vorzubeugen, empfiehlt es sich, Ihr Jahresabonnement rechtzeitig zu erneuern. Sie werden daher gebeten, den Abonnementsbetrag für das laufende Jahr, sofern er nicht bereits entrichtet worden ist, so bald als möglich bei der Poststelle Ihres Wohnortes einzubezahlen.

Die „Technischen Mitteilungen" werden auch im neuen Jahre bestrebt sein, die technische Weiterbildung ihrer Leser zu fördern und über die Entwicklung der schweizerischen Fernmeldetechnik Aufschluss zu geben. Wir zweifeln nicht daran, dass diese Ziele geeignet sind, uns auch in Zukunft einen grossen Leserkreis zu sichern.

A nos abonnés privés.

Pour éviter des interruptions éventuelles dans la distribution du „Bulletin technique", nous recommandons à nos abonnés de renouveler leur abonnement en temps utile. Nous les prions donc de vouloir bien verser aussitôt que possible à l'office postal de leur domicile, à moins qu'ils ne l'aient déjà fait, le montant de l'abonnement pour l'année courante.

Le „Bulletin technique" s'efforcera, en 1928 également, de développer toujours davantage les connaissances techniques de ses lecteurs et de tenir ceux-ci au courant du développement de la téléphonie et de la télégraphie en Suisse. Nous ne doutons pas que la poursuite de ce but ne soit de nature à nous assurer, à l'avenir comme par le passé, un cercle très étendu de lecteurs.

Application du calcul des probabilités à la détermination du nombre d'organes dans un bureau de téléphonie automatique.

Par le Dr M. Merker, Bell Telephone Mfg Co., Anvers.

1. Le problème à résoudre.

Un des problèmes les plus importants qui se posent en téléphonie automatique est d'assurer un bon service de communication entre deux postes téléphoniques quelconques. Dans le système manuel, la liaison entre deux postes se fait par l'intervention d'un ou de plusieurs intermédiaires humains. Le système automatique permet de supprimer cette intervention humaine et la remplace par des organes mécaniques situés au bureau central et qui, sous la commande d'un abonné demandeur, établissent la liaison voulue.

Les appels qui arrivent au bureau central ne sont pas uniformément répartis sur toute la journée. Les statistiques montrent qu'il existe une heure appelée l'heure chargée pendant laquelle le trafic est plus intense que durant le reste de la journée. D'autre part, on a constaté que les durées d'occupation des lignes d'abonnés pendant l'heure chargée varient d'un jour à l'autre et diffèrent entre elles au cours de la même journée, comme le montre schématiquement la figure 1.

Etant donné que les appels n'arrivent pas tous au même instant et durent seulement une fraction d'heure, il est évident que le nombre d'organes de jonction entre abonnés peut toujours être inférieur au nombre d'abonnés. Il y a lieu d'une part, pour des raisons d'économie, de réduire autant que possible le nombre d'organes de jonction. Mais, d'autre part, si l'on pousse la réduction trop loin, le nombre d'appels sans résultat, tolérable lorsqu'il est assez petit, peut devenir trop grand. Le problème que nous nous proposons de résoudre ici est donc le suivant: Etant donné le nombre d'abonnés d'un bureau téléphonique, quel est le nombre d'organes

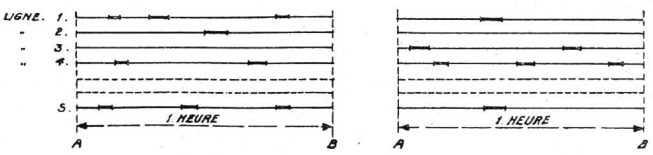


FIG. 1.

Représentation du trafic pendant l'heure chargée de deux journées prises au hasard. Les traits épais représentent la durée d'une conversation.

de jonction à prévoir pour que le nombre d'appels sans résultat, par suite de la limitation du nombre d'organes, soit très minime et égale, par exemple, à 0,001? Ce problème peut être résolu par le calcul des probabilités, mais la connaissance du nombre d'abonnés ne suffit pas pour le résoudre, car le nombre d'organes à prévoir ne dépend pas seulement du nombre des lignes d'abonnés mais aussi de leurs durées d'occupation pendant l'heure chargée. En effet, si la conversation est courte, l'appareil de jonction redevenant libre peut desservir un autre appel qui arrive immédiatement après la première conversation, et le nombre d'organes de jonction peut donc, dans ce cas, être plus petit que s'il s'agit de conversations plus longues.

Ces durées, comme on l'a vu précédemment, ne sont pas constantes; mais nous verrons dans la suite que, pour la détermination du nombre d'organes nécessaires au moyen du calcul des probabilités, il suffit de connaître seulement la moyenne des durées.

2. *Quelques principes du calcul des probabilités.*

Nous allons d'abord rappeler quelques principes de la theorie de la probabilité, qui seront appliqués au calcul des probabilités en téléphonie.

Pour déterminer la probabilité d'un événement, on a habituellement recours au jeu de dés. Pour la détermination de la probabilité en téléphonie, il est préférable de recourir au jeu du disque tournant. Ce disque, qui porte des secteurs rouges et bleus, peut tourner autour de son axe. En regard, on a placé un index fixe. On fait tourner le disque, qui s'arrête après un certain temps, et l'on demande combien il y a de chances pour qu'un secteur rouge s'arrête en face de l'index.

I. Premier principe. Définition de la probabilité. La probabilité pour qu'un événement se produise est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles. Ainsi, la probabilité pour qu'un secteur rouge se place en face du repère sera $\frac{l_1}{l}$, où l_1 désigne la somme des longueurs des arcs formant les secteurs rouges et l la circonférence du cercle. En divisant l'arc du cercle en des arcs élémentaires infiniment petits de longueur dl, le nombre des cas favorables qui peuvent se produire sera $\frac{l_1}{dl}$ et celui des cas possibles $\frac{l}{dl}$. Leur rapport $\frac{l_1}{l}$ représente donc la probabilité cherchée.

II. Deuxième principe. Toute probabilité est une fraction pure, d'après la définition même de la probabilité donnée au paragraphe précédent (premier principe). Les nombres 0 et 1, limites de la fraction, représentent respectivement l'impossibilité et la certitude, qui sont elles-mêmes les limites de la probabilité. Ainsi, la probabilité qu'un secteur rouge d'un disque peint entièrement en bleu s'arrête en face du repère sera égale à 0, car, en ce cas, l_1 est nul, ce qui veut dire „impossibilité". De même, la probabilité qu'un secteur rouge d'un disque peint entièrement en rouge s'arrête devant le repère sera égale à 1, car en ce cas $l_1 = l$, ce qui veut dire „certitude".

III. Troisième principe. Si l'on envisage plusieurs événements qui *s'excluent mutuellement*, la probabilité pour qu'un de ces événements se produise est égale à la somme des probabilités de ces événements. Si $p_1, p_2 \ldots p_k \ldots p_n$ représentent respectivement les probabilités de n événements pouvant se produire, sans que deux d'entre eux soient simultanés, la probabilité pour qu'un quelconque des k premiers de ces événements se produise sera égale à

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$$

IV. Quatrième principe. La probabilité pour que n événements *indépendants*, dont les probabilités respectives sont $p_1\ p_2 \ldots p_n$ se produisent tous est le produit de ces probabilités

$$p = p_1\ p_2 \ldots p_n$$

Ainsi la probabilité pour que les secteurs rouges de deux disques D et D' s'arrêtent tous les deux en face de leurs repères est $\frac{l_1}{l} \times \frac{l'_1}{l'}$, si $\frac{l_1}{l}$ et $\frac{l'_1}{l'}$ représentent les probabilités respectives des deux disques, telles que les a définies le premier principe.

V. Cinquième principe. Supposons n causes dont chacune peut donner naissance à un certain événement. Si les probabilités de ces événements sont respectivement $p_1, p_2 \ldots p_n$, la probabilité pour qu'un de ces événements se produise, lorsqu'on ignore celle des causes qui permet à l'événement d'avoir lieu, sera égale à

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}$$

Ainsi, reprenons les deux disques D et D' dont les probabilités, pour qu'un secteur rouge s'arrête en face du repère, sont respectivement $\frac{l_1}{l}$ et $\frac{l'_1}{l'}$. Si l'on fait tourner un disque *pris au hasard*, la probabilité pour que ce soit un secteur rouge qui s'arrête en face du repère sera égale à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l_1}{l} + \frac{l'_1}{l'}\right)$$

Ce dernier principe n'est en réalité qu'une conséquence des troisième et quatrième principes.

Dans la détermination de la probabilité du disque tournant, on a supposé le disque mobile et l'index fixe. Il est bon de noter que la probabilité resterait la même si le disque était fixe et l'index tournant ou si tous les deux étaient mobiles.

3. *Interprétation de la probabilité en téléphonie. Probabilité de trouver une ligne occupée.*

Nous allons d'abord préciser ce qu'on entend par „probabilité de trouver une ligne occupée". Supposons que, pendant une heure chargée déterminée k, on connaisse la somme des durées de conversation t_{ik} d'une ligne d'abonné portant le numéro i; mais qu'on ignore dans quels intervalles de l'heure s'effectuent ces conversations, s'il y en a plusieurs. Supposons ensuite qu'un contrôleur se présente au bureau central en un moment quelconque t' de l'heure chargée. On demande quelle est la probabilité pour que ce contrôleur trouve, au moment de son arrivée, la ligne i en cours de conversation.

Si l'on représente l'heure par la longueur de ligne AB (fig. 2) et la durée des conversations par CD,

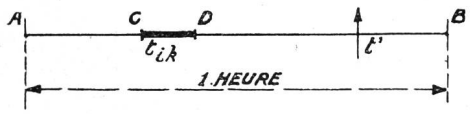


FIG. 2.

Représentation de la durée totale des conversations CD = t_{ik} de la ligne i pendant l'heure chargée AB. t', instant de l'arrivée du contrôleur.

qui est elle-même composée de plusieurs appels arrivant au hasard, la question se ramène à la détermination de la probabilité pour qu'un des points de la ligne CD tombe au point t', moment d'arrivée du contrôleur et qui est analogue au cas d'un disque tournant.

Nous supposerons que la durée t_{ik} est composée d'un nombre infiniment grand d'appels m_1, d'une durée infiniment petite dt chacun, de sorte qu'on ait

$$t_{ik} = m_1 dt$$

Ces appels peuvent être répartis dans l'heure de C_m^{m1} manières différentes, où m est le nombre infiniment grand d'intervalles infiniments petits dt dont l'heure est composée (durée d'une heure h = mdt), C_m^{m1} est le nombre de combinaisons de m objets m_1 à m_1. Les cas favorables seront ceux où un élément dt de t_{ik} coïncide avec le moment t' et leur nombre est

$$C_{m-1}^{m_1-1}$$

La probabilité cherchée sera donc d'après le premier principe égale à

$$\frac{C_{m-1}^{m_1-1}}{C_m^{m1}} = \frac{(m-1)!}{(m_1-1)!\ (m-m_1)!} : \frac{m!}{m_1!\ (m-m_1)!} = \frac{m_1}{m} = \frac{t_{ik}}{dt} : \frac{h}{dt} = \frac{t_{ik}}{h}$$

ou simplement égale à t_{ik} exprimé en fraction de l'heure.

La probabilité pour que le contrôleur ne trouve pas au moment de son arrivée la ligne i occupée sera

$$\frac{C_{m-1}^{m1}}{C_m^{m1}} = \frac{(m-1)!}{m_1!\ (m-m_1-1)!} : \frac{m!}{m_1!\ (m-m_1)!} = \frac{m-m_1}{m} = 1 - \frac{m_1}{m} = 1 - t_{ik}$$

Supposons maintenant qu'on ne connaisse pas la durée de conversation de la ligne pendant l'heure chargée k, mais qu'on connaisse la somme des durées de conversations

$$t_{i1} + t_{i2} + \ldots + t_{iq}$$

effectuées par la ligne i pendant q heures chargées. Si un contrôleur arrive au bureau central en un moment quelconque t' pendant l'heure chargée k prise parmi les q heures considérées, la probabilité pour qu'il trouve au moment de son arrivée la ligne i occupée sera, d'après le cinquième principe, égale à

$$p_i = \frac{t_{i1} + t_{i2} + \ldots + t_{iq}}{q} = t_i$$

Inversement, si p_i est la probabilité pour qu'on trouve la ligne i occupée, p_i représentera également la durée moyenne de conversation de la ligne i pendant l'heure chargée.

4. *Probabilité de trouver deux lignes occupées simultanément.*

De la même manière, on peut envisager la question de la détermination de la probabilité pour qu'un contrôleur trouve, au moment de son arrivée au bureau central, les deux lignes d'abonnés i et j simultanément occupées.

Supposons qu'on ne connaisse pas la durée de leur occupation simultanée pendant l'heure chargée considérée, mais qu'on connaisse la somme des durées de ces occupations simultanées

$$t_{ij1} + t_{ij2} + \ldots + t_{ijq}$$

pendant q heures chargées. On aura comme précédemment

$$p_{ij} = \frac{t_{ij1} + t_{ij2} + \ldots + t_{ijq}}{q} = t_{ij}$$

c'est-à-dire que la probabilité pour qu'on trouve deux lignes déterminées occupées est donnée par la durée moyenne de leurs occupations simultanées pendant l'heure chargée.

Inversement, si p_{ij} est la probabilité pour qu'on trouve les deux lignes i et j simultanément occupées, p_{ij}, exprimé en heures, représentera également la durée moyenne de leur occupation simultanée pendant l'heure chargée.

5. *Formule de Bernoulli.*

Nous nous proposons de résoudre la question suivante:

Dans un bureau téléphonique dont le nombre d'abonnés est S, on a mesuré les durées des conversations de tous les abonnés pendant un grand nombre d'heures chargées q et l'on a trouvé que la somme de ces durées est égale à θ heures. Dans ces conditions $\frac{\theta}{S} = \tau$, sera la durée moyenne de conversation en heures d'un abonné pendant la longue période de q heures chargées.

$\frac{\theta}{Sq} = \frac{\tau}{q} = T$ sera la durée moyenne de conversation en heures d'un abonné pendant l'heure chargée.

$\frac{\theta}{q} = ST = y$ sera la durée moyenne de conversation en heures de tous les abonnés pendant l'heure chargée.

On suppose, pour le moment, que le nombre d'organes de jonction est *illimité*, de sorte que si un appel arrive, il trouvera toujours à sa disposition un appareil de jonction libre pour établir la connexion. On fait abstraction des obstacles résultant de l'occupation de l'abonné appelé et l'on demande quelle est, dans ces conditions, la probabilité de trouver r lignes de jonction simultanément occupées?

On supposera que *la durée totale de conversation pendant un très grand nombre d'heures chargées est la même pour tous les abonnés*, c'est-à-dire que si

$$t_{11} + t_{12} + \ldots + t_{1q}$$

représente la durée totale de conversation de la ligne portant le numéro 1 pendant q heures chargées, le nombre q étant très grand et si

$$t_{21} + t_{22} + \ldots + t_{2q}$$

représente celle de la ligne d'abonné numéro 2 et ainsi de suite, on aura

$$t_{11} + t_{12} + \ldots + t_{1q} = t_{21} + t_{22} + \ldots + t_{2q} = \ldots$$
$$= t_{s1} + t_{s2} + \ldots + t_{sq} = \tau$$

La probabilité pour qu'à un moment t' de l'heure chargée une ligne d'abonné i dont *on ignore la durée de conversation* pendant cette heure soit occupée, sera égale à

$$\frac{t_{i1} + t_{12} + \ldots + t_{iq}}{q} = \frac{\tau}{q} = T$$

et la probabilité qu'elle ne soit pas occupée sera

$$1-T$$

Ces probabilités étant les mêmes pour toutes les lignes, il en résulte donc, d'après le quatrième principe, que la probabilité pour que r lignes *déterminées* soient occupées à un moment t' et que les S-r lignes restantes ne le soient pas sera égale à

$$T^r (1-T)^{s-r}$$

La probabilité pour que r lignes *quelconques* soient occupées et que les S-r restantes ne le soient pas, sera, d'après le troisième principe, égale à

$$P_r = C_s^r T^r (1-T)^{s-r} \qquad (1)$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de Bernoulli. Elle montre que la valeur de P_r, obtenue dans le cas où les durées de conversation des abonnés ne sont pas égales entre elles, sera la même que dans le cas où ces durées seraient toutes égales à T, pourvu que la somme des durées de conversation pendant un nombre d'heures chargées très grand soit la même pour tous les abonnés.

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, la formule (1) représente:

1° La probabilité pour qu'un contrôleur trouve à un moment de l'heure chargée r conversations en cours; ainsi, si $P_r = 0{,}01$, cela veut dire que si le contrôleur venait tous les jours pendant l'heure chargée au bureau central, il trouverait, au moment de ses arrivées ou à un autre moment donné quelconque, une fois sur cent r conversations en cours.

2° La durée moyenne de r occupations simultanées pendant l'heure chargée. Ainsi $P_r = 0{,}01$ signifie qu'en moyenne la durée de r occupations simultanées par heure chargée sera de 0,01 = 36 s.

6. *Formule de Poisson.*

Lorsque la durée moyenne d'occupation T d'une ligne est plus petite que 0,05, c'est-à-dire si elle est inférieure à trois minutes, la valeur de P_r dans la formule (1), pourvu que P_r soit inférieur à 0,01, ne varie pas sensiblement et reste pratiquement constante quand on diminue T et que l'on augmente S dans la même proportion, de sorte que le produit ST reste constant. Si l'on augmente S indéfiniment en diminuant T dans la même proportion, c'est-à-dire si l'on suppose que le nombre d'abonnés croît indéfiniment tandis que la durée moyenne de conversation d'un abonné décroît, mais que la durée moyenne de conversation de tous ces abonnés pendant l'heure chargée reste égale à y, si de plus on tient compte des formules bien connues

$$\lim_{s=\infty} \left(1 - \frac{y}{S}\right)^s = e^{-y}$$

et $$\lim_{s=\infty} C_s^r = \frac{S^r}{r!}$$

la formule (1) devient

$$\lim_{s=\infty} C_s^r T^r (1-T)^{s-r} =$$

$$= \lim_{s=\infty} \frac{S^r}{r!} \left(\frac{y}{S}\right)^r \left(1 - \frac{y}{S}\right)^s \left(1 - \frac{y}{S}\right)^{-r} = \frac{y^r}{r!} e^{-y}$$

et l'on a

$$P_r = \frac{e^{-y} y^r}{r!} \qquad (2)$$

Cette formule, établie pour la première fois par Poisson (Recherches sur la probabilité des jugements), ne correspond pas, en réalité, tout à fait à notre problème. Elle suppose que les appels élémentaires dt dont la durée de conversation d'un abonné a été composée, s'effectuent par divers abonnés de sorte que la probabilité P_r, donnée par cette formule, comprend aussi des conversations simultanées élémentaires qui, en réalité, émanent d'un même abonné. Néanmoins, c'est cette formule qu'on emploie le plus en téléphonie, vu sa facilité pour le calcul et parce qu'en pratique, on observe toujours les limites de T et de P_r données au commencement de ce paragraphe; de la sorte, la valeur obtenue par la formule (2) diffère très peu de celle obtenue par la formule (1).

7. *Autre signification de la formule de Bernoulli.*

On a vu au paragraphe précédent que, pour $P_r < 0{,}01$, la valeur de $C_s^r T^r (1-T)^{s-r}$ ne varie pas sensiblement lorsque l'on fait varier S et T de manière que leur produit reste constant. Supposons qu'en opérant des mesures dans un bureau téléphonique dont le nombre d'abonnés est S, on ait trouvé que la somme des durées de conversation, mesurées pendant un grand nombre d'heures chargées q, est égale à θ heures et que le nombre de conversations effectuées par tous les abonnés pendant la même période est égal à N. On aura respectivement

$\frac{\theta}{N} = t$, durée moyenne en heures d'une conversation;

$\frac{N}{q} = n$, nombre moyen d'appels par heure chargée;

$\frac{\theta}{q} = ST = y$, durée moyenne de conversation en heures de tous les abonnés pendant l'heure chargée.

$\frac{\theta}{q} = \frac{Nt}{q} = nt = y$, nombre moyen d'appels se produisant pendant l'intervalle de temps égal à la durée moyenne d'une conversation (intensité de trafic).

On aura nt = ST et, par conséquent, la formule

$$P_r = C_n^r t^r (1-t)^{n-r} \qquad (3)$$

donnera approximativement la même valeur que la formule (1) dans les limites indiquées de P_r, t et T.

La formule (3) ne représente la probabilité d'obtenir r conversations en cours que dans le cas où n est constant et où un abonné n'appelle pas deux fois pendant une même heure chargée. Dans ces conditions, la formule (3) peut avoir une autre signification.

Représentons l'heure par le segment de ligne AB (fig. 3) et la durée moyenne d'une conversation par CD.

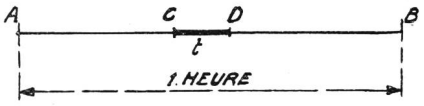


FIG. 3

Représentation de la durée moyenne d'une conversation CD = t dans l'heure AB.

La probabilité pour qu'un appel déterminé commence pendant l'intervalle de temps CD est égale à $\frac{CD}{AB}$ ou à t exprimé en fraction de l'heure, et la probabilité pour que r appels quelconques commencent pendant l'intervalle de temps CD sera donc

$$P_r = C_n^r \, t^r \, (1-t)^{n-r} \qquad (3)$$

Cette formule représentera:

1° La probabilité pour qu'un contrôleur trouve r commencements d'appels pendant l'intervalle de temps t de l'heure chargée; ainsi, si $P_r = 0{,}01$, cela veut dire que, si un contrôleur venait tous les jours à l'heure chargée pendant l'intervalle de temps t au bureau central, il verrait, une fois sur cent, r appels commencer durant cet intervalle;

2° La durée exprimée en heures pendant laquelle la probabilité pour qu'un appel commence est égale à P_r considéré comme une fraction pure.

Si l'on augmente n indéfiniment en diminuant t dans la même proportion, c'est-à-dire si l'on augmente indéfiniment le nombre moyen d'appels pendant l'heure chargée en réduisant la durée moyenne d'une conversation à dt de sorte que

$$n_{\infty} \, dt = nt$$

on obtient de nouveau la formule (2)

$$P_r = \frac{e^{-y} \, y^r}{r!}$$

où y est le nombre moyen d'appels élémentaires se produisant pendant un temps infiniment petit dt et qui est égal au nombre moyen d'appels réels se produisant pendant l'intervalle de temps t.

D'après ce qui précède, la formule (2) représente approximativement:

1° La probabilité pour qu'un contrôleur trouve à un moment de l'heure chargée, r conversations en cours [approximation de la formule (1)];

2° la durée moyenne, exprimée en heures, de r occupations simultanées pendant l'heure chargée [approximation de la formule (1)];

3° la probabilité pour qu'un contrôleur trouve r commencements d'appels pendant un intervalle de temps égal à la durée moyenne d'une conversation [approximation de la formule (3)];

4° la durée, exprimée en heures, pendant laquelle la probabilité pour qu'un appel commence est égale à P_r [approximation de la formule (3)].

8. Cas où le nombre d'organes de jonction est limité.

Lorsque le nombre d'organes est limité à x, les abonnés qui décrochent leur récepteur pour faire un appel quand tous les organes de jonction sont engagés, ne peuvent pas aboutir. Ces appels sont dits perdus ou retardés suivant le système automatique qu'on emploie. Il y a, en effet, plusieurs systèmes de téléphones automatiques qui traitent les appels infructueux de deux manières différentes: 1° ceux où les appels arrivant pendant l'occupation de tous les organes de jonction sont perdus, c'est-à-dire où l'abonné doit renouveler son appel, comme par exemple dans le système Strowger; 2° ceux qui disposent d'un appareil d'attente, c'est-à-dire où les appels, arrivant pendant l'occupation de tous les organes, sont conservés par l'appareil, et où la connexion désirée est établie automatiquement, immédiatement après qu'une ligne de jonction devient libre, comme par exemple dans le système „rotary" de la Bell Telephone Manufacturing Company. Nous ne nous occuperons que de ce dernier.

Il est évident que, dans le cas où le nombre d'organes est limité à x, le service sera d'autant plus satisfaisant que le nombre d'appels infructueux sera plus petit ou que le temps d'occupation de tous les x organes sera moins long, ou encore que le délai d'attente sera plus petit, ou enfin que la probabilité de trouver des appels infructueux sera plus faible.

On conçoit facilement que, dans le cas actuel où le nombre de lignes est limité, les formules (1) et (2) obtenues avec un nombre illimité d'organes de jonction ne donneront plus la probabilité de trouver r lignes occupées, ou le temps moyen pendant lequel r lignes seraient occupées pendant l'heure chargée. Les formules à employer sont alors

$$P = P_{x+1} + P_{x+2} + P_{x+3} + \ldots = \Sigma P_{x+1} \qquad (4)$$

$$P = P_x + P_{x+1} + P_{x+2} + \ldots = \Sigma P_x \qquad (5)$$

où P_x, P_{x+1}, etc., sont donnés soit par la formule de Bernoulli, soit par celle de Poisson, cette dernière étant employée le plus souvent pour les raisons données à la fin du paragraphe 6.

9. Signification de ΣP_{x+1} et de ΣP_x dans le cas où il existe un dispositif d'attente.

Nous supposerons que, du moment qu'une jonction devient libre, l'abonné en attente la prend et l'occupe pendant l'intervalle de temps restant pour compléter le temps qu'il aurait employé s'il n'avait pas attendu, ce qui correspond approximativement à la réalité lorsque le nombre d'organes est suffisamment grand. Dans ce cas, les formules (1) et (2) sont bien applicables et P_r signifiera la probabilité de trouver r conversations en cours si $r < x$, ou de trouver simultanément x conversations et r-x attentes si $r > x$. P_{x+1} représente donc la probabilité de trouver un appel en attente ou bien le temps moyen pendant lequel il y a un appel qui attend. De même, P_{x+2} représente la probabilité de trouver deux appels en attente, ou également le temps pendant lequel il y a deux appels qui attendent et ainsi de suite. ΣP_{x+1} représente alors la probabilité de trouver *au moins un appel* qui attend, c'est-à-dire la probabilité de trouver des appels infructueux. Si l'on a $\Sigma P_{x+1} = 0{,}001$, cela veut dire que, si un contrôleur venait tous les jours au bureau central pendant les heures chargées, il trouverait une fois sur mille, au moment de son arrivée, des appels en attente. ΣP_{x+1} représentera aussi le temps moyen pendant lequel il y a des appels qui attendent. Si

donc $\Sigma P_{x+1} = 0{,}001$, cela veut dire qu'en moyenne il y a 0,001 h = 3,6 sec. par heure chargée, pendant lesquelles il existe des appels en attente, c'est donc le temps d'attente par heure chargée.

De même, ΣP_x représente la probabilité pour qu'on trouve x appels en cours ou un nombre quelconque d'appels en attente, ΣP_x représente donc la probabilité pour qu'on trouve x appels en cours, avec ou sans autres appels qui attendent. ΣP_x représente aussi le temps moyen d'occupation de tous les x organes pendant l'heure chargée, puisque les x organes sont occupés non seulement au cours des x appels, mais aussi pendant le temps qu'il y a des appels en attente.

Il est évident que le service sera d'autant plus satisfaisant que la valeur de ΣP_{x+1} ou de ΣP_x sera plus faible. La question qui se pose est alors la suivante: laquelle de ces deux formules faut-il employer?

Si l'on se rapporte à la signification donnée aux expressions ΣP_{x+1} et ΣP_x, c'est à la première qu'il faut donner l'avantage, car, bien que la qualité de service d'un bureau central dépende du temps d'occupation de toutes les jonctions, donné par ΣP_x, il entre dans ce temps des moments où toutes les jonctions sont occupées sans qu'il y ait des appels qui attendent, tandis que, ce qui intéresse le constructeur ainsi que l'exploitant des téléphones, ce sont justement ces appels qui attendent ou la probabilité pour qu'on trouve des appels en attente, laquelle est précisément donnée par ΣP_{x+1}.

10. Problèmes pratiques à résoudre.

Etant donné un bureau central téléphonique dont on connaît le nombre de lignes d'abonnés S et le temps moyen d'occupation T d'une ligne pendant l'heure chargée, si x est le nombre d'organes de jonction dans ce bureau, la probabilité pour qu'il y ait des appels en attente sera

$$P = e^{-y}\left(\frac{y^{x+1}}{(x+1)!} + \frac{y^{x+2}}{(x+2)!} + \dots\right) = \sum_{z=x+1}^{z=\infty} \frac{e^{-y}\, y^z}{z!}$$

en employant pour P_{x+1}, P_{x+2}, etc., la formule approchée de Poisson, qui donne une approximation par excès et bien entendu, en limitant P à des valeurs plus petites que 0,01, ce qui est d'ailleurs habituellement le cas.

En pratique, la question se pose autrement. D'habitude, on se donne la valeur de P et l'on tâche de résoudre l'un des deux problèmes suivants:

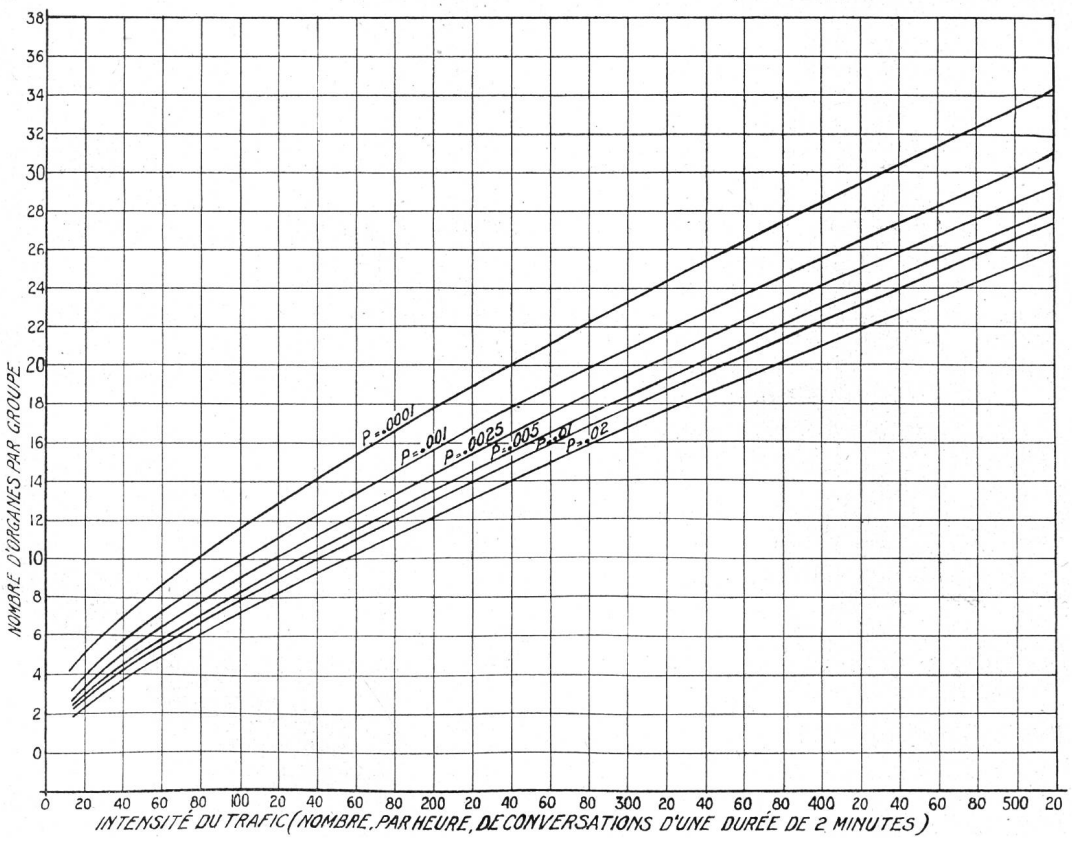
On a un bureau central dont on connaît le nombre d'abonnés S et le temps moyen d'occupation T d'un abonné. Par suite de la limitation du nombre de points de jonction que possèdent les organes, les abonnés doivent être divisés en groupes et l'on se demande:

1° Quel est le nombre d'organes x nécessaire pour desservir un groupe d'abonnés dont l'intensité de trafic est y, de façon que la probabilité pour qu'on trouve des appels en attente soit égale, par exemple, à 0,001?

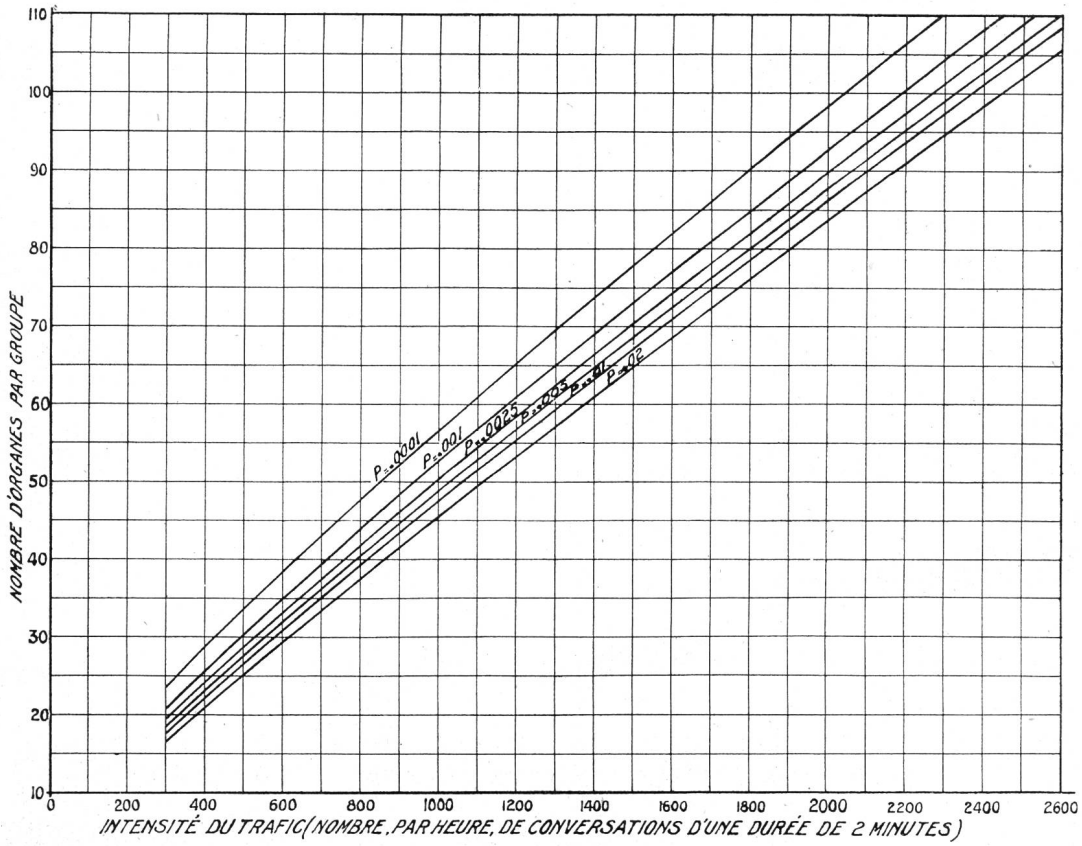
2° Quelle est l'intensité de trafic y que peut émettre le groupe desservi par x organes, de façon que la probabilité pour qu'on trouve des appels en attente soit égal, par exemple, à 0,001?

Pour résoudre ces problèmes on a tracé, à l'aide de la formule (4) et pour différentes valeurs de P, des courbes qui ont l'intensité de trafic y comme abscisses et le nombre d'organes x comme ordonnées. (Voir fig. 4, où l'on a pris 30 y comme abscisse.)

a



b



c

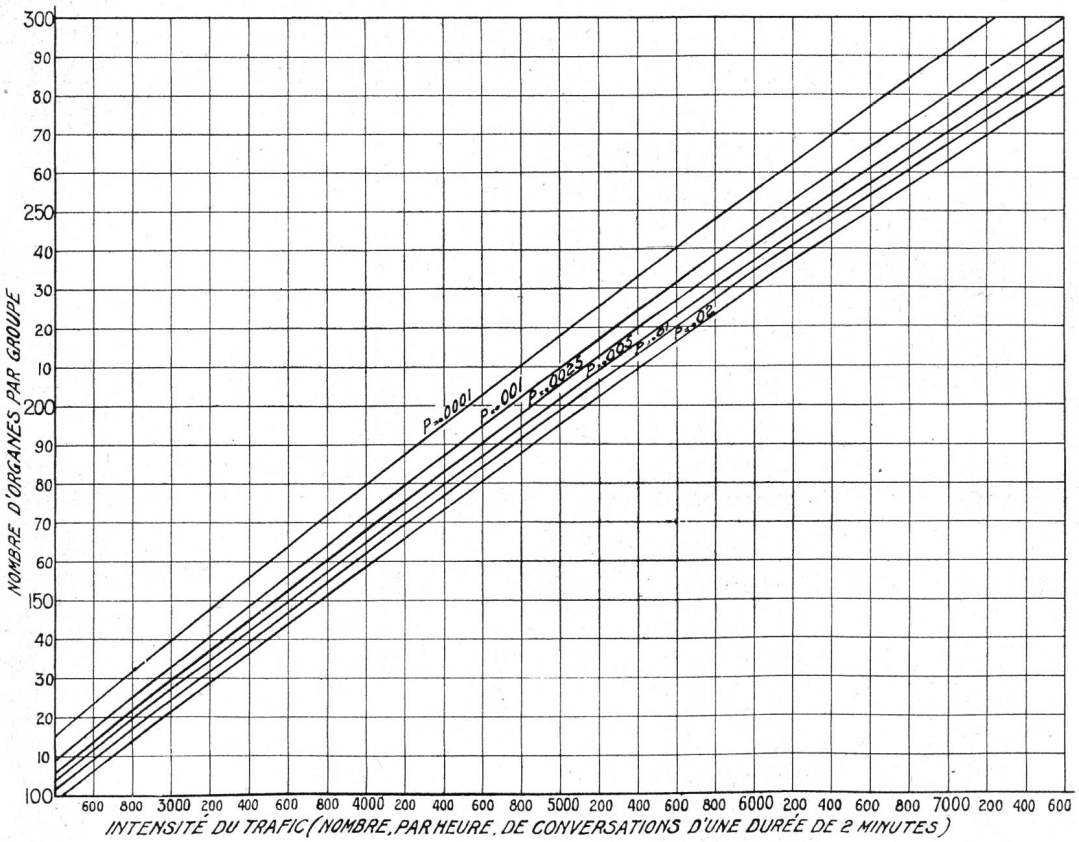


Fig. 4 a, b, c. Courbes de la Bell Telephone Manufacturing Company, Anvers, donnant en fonction de l'intensité du trafic le nombre d'organes nécessaires pour assurer une probabilité des appels en surnombre de 0,0001, 0,001, 0,0025, 0,005, 0,01, 0,02, et tracées d'après la formule

$$P = \sum_{z=x+1}^{z=\infty} \frac{e^{-y}\, y^z}{z!}$$

En examinant ces courbes, on remarque que le nombre d'abonnés ou l'intensité de trafic dans un groupe qui dépend de la capacité de l'arc des appareils ne lui est pas proportionnel. Ainsi, par exemple, l'intensité de trafic qui peut être desservie par des sélecteurs à 10 points est égale à 3,3 pour $P = 0{,}001$, tandis que dans le cas des sélecteurs à 30 points et pour la même probabilité $P = 0{,}001$, l'intensité de trafic „y" ne sera pas égale à $3 \times 3{,}3$, mais à 16,7. Le nombre de sélecteurs dans ce premier cas sera de 10 par 100 abonnés (en considérant que la durée moyenne d'une conversation est de deux minutes), tandis que dans le second cas il sera de 30 par 500 abonnés.

11. Durée maximum d'attente par heure chargée.

Si l'on représente par

$$\Sigma P_{x+1,1},\ \Sigma P_{x+1,2}\ \ldots\ \Sigma P_{x+1,q}$$

les temps pendant lesquels il y a des appels en attente au cours d'un nombre très grand q d'heures chargées, on aura

$$\Sigma P_{x+1} = \frac{\Sigma P_{x+1,1} + \Sigma P_{x+1,2} + \ldots + \Sigma P_{x+1,q}}{q}$$

Il est évident qu'une attente pendant une heure chargée k ne peut jamais être plus grande que $\Sigma P_{x+1,k}$. Une attente, et une seule, peut être égale à $\Sigma P_{x+1,k}$ seulement dans le cas où cette dernière se rapporte *au premier* appel en attente et où cet appel a été servi le dernier. Encore, faudrait-il que la durée $\Sigma P_{x+1,k}$ se soit écoulée en une seule fois. D'après cela, $\Sigma P_{x+1,k}$ représente le temps maximum que peut durer une attente et ΣP_{x+1} la moyenne des temps maxima que peut durer une attente.

L'expression $P = \Sigma P_{x+1} = 0{,}001$ peut donc être interprétée comme suit: le nombre d'organes x dans un groupe doit être tel que le temps maximum que peut durer une attente ne dépasse pas 0,001 h = 3,6 sec. par heure chargée.

En réalité, les durées maxima d'attente sont toujours inférieures à $\Sigma P_{x+1,k}$, de sorte que la durée maximum d'attente par heure chargée sera égale à $\lambda\ \Sigma P_{x+1}$, où λ est plus petit que 1 et peut être déterminé par l'expérience.

On peut poser la condition que l'intensité de trafic ou le nombre d'organes x dans un groupe soit tel que la durée maximum d'attente par heure chargée soit égale, par exemple, à 1 seconde. Si l'on évalue la valeur de λ à $1/3$, la valeur de ΣP_{x+1} devra être égale à 1/1200.

12. Durée moyenne d'attente par abonné.

On a vu que P_{x+i} représente la durée pendant laquelle i abonnés sont en attente; iP_{x+i} représentera alors leur temps total d'attente pendant cette durée, et le temps total d'attente de tous les appels en attente, par heure chargée, sera donc

$$T_t = P_{x+1} + 2P_{x+2} + 3P_{x+3} + \ldots = \Sigma\Sigma p_{x+1}$$

par conséquent, la durée moyenne d'attente d'un abonné par heure chargée sera

$$T_m = \frac{1}{S}\ \Sigma\Sigma p_{x+1}$$

S étant le nombre d'abonnés par groupe.

Pour un groupe de 100 abonnés dont l'intensité de trafic „y" est égale à 3,5 et pourvu d'un nombre d'organes égal à 10 qui correspond à $P = 0{,}001$, la durée totale d'attente des appels retardés sera:

$$T_t = 0{,}0014\ \text{h} = 5\ \text{sec.}$$

La durée moyenne d'attente d'un abonné par heure chargée sera

$$T_m = 0{,}05\ \text{sec.}$$

et la durée moyenne d'attente d'un abonné par an:

$$0{,}05 \times 300 = 15\ \text{sec.}$$

Il est à remarquer que la durée moyenne d'attente d'un abonné est d'autant plus petite que le nombre d'abonnés par groupe est plus grand. Ainsi, par exemple, si le nombre d'abonnés dans un groupe est 200 au lieu de 100, le nombre d'organes pour $y = 7$ et $P = 0{,}001$ sera égal à $x = 16$ et la durée moyenne d'attente d'un abonné par an égale à 8 sec., c'est-à-dire presque deux fois plus petite que dans un groupe de 100 abonnés.

On peut donc conclure que, de deux projets calculés sur la même base P, celui dans lequel l'intensité de trafic par groupe est plus grande sera le meilleur au point de vue de la durée moyenne d'attente d'un abonné.

Zuführung der Telephonkabel nach dem neuen Hauptverteiler in Bern.

Von H. Schmalz, Bern.

Die Aufstellung der neuen vollautomatischen Telephonzentrale „Bollwerk" im Hauptpostgebäude und die gleichzeitige Ausrüstung der seit 1908 im Telephongebäude untergebrachten Handzentrale „Christoph" mit automatischen Anrufsuchern haben grössere Kanalisationsarbeiten und eine Neugruppierung der Hauptkabel veranlasst, worüber in nachstehendem kurz berichtet werden soll.

Die genannten zwei Zentralen befinden sich in benachbarten Gebäuden. Im Hinblick auf die spätere Vollautomatisierung des ganzen Stadtnetzes war es aus wirtschaftlichen Gründen geboten, schon bei der Einführung des neuen Betriebssystems für beide Zentralen einen gemeinsamen Hauptverteiler aufzustellen. Dieser befindet sich im grossen Wählersaal im III. Stock des Hauptpostgebäudes und besteht aus 2 doppelseitigen Gestellen zu je 1200 Anschlüssen. Für die Zuführung der Teilnehmerleitungen sowie der Verbindungsleitungen mit dem Zwischenverteiler der Zentrale „Christoph" sind 600paarige Papierkabel von 0,6 mm Aderdurchmesser verwendet worden. Der Anschluss an die Verteilergestelle erfolgte mit Email-Baumwollkabeln zu 200 Doppeladern. Die entsprechenden Verteilmuffen der Teilnehmerkabel befinden sich im Zwischenboden des Verteilerraumes, während diejenigen für die Verbindungskabel nach der Christophzentrale an eisernen Hängegestellen unter der Decke des Verteilerraumes montiert sind. Die Anordnung der letzteren ist aus Fig. 1 ersichtlich.