

**Zeitschrift:** Cartographica Helvetica : Fachzeitschrift für Kartengeschichte  
**Herausgeber:** Arbeitsgruppe für Kartengeschichte ; Schweizerische Gesellschaft für Kartographie  
**Band:** - (2012)  
**Heft:** 46

**Artikel:** Die mathematischen Voraussetzungen für die Weltkartenentwürfe des Ptolemaios  
**Autor:** Stückelberger, Alfred / Rohner, Heiner  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-306484>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die mathematischen Voraussetzungen für die Weltkartenentwürfe des Ptolemaios

Alfred Stückelberger / Heiner Rohner

Zu den besonderen Leistungen des Klaudios Ptolemaios gehören die neuartigen Methoden zum Zeichnen einer Weltkarte, die er im 1. Buch seines geographischen Hauptwerkes, der *Geographike hyphegesis* (um 150 n. Chr.), vorlegt. Die zum Verständnis der Projektionsmethoden notwendigen mathematischen Analysen sind in der Fachliteratur von ausgewiesenen Sachverständigen längst vorgenommen worden.<sup>1</sup> Allerdings nehmen die von professionellen Mathematikern entwickelten, ein hohes Mass an Spezialkenntnissen voraussetzenden Analysen meist wenig Bezug auf den Text und die handschriftliche Überlieferung. Nicht von ungefähr kursieren bezüglich der ptolemäischen Projektionsmethoden in der Kartographie-Literatur da und dort unzutreffende beziehungsweise irreführende Angaben. Es mag daher – insbesondere im Jubiläumsjahr Mercators, der sich in seiner Ptolemaios-Ausgabe von 1578 als ausgezeichnete Kenner der ptolemäischen Kartenentwürfe erwiesen hat<sup>2</sup> – angebracht sein, die mathematischen Überlegungen, die Ptolemaios für seine Weltkartenentwürfe anstellte, schrittweise, in enger Anlehnung an den Text und die Handschriften, nachzuzeichnen und nachzuprüfen und so die Genese der Weltkartenentwürfe zu erhellen.<sup>3</sup>

## Technische Mittel

### Zahlzeichen

Es soll im Folgenden versucht werden, unter Zurückhaltung in der Verwendung moderner mathematischer Formeln möglichst mit den Mitteln auszukommen, die Ptolemaios zur Verfügung standen. Es gab noch keine Dezimalbrüche, keine Bruchstriche, keine Operationszeichen, keine Gleichungen. Als recht un-

bequem zu handhabende Zahlzeichen dienten griechische Buchstaben mit Zahlwerten;<sup>4</sup> Bruchteile von Zahlen wurden meist mit gemeinen Brüchen (fast immer mit 1 als Zähler)<sup>5</sup> ausgedrückt:

z. B.  $23 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  (=  $23\frac{5}{6}^\circ = 23^\circ 50'$  =

Breite von Syene, nach *Geographie* 1,24,12) oder – so in der Sehnentafel – im Sexagesimalsystem ( $x + \frac{y}{60} + \frac{z}{3600}$ ):

z. B. Sehne zu  $54^\circ = 54p 28' 15''$

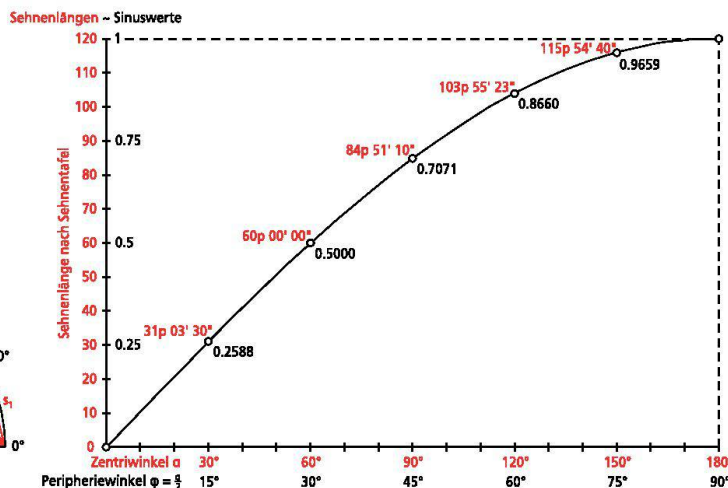
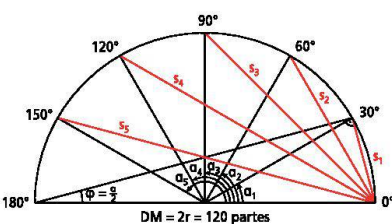
(=  $54 + \frac{28}{60} + \frac{15}{3600} = 54,4708$  dezimal),

(p = partes/Einheiten, von 120; nach *Syntaxis* 1,11)

### Sehnentafel

Ein wichtiges Instrument, das auch in der *Geographie* verschiedentlich für Berechnungen und Umrechnungen zur Anwendung kommt, ist die Sehnentafel, die Ptolemaios im *Almagest* (*Syntaxis* 1,10f.) anführt. Es werden dort die Sehnenlängen zu den Zentriwinkeln von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  in Halbgradschritten angeführt, im Sexagesimalsystem, mit einem Radius von  $r = 60$  partes. Die Werte stellen eine Sinusfunktion dar, deren Kenntnis (und damit auch der Cosinusfunktion) somit für Ptolemaios gesichert ist, wenngleich er noch keinen Begriff dafür kennt und die graphische Darstellung einer Sinuskurve noch nicht verwendet (Abb.1).

| Zentriwinkel $\alpha$ | Sehnenlänge s nach Sehnentafel<br>Sexagesimal = dezimal | $\frac{s}{120} = \sin(\frac{\alpha}{2}) = \sin(\varphi)$ |
|-----------------------|---|--|
| $30^\circ$            | 31p 3' 30" = 31.0583                                    | 0.2588 = $\sin(15^\circ)$                                |
| $60^\circ$            | 60p 00' 00" = 60.0000                                   | 0.5000 = $\sin(30^\circ)$                                |
| $90^\circ$            | 84p 51' 10" = 84.8528                                   | 0.7071 = $\sin(45^\circ)$                                |
| $120^\circ$           | 103p 55' 23" = 103.9231                                 | 0.8660 = $\sin(60^\circ)$                                |
| $150^\circ$           | 115p 54' 40" = 115.9111                                 | 0.9659 = $\sin(75^\circ)$                                |
| $180^\circ$           | 120p 00' 00" = 120.0000                                 | 1.0000 = $\sin(90^\circ)$                                |



Tab. 1: Beispiele von Sehnenlängen nach der Sehnentafel, in Korrelation zu Sinuswerten

Abb. 1: Veranschaulichung der Sehnentafel des Ptolemaios (*Syntaxis* 1,11): Die Werte der zu jedem Zentriwinkel  $\alpha$  gegebenen Sehnenlängen entsprechen den Sinuswerten des dazugehörigen Peripheriewinkels  $\frac{1}{2}\alpha$  ( $=\varphi$ ).

## Verkürzung der Längengrade

Ein besonderes Problem stellte der Umstand dar, dass die Abstände zwischen den Meridianen bzw. die Länge der Längengrade auf der Kugeloberfläche vom Äquator zum Pol hin sich nicht linear, sondern mit zunehmender Breite nach in einer Cosinusfunktion verkürzen (Abb. 2):

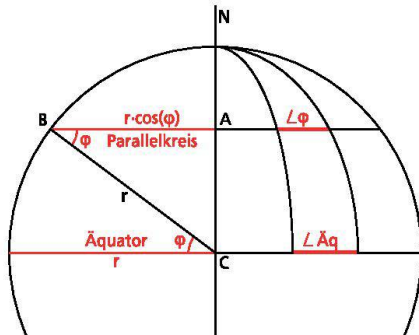


Abb. 2: Der Längengrad L verkürzt sich vom Äquator zum Pol in einer Cosinusfunktion:  $L_\phi = L_{Äq} \cdot \cos(\phi)$ .

Ohne dass der Begriff Cosinusfunktion verwendet wird, handhabt Ptolemaios die Berechnung souverän: Bei den Länderkarten, bei denen es – im Gegensatz zur Weltkarte – «keinen nennenswerten Unterschied machen wird, wenn wir die Meridianlinien als Parallelen zeichnen und die Parallelkreise als Geraden, wenn nur die Intervalle der Breitengrade zu den Intervallen der Längengrade dasselbe Verhältnis aufweisen wie der Äquator zum mittleren Parallelkreis» (*Geographie* 2,1,10), gibt er im 8. Buch zu jeder Länderkarte die genannten Verhältniszahlen an: Die Nachprüfung ergibt eine erstaunliche Präzision; hier einige Beispiele:<sup>6</sup>

| Karte                               | Verkürzungsfaktor nach <i>Geographie</i> 8 | Cosinus $\phi$ des mittleren Parallelkreises, nachgerechnet |
|-------------------------------------|--|---|
| 1. Europa-Karte: <i>Geogr.</i> 8,3  | 11 : 20 = 0.5500                           | $\cos(57^\circ) = 0.5446$                                   |
| 2. Europa-Karte: <i>Geogr.</i> 8,4  | 3 : 4 = 0.7500                             | $\cos(41^\circ) = 0.7547$                                   |
| 4. Afrika-Karte: <i>Geogr.</i> 8,16 | 1 : 1 = 1.0000                             | $\cos(10^\circ) = 0.9848$                                   |
| 3. Asien-Karte: <i>Geogr.</i> 8,19  | 11 : 15 = 0.7333                           | $\cos(43^\circ) = 0.7314$                                   |

Tab. 2: Verkürzung der Längengrade, nach Ptolemaios und nachgerechnet

Die Berechnung der Verkürzung erfolgt unter Verwendung der Sehnentafel (*Syntaxis* 1,11). Grundsätzlich gilt (Abb. 3):

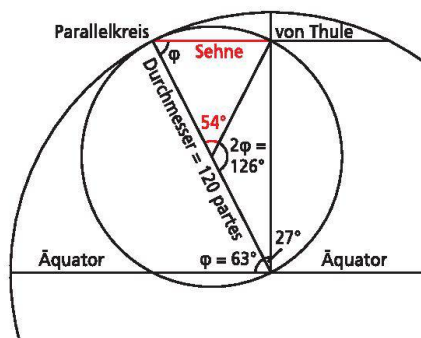
$$\cos(\phi) = \text{Sehne zu } (180^\circ - 2\phi)$$

gezeigt am Beispiel von Thule (geogr. Breite  $\phi = 63^\circ$ ):

$$\cos(63^\circ) = \text{Sehne zu } (180^\circ - 2 \cdot 63^\circ) = \text{Sehne zu } 54^\circ$$

Abb. 3: Veranschaulichung der Berechnung der Längenverkürzung von Thule ( $63^\circ$  N) mit Hilfe der Sehnentafel, *Syntaxis* 1,11:

- 1) Radius (r) des Parallelkreises von Thule = Sehne von  $(180^\circ - 2 \cdot 63^\circ) = \text{Sehne zu } 54^\circ = 54\rho 28' 15'' (=54.4708\rho)$  (von 120 p[artes] des Äquator-Radius).
- 2)  $54.4708 : 120 = 0.4539 = \cos(63^\circ)$  (nachgerechnet = 0.4540)



## Vorläufer des Ptolemaios

Schon längst vor Ptolemaios haben Gelehrte versucht, die Oikumene, d.h. die damals bekannte Welt, kartographisch zu erfassen. Wenn auch in den Handschriften keine Spuren vorptolemäischer Weltkarten erhalten sind, lassen sich einige doch dank überlieferter Zeugnisse einigermaßen rekonstruieren. Der älteste Versuch, unter Einbezug einiger astronomisch gesicherter Daten eine Weltkarte zu entwerfen, stammt von Eratosthenes (ca. 276–194 v. Chr.), dem eigentlichen Begründer der Fachdisziplin *Geographie*. Dank den ausführlichen Angaben seines jüngeren Fachkollegen Strabo (64 v. Chr.–20 n. Chr.) kann man sich ein Bild von dieser «Karte der bewohnten Welt» (*pinax tes oikumenes*, Strabo 2,1,1) machen: Als Grundlage dienen «Geraden, die sich rechtwinklig (*pros orthas*) schneiden» (Strabo 2,5,16), die in unregelmässigen Abständen durch bekannte, mit dem Gnomon bestimmte oder anderswie gemessene Fixpunkte gezogen werden, so der in der Mitte angenommene Rhodos-Parallelkreis durch Gibraltar – Meerenge von Sizilien – Südspitze der Peloponnes – Rhodos – Taurosgebirge sowie der Hauptmeridian dem Nillauf entlang über Alexandria – Rhodos – Byzanz zum Borysthenes/Dnjepr (Strabo 2,1,1; 2,5,7).<sup>7</sup> Der bedeutendste unmittelbare Vorgänger ist Marinus von Tyros (gest. wohl kurz vor 150 n. Chr.), mit dem sich Ptolemaios ausführlich kritisch auseinandersetzt, dem er aber zubilligt «diesen Punkt (nämlich das Problem der Abstandstreue) mit ungewöhnlicher Sachkenntnis» behandelt zu haben (*Geographie* 1,20,3). Er kritisiert ihn aber: «denn er machte all die Linien, welche Parallelkreise und Meridiankreise darstellen, zu Geraden und zeichnete, wie die meisten anderen, sogar die Meridianlinien als Parallelen. Einzig beim Parallelkreis durch Rhodos wahrte er die Proportionen zum Meridian, entsprechend dem Verhältnis bei gleichen Bogensegmenten auf der Kugeloberfläche von annähernd 4:5, was dem Verhältnis des Parallelkreises durch Rhodos ( $36^\circ$ ) [...] entspricht.» (l.c. 1,20,4f.). Marinus verwendet also ein rechtwinkliges Koordinatennetz mit einem auf den Rhodos-Parallelkreis bezogenen Verhältnis von Längengrad und Breitengrad von 4:5 (= 0.8 = annähernd  $\cos(36^\circ) = 0.8090$ ), was zur Folge hat – wie Ptolemaios kritisiert – «dass er die Distanzen in nördlicheren Breitenlagen als Rhodos entgegen der Wirklichkeit zerdehnt, die in südlicheren Breitenzonen dagegen verkürzt» (l.c. 1,20,7) (Abb. 4).

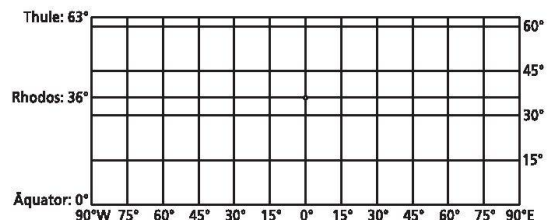


Abb. 4: Kartenraster der Weltkarte des Marinus, nach den Angaben des Ptolemaios.

## Die 1. ptolemäische Projektion (Geographie 1,21 und 1,24,1-9)

Das Kernstück der theoretischen Einleitung der *Geographie* des Ptolemaios besteht in der Entwicklung neuer Methoden zum Zeichnen einer Weltkarte. Es ging um das Problem, wie eine Kugeloberfläche möglichst ohne allzu grosse Verzerrungen auf eine Ebene übertragen werden konnte: «Die Darstellung bedarf einer ganz bestimmten Methode, um eine Ähnlichkeit mit der Kugelgestalt zu bewirken, damit die eingetragenen Distanzen auf der ebenen Fläche möglichst proportionsgetreu (*symmetroi*) gegenüber den wirklichen Distanzen werden» (*Geographie* 1,20,2). Das Neuartige der Projektionsmethoden des Ptolemaios wird deutlich, wenn man sie mit den eben vorgeführten Kartentwürfen seiner Vorgänger vergleicht, die grundsätzlich von einem rechtwinkligen, geradlinigen Kartenraster ausgegangen sind,<sup>8</sup> welches bei einer Weltkarte zu grossen Verzerrungen führt. Demgegenüber propagiert Ptolemaios eine Art «Kegelprojektion»,<sup>9</sup> mit gekrümmten Breitenkreisen, zunächst eine mit geraden konvergierenden Meridianen (Abb. 5).<sup>10</sup>

Ptolemaios hat sehr wohl erkannt, dass es bei dieser Projektionsmethode «nicht möglich ist, bei allen Parallelkreisen die Proportionen der Kugel zu wahren», und begnügte sich damit, «wenigstens beim Parallelkreis durch Thule (auf 63° N angenommene Nordbegrenzung der bekannten Welt)<sup>11</sup> und beim Äquator die Proportionen zu wahren» (*Geographie* 1,21,2). Das besondere Problem bestand nun darin, den Punkt H zu finden, bzw. das Zentrum der konzentrischen Kreise, so dass das Verhältnis der Kreisbögen bzw. der Radien des Thule-Parallelkreises zum Äquator dem tatsächlichen Verhältnis, nämlich dem  $\cos(63^\circ) = 0.4540$ , entspricht (*Geographie* 1,24,1ff.): Gegeben war die Strecke SO, d.h. die Nordsüdausdehnung der Oikumene von 63 Breitengraden vom Äquator bis Thule (36° bis Rhodos, von da 27° bis Thule), die wie auf der Kugel gleiche Abstände haben; dazu kommt eine subäquatoriale Zone von  $16\frac{5}{12}$  Breitengraden bis Antimeroë. Gesucht ist der Abstand x vom Thule-Parallelkreis bei O bis H, dem Zentrum der Kreise, den Ptolemaios – ohne die Einzelschritte der Berechnung vorzuführen – recht genau bestimmt (Abb. 6).<sup>12</sup> Es gilt:

$$0.4540 = \cos(63^\circ) = \frac{\text{Radius PK Thule}}{\text{Radius Äquator}} = \frac{HO}{HS} = \frac{x}{x + 63e};$$

Auflösung ergibt  $x = 52.3826e$ . Ptolemaios rundet dann 52.3826 auf 52 Einheiten (e) ab; die Unterteilung dieser 52e in 18e unterhalb und 34e oberhalb des Kartenrandes AB wird nicht mathematisch bestimmt; sie beruht auf einem praktischen Erfahrungswert, wenn die Karte in das für die Zeichnung vorgesehene, doppelt so breite wie hohe Rechteck ABCD eingepasst werden soll.<sup>13</sup> Jedenfalls liegt der Punkt H beträchtlich ausserhalb der Zeichnungsfläche.

Daraus ergeben sich folgende Verhältnisse für die Radien bzw. Kreisbögen der Parallelkreise (PK) (Tab. 3): Mit andern Worten: Das Verhältnis vom Thule-Paral-

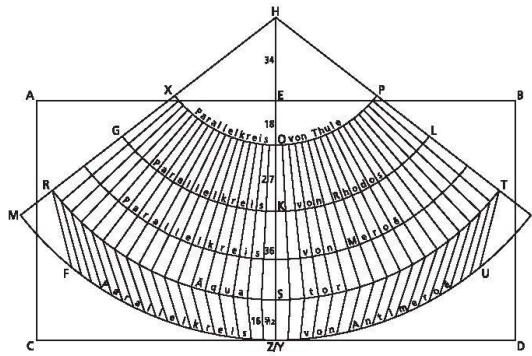


Abb. 5: 1. ptolemäische Projektion der Weltkarte mit geraden Meridianen

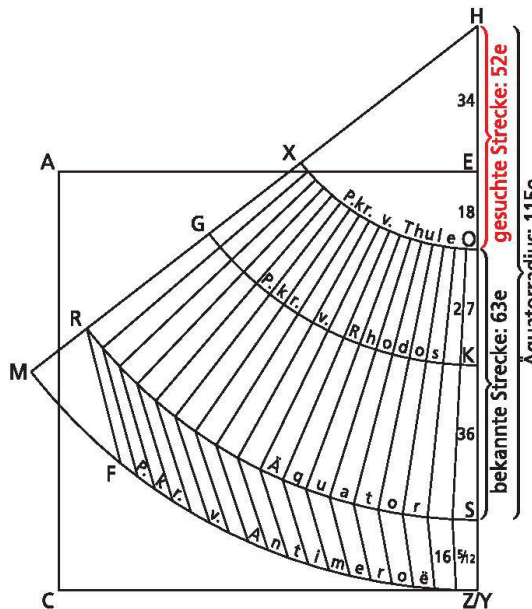


Abb. 6: Berechnung der gesuchten Strecke  $x = OH$ , zur Ermittlung der Radien der Parallelkreise durch Thule und Rhodos, im passenden Abstand zum Äquator:  
 $r_{\text{Thule}} = x = 52e$  (Einheiten)  
 $r_{\text{Rhodos}} = 52e + 27e = 79e$   
 $r_{\text{Äquator}} = 52e + 63e = 115e$   
 $r_{\text{Antimeroë}} = 115e + 16\frac{5}{12}e = 131\frac{5}{12}e$

|  | Radius r                           | Verhältnisse   | nachgerechnete Cosinuswerte   |
|--|------------------------------------|--|-------------------------------|
| PK Thule 63°                                   | 52e                                | Thule : Äquator = 52:115 = 0.4522                              | $\cos(63^\circ) = 0.4540$     |
| PK Rhodos 36°                                  | 79e                                | Rhodos : Äquator = 79:115 = 0.6870 (!)                         | $\cos(36^\circ) = 0.8090$ (!) |
| Äquator 0°                                     | 115e                               |  |                               |
| PK Antimeroë 16 <sup>5</sup> / <sub>12</sub> ° | 131 <sup>5</sup> / <sub>12</sub> e | reduziert auf den PK Meroë 16 <sup>5</sup> / <sub>12</sub> ° N |                               |

Tab. 3: Radien und Verkürzungen der Parallelkreise

lelkreis zum Äquator stimmt gut, dagegen ist bei dieser Projektion der Rhodos-Parallelkreis gegenüber dem Äquator zu kurz: statt dem geforderten Verhältnis von 4:5 (*Geographie* 1,24,3) beträgt es in Tat und Wahrheit nur 3.4348:5. Somit sind die Abstandsverhältnisse zwischendrin nicht gewahrt.

Ist das Zentrum H der Parallelkreise bzw. der Scheitelpunkt des Strahlenbündels gefunden, werden auf dem Parallelkreis von Rhodos auf beide Seiten hin im Abstand von je 4 Einheiten die Punkte markiert, durch welche die 18 Meridiane im Abstand von 5° gezogen werden, welche der angenommenen Längenausdehnung der Oikumene ( $2 \cdot 18 \cdot 5^\circ = 180^\circ$ ) entsprechen.

## Die 2. ptolemäische Projektion mit gekrümmten Meridianen (Geographie 1,24,10–33)

Der eben genannte Nachteil der mangelnden Abstandstreue bei einer Projektion mit geraden Meridianen hat Ptolemaios veranlasst, eine «Darstellung der Oikumene auf einer Tafelfläche zu bewerkstelligen, die noch ähnlicher (*homoioteron*) und proportionsgetreuer (*symmetrotoron*) gegenüber der Kugel ist (Geographie 1,24,10). Die zweite Projektion ist nicht nur optisch hinsichtlich der Nachahmung der Kugelgestalt ansprechender, sondern vor allem hinsichtlich der Wahrung der Abstandsverhältnisse überlegen (Abb. 7).

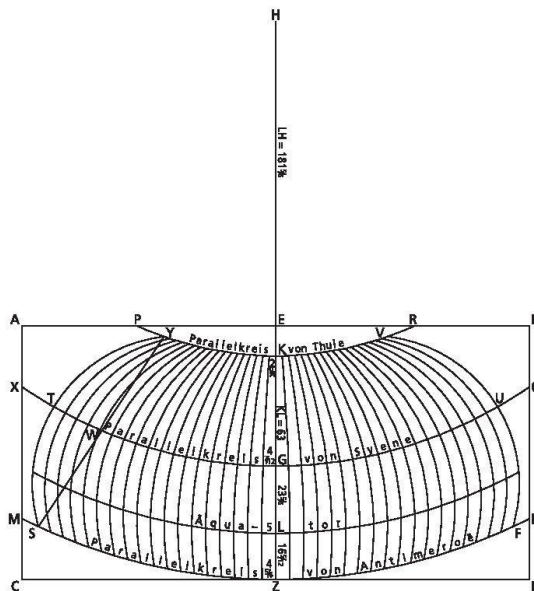


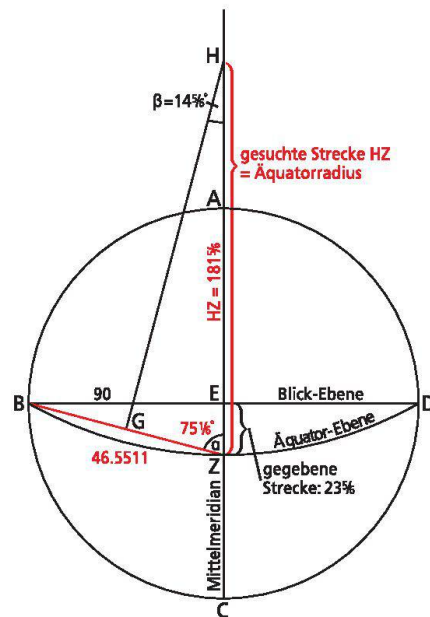
Abb. 7: 2. ptolemäische Projektion der Weltkarte mit gekrümmten Meridianen

Abb. 8 : Hilfskonstruktion zur Ermittlung von Punkt H:

- Konstruktion: 1) Auf dem Kreis ABCD wird der Durchmesser BD von 2·90 Einheiten (e) (= Blick-Ebene von Syene) und der nach oben verlängerte Mittelmeridian AC eingetragen.  
 2) Auf AC wird vom Schnittpunkt E aus  $EZ = 23^{\circ}e$  (= Breite von Syene über dem Äquator) nach unten abgetragen.  
 3) Die Mittelsenkrechte von BZ schneidet den nach oben verlängerten Mittelmeridian in H, dem gesuchten Zentrum des Kreisbogens BZD (= Äquator).

Berechnung von HZ (= Äquatorkreisradius):

- 1)  $BZ = \sqrt{BE^2 + EZ^2} = \sqrt{90^2 + 23.8333^2} = 93.1022$
- 2)  $\sin(\alpha) = \frac{BE}{BZ} = \frac{90}{93.1022} = 0.9667 \Rightarrow \alpha = 75^{\circ}10'; \beta = 90^{\circ} - \alpha = 14^{\circ}50'$
- 3)  $GZ = \frac{1}{2} BZ = 46.5511e$
- 4)  $\cos(\alpha) = \frac{GZ}{HZ} \Rightarrow HZ = \frac{GZ}{\cos(\alpha)} = \frac{46.5511}{0.2560} = 181.8467$ ; (nach Ptolemaios  $181^{\frac{5}{6}} (= 181.8333)$ ).



## Ermittlung des Zentrums H der konzentrischen Parallelkreise

Zunächst ging es wieder darum, das Zentrum der zu zeichnenden Parallelkreise zu finden. Die 2. Projektion geht davon aus, dass die Blickrichtung senkrecht auf den in der Mitte der Oikumene liegenden Parallelkreis durch Syene/Assuan ( $23^{\circ}e$ ) fällt und somit der Äquator um  $23^{\circ}e$  nach unten geklappt erscheint. In einer anspruchsvollen Hilfskonstruktion wird dann mit trigonometrischen Überlegungen der Punkt H ermittelt (Geographie 1,24,13–16) (Abb. 8).

## Ermittlung der Radien der Parallelkreise und der Längengradverkürzungen

Ist der Äquatorradius von  $181^{\frac{5}{6}}e$  berechnet, lassen sich die weiteren Radien der Referenzparallelen unter Berücksichtigung der jeweiligen geographischen Breite leicht ermitteln (Geographie 1,24,17f.). Anders als bei der 1. Projektion lassen sich nun auf all diesen Parallelkreisen die Verkürzungen der Längengrade berücksichtigen:  $2^{\frac{1}{4}} : 5$  für Thule,  $4^{\frac{7}{12}} : 5$  für Syene,  $4^{\frac{5}{6}} : 5$  für Antimeroë (Geographie 1,24,20–22). In den genannten Abständen werden wieder 18 Meridiane auf beide Seiten hin in  $5^{\circ}$ -Intervallen eingetragen, was nach den Rändern hin eine zunehmende Krümmung der Meridiane ergibt. Die Nachrechnung zeigt wieder eine bemerkenswerte Präzision:

| Referenzorte mit geogr. Breite $\varphi$ | Radien der Parallelkreise (PK) nach Geographie 1,24,17f.     | Intervalle im Verh. zum Äquator nach Geographie 1,24,20–22 | nachgerechnete Cosinuswerte    |
|--|--|--|--------------------------------|
| PK von Thule ( $63^{\circ}$ )            | $HK = 181^{\frac{5}{6}}e - 63e = 118^{\frac{5}{6}}e$         | $2^{\frac{1}{4}} : 5 = 0.4500$                             | $\cos(63^{\circ}) = 0.4540$    |
| PK von Syene ( $23^{\circ}e$ )           | $HG = 181^{\frac{5}{6}}e - 23^{\circ}e = 158e$               | $4^{\frac{7}{12}} : 5 = 0.9167$                            | $\cos(23^{\circ}50') = 0.9147$ |
| Äquator $0^{\circ}$                      | $HL = 181^{\frac{5}{6}}e$                                    |  |                                |
| PK von Antimeroë ( $16^{\circ}e$ )       | $HZ = 181^{\frac{5}{6}}e + 16^{\circ}e = 198^{\frac{1}{4}}e$ | $4^{\frac{5}{6}} : 5 = 0.9667$                             | $\cos(16^{\circ}25') = 0.9592$ |

Tab. 4: Übersicht über die Radien der Parallelkreise und die Verkürzungen in der 2. ptolemäischen Projektion.

### Die 3. ptolemäische Projektion (Geographie 7,6f.)

Am Schluss des 7. Buches, nach der Beschreibung der nach der Konstruktionsanleitung<sup>15</sup> des 1. Buches angefertigten Weltkarten der 1. und 2. Projektion, skizziert Ptolemaios – mehr als geistvolles Konstruktionsexperiment als zur praktischen Verwendung gedacht – eine dritte, noch viel anspruchsvollere Projektionsmethode (Geographie 7,6f.), auf die hier nur kurz eingegangen werden soll. Sie hat – im Gegensatz zu den beiden anderen Projektionen – in den griechischen Handschriften keine in die Antike zurückreichenden Spuren hinterlassen und in der Kartographiegeschichte nur eine geringe Rolle gespielt. Sie ist erst in der Renaissance in einigen lateinischen Handschriften rekonstruiert worden (Abb. 9).<sup>16</sup>

Ptolemaios denkt sich die Erdkugel innerhalb einer durch den Zodiakos und die Kolkurkreise angedeuteten Himmelskugel (=Armillarsphäre). Die Blickebene bildet wieder der in der Mitte der damals bekannten Oikumene angenommene, durch das auf dem nördlichen Wendekreis gelegene Syene/Assuan (23<sup>5</sup>/<sub>6</sub>°) gehende Parallelkreis, der hier als Gerade erscheint; der Mittelmeridian als Mittelsenkrechte verläuft wieder durch den Persischen Golf. Eigentlich handelt es sich um einen – nicht in allen Teilen konsequent durchgeführten – Versuch, einen Erdglobus, den man unter dem genannten Blickwinkel betrachtet, perspektivisch auf eine Ebene zu übertragen: Dabei erscheint der südliche die Oikumene begrenzende Parallelkreis nach unten, der nördliche nach oben gewölbt; nach den Seiten hin bleiben die Meridian-Intervalle dagegen gleich.

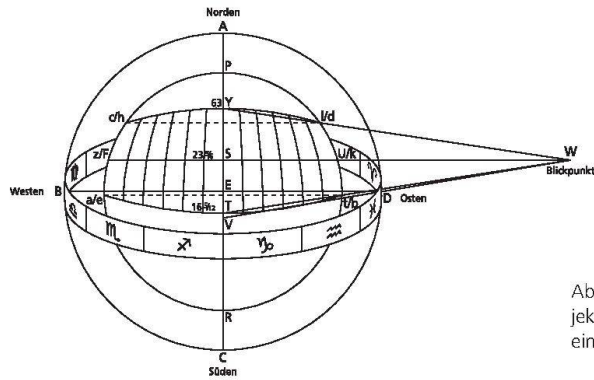


Abb. 9: 3. ptolemäische Projektion: Weltkarte innerhalb einer Armillarsphäre.

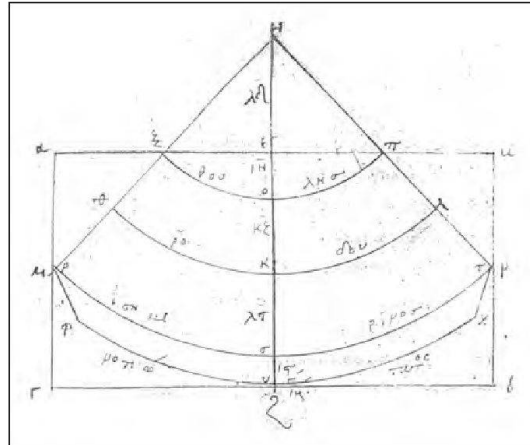


Abb. 10: Skizze zur 1. ptolemäischen Projektion im Codex Vaticanus Graecus 177, fol. 25r (um 1300)

### Theorie und Praxis. Zu den Konstruktions-skizzen und Karten in der handschriftlichen Überlieferung

#### Konstruktionszeichnungen

In den wichtigsten griechischen Handschriften<sup>17</sup> sind im 1. Buch kleinformatige Konstruktionszeichnungen von unterschiedlicher Qualität an passender Stelle in den Text eingefügt, die – so beweisen die ständigen Verweise vom Text auf die Skizzen – über mehrere Zwischenstufen zweifellos auf Ptolemaios selbst zurückgehen. Einzig die Hilfskonstruktionen im 7. Buch zur 3. Projektion sind nur in einer verhältnismässig späten Handschrift belegt (Codex Vaticanus Palatinus 388, fol. 127r–128r, 15. Jh.). Eine recht sorgfältig gezeichnete und beschriftete Konstruktions-skizze zur 1. ptolemäischen Projektion findet sich z.B. im Codex Vaticanus Graecus 177 (um 1300; vgl. Abb. 10), einem der bedeutendsten Textzeugen.

Auffallend ist, dass dagegen die Konstruktionszeichnung für die schwierigere 2. Projektion sozusagen in allen griechischen Handschriften vollkommen falsch überliefert ist; einzig im Codex Seragliensis GI 57 (dort sehr beschädigt) und in einer späteren Abschrift aus dem 14. Jh., dem Codex Athous Vatopedi, findet sich – neben der hartnäckig auch hier tradierten falschen – eine ganz flüchtig gezeichnete richtige Skizze der 2. Projektion, welche immerhin die gekrümmten Meridiane deutlich erkennen lässt (Abb. 11).<sup>18</sup>

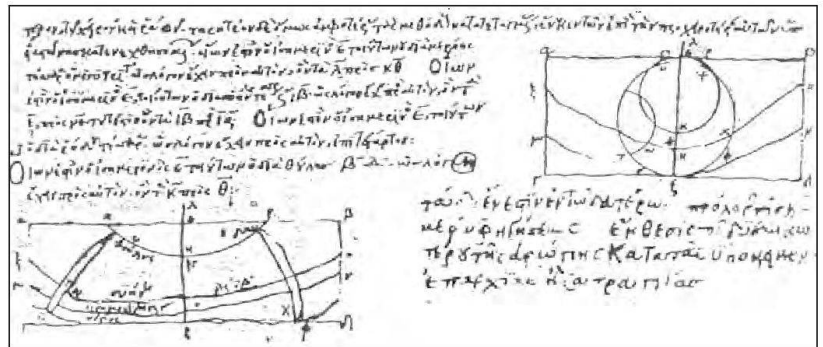


Abb. 11: Nebeneinander, recht flüchtig gezeichnet, die richtige und die verorbene Konstruktions-skizze zur 2. ptolemäischen Projektion im Codex Athous Vatopedi 655, fol. 7v (14. Jh.)

#### Überprüfung der Weltkarten in Handschriften und frühen Drucken.

Neben den kleinformatigen Konstruktionszeichnungen im 1. Buch gehörten die grossformatigen Weltkarten – vermutlich in allen drei Projektionen – zum ursprünglichen Bestand der ptolemäischen Geographie. Es sei daher zum Schluss noch ein Blick geworfen auf die in einigen Handschriften erhaltenen, zweifellos in langer Tradition auf Ptolemaios zurückgehenden Weltkarten,<sup>19</sup> und dabei geprüft, inwiefern diese sich an dessen mathematische Vorgaben halten. Herangezogen seien die zwei ältesten und zugleich bedeutendsten Kartenhandschriften: der Codex Vaticanus Urbinas 82 und der Codex Seragliensis GI 57, beide um 1300 in Byzanz geschrieben. Beide Weltkarten sind auf einem grossformatigen Pergament-Doppelblatt von ca. 57 cm x 84 cm angebracht, was angesichts der weit über den Rand hinausführenden Konstruktionslinien ein beachtliches technisches Können des Zeichners voraussetzt. Die Überprüfung vergleicht die als gegeben vorausgesetzte Breitenausdehnung vom Äquator bis Thule von 63e mit der Lage des entscheidenden Punktes H, bzw. des ausserhalb des Kartenrandes liegenden Zentrums der konzentrischen Kreise:

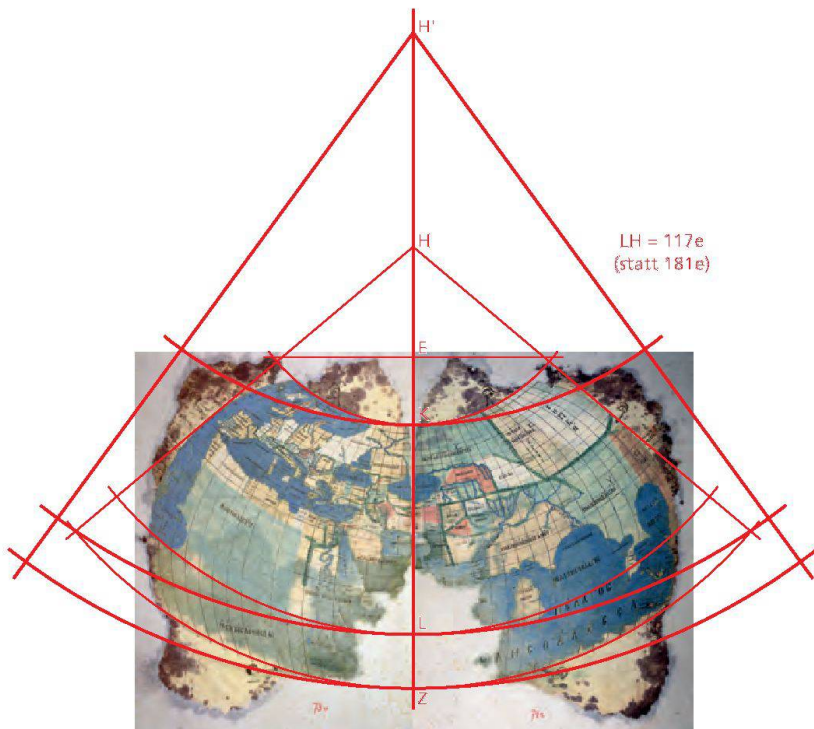
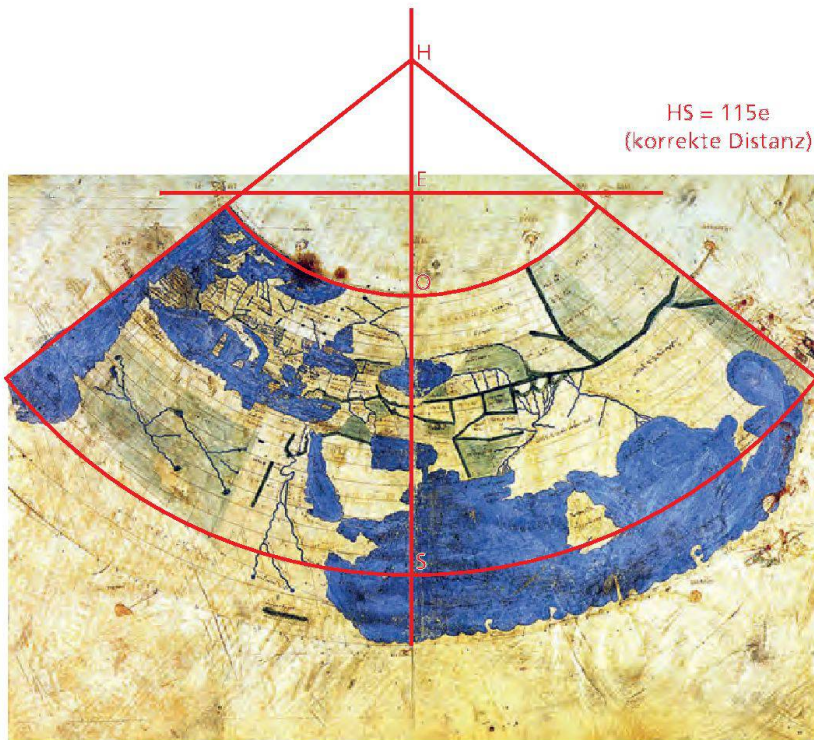


Abb. 12: Weltkarte nach der 1. Projektion im *Codex Vaticanus Urbinas* 82, fol. 60v/61r: Der Äquator-Kreisradius HS entspricht genau den geforderten 115e.

Abb. 13: Weltkarte nach der 2. Projektion im *Codex Seragliensis* GI 57, fol. 73v/74r: Der Äquator-Kreisradius LH ist mit ca. 117e statt der geforderten 181e deutlich zu klein.

Bei der im *Codex Vaticanus Urbinas* 82 nach der 1. Projektion gezeichneten Weltkarte zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit der Konstruktionsanleitung des Ptolemaios: der Zentrumspunkt H liegt richtig 115e über dem Äquator (Abb. 12).

Anders steht es mit der einzigen in griechischen Handschriften erhaltenen Weltkarte nach der 2. Projektion in der Schwesterhandschrift *Codex Seragliensis* GI 57: Überraschenderweise liegt der Zentrumspunkt H, der weit ausserhalb der Zeichnungsfläche liegen sollte, deutlich zu nahe am Kartenrand und verursacht zu enge Kreise: Statt der geforderten 181 Einheiten (e) sind es nur ca. 117e (Abb.13); vielleicht war es so bequemer zu zeichnen.

Schliesslich soll noch die Weltkarte angeführt werden, die Mercator in seiner Ptolemaios-Edition von 1578 vorlegt, «eine Reverenz des Humanisten M. gegenüber dem grossen antiken Geographen und Kartographen und eine der schönsten Ptolemäus-Ausgaben».<sup>20</sup> Hier erhebt er den Anspruch «die Karten des Ptolemaeus im Sinn des Autors redigiert und berichtigt zu haben».<sup>21</sup> Es spricht für den fachkundigen Kartographen, dass seine Weltkarte genau den Berechnungsgrundlagen des Ptolemaios entspricht: Der Zentrumspunkt des Äquator-Kreisradius liegt richtig ca. 181 Einheiten über dem Äquator (Abb. 14).

### Résumé Les présuppositions mathématiques à la base de la construction de la carte de Ptolémée

Parmi les mérites particuliers de Ptolémée figurent ses nouvelles méthodes pour dessiner une carte du monde tenant compte du mieux possible des proportions de la surface d'une sphère. Le résultat de ses propositions de projections, les deux célèbres modes de projection pour les cartes du monde, est largement connu. En revanche, les raisonnements mathématiques et les calculs à la base de ces projections sont moins connus. C'est pourquoi le présent exposé tend à élucider l'élaboration de ces méthodes de projections – en s'appuyant sur le texte de Ptolémée – et d'en vérifier les calculs. Dans cette démarche, si non seulement le procédé étudié mais encore l'étonnante précision des calculs du grand astronome et mathématicien sont mis en valeur, l'effet escompté est atteint. Pour terminer, un coup d'œil sur la transmission des cartes manuscrites jusqu'à la splendide édition de Ptolémée par Mercator de 1578 illustre comment il a été tenu compte du système de Ptolémée.

### Summary The mathematical requirements for Ptolemy's drafts of the world map

One of Ptolemy's extraordinary achievements was the novel method for drawing a world map, taking as much as possible the proportions of the surface of a globe into consideration. The result of his proposed projections – the first and second projections of the famous world map – is well-known. Less known are the mathematical theories and computations he used for these manuscripts. The present article will try to bring light on the development of these projection methods – in close accordance with his writings – and to verify his computations. Should not only his ingenious method but also the astonishing precision of the computations of this great astronomer and mathematician be asserted, then that would be a welcome side effect. And finally, a look at the subsequent hand-written transmission of the map up to Mercator's magnificent 1578 Ptolemy edition shows how Ptolemy's specifications were taken into account later on.

### Literatur

**Berggren, J. Lennart / Jones, Alexander:** *Ptolemy's Geography. An Annotated Translation of the theoretical Chapters* (Princeton 2000), S. 85–93.  
**Dilke, Oswald A. W.:** *The Culmination of Greek Cartography in Ptolemy*, in: *The History of Cartography* Bd. 1 (Chicago/London 1987), bes. S. 185–190.  
**Hopfner, Friedrich:** *Die beiden Kegelprojektionen <I,II> des Ptolemaios* (zu 1,24), Exkurs E in: *Theorie und Grundlagen der darstellenden Erdkunde* (= deutsche Übersetzung der *Geographike Hyphegesis* I und Vorwort II), Klotho. *Historische Studien zur feudalen und vorfeudalen Welt* 5 (1938), S. 93–105.  
**Pápay, Gyula:** *Die Entwicklung der Kartennetzentwürfe in der Antike aus wissenschaftshistorischer Sicht*, in: *6. Kartographie-historisches Colloquium*, Berlin 1992 (Berlin 1994), S. 101–108.  
**Pápay, Gyula:** *Anwendung von Methoden der digitalen Bildbearbeitung zur Erforschung der Herausbildung der Kartennetzentwurfslehre in der Antike*, in: *Abhandlungen der Arbeitsgemeinschaft Geschichte und EDV (AAGE)* 1(2005), S. 63–71.  
**Pápay, Gyula:** *Zur Frühgeschichte der Erdgloben*, in: *Térkép-Tudomány, Map-Science, Karten-Wissenschaft* (Budapest 2006), S. 323–333.

**Stückelberger, Alfred / Graßhoff, Gerd:** *Ptolemaios, Handbuch der Geographie, Textband, griechisch – deutsch* (Basel 2006).

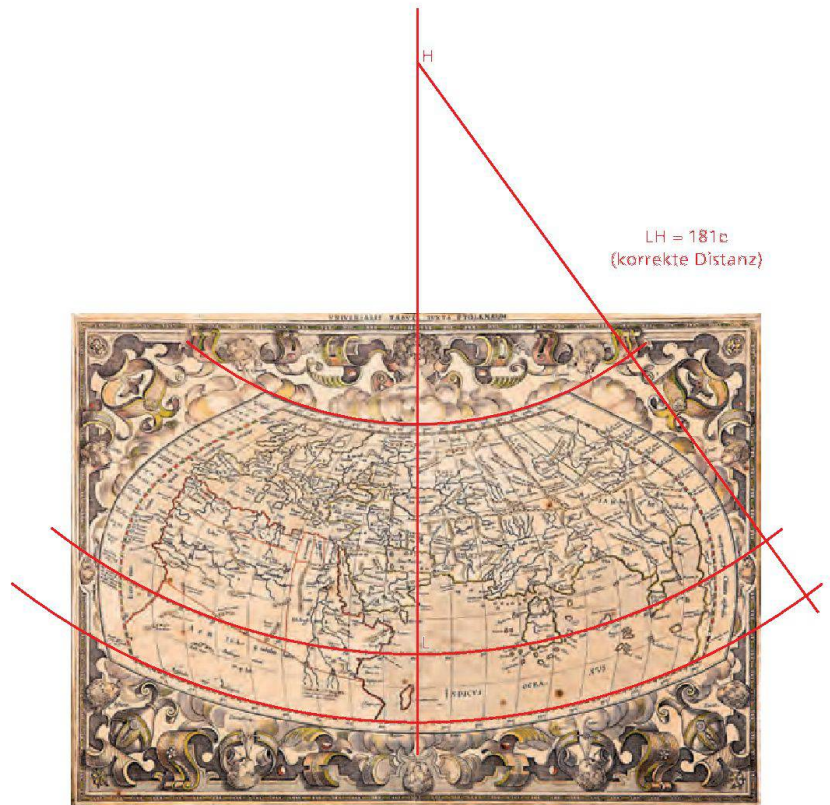
**Stückelberger, Alfred / Mittenhuber, Florian:** *Ptolemaios, Handbuch der Geographie, Ergänzungsband* (Basel 2009); dort weitere Literaturangaben.

**Stückelberger, Alfred:** *Das Ptolemaios-Diagramm des Planudes. Ein Nachtrag zum Problem der Kartenüberlieferung*, in: *Museum Helveticum* 68 (2011), S. 141–147.

## Anmerkungen

Bildnachweis: Alle Abb. sind von Rohner/Stückelberger (Ptolemaios-Forschungsstelle, Bern).

- 1 Hopfner (1938) S. 93–105; Dilke, (1987) S. 185–190; Pápay (1994), S. 101–108; Berggren/Jones (2000), S. 85–93.
- 2 Gerhard Mercator, *Claudii Ptolemaei Geographiae libri VIII recogniti iam et diligenter emendati cum tabulis geographicis ad mentem auctoris restituti et emendatis per Gerardum Mercatorem* (Text und Karten: Köln 1584, nur Edition der Karten: Köln 1578); vgl. dazu unten S. 40.
- 3 Alle Textstellen basieren auf unserer kürzlich erschienenen Textausgabe: A. Stückelberger / G. Graßhoff, *Ptolemaios, Handbuch der Geographie, griechisch – deutsch* (Basel 2006); zu den mathematischen Grundlagen vgl. bes. das Kap. *Masse und Messungen* in: *Ptolemaios, Handbuch der Geographie, Ergänzungsband* (Basel 2009), S. 218–252.
- 4 Ausführlicher dazu Stückelberger, im Ergänzungsband (2009) Kap. *Masse und Messungen*, S. 219ff.
- 5 Einzig für  $\frac{2}{3}$  wird ein besonderes Zeichen verwendet.
- 6 Die Länderkarten in den griechischen Handschriften sind – entsprechend den angeführten Anweisungen – durchwegs rechteckig gehalten. Die Trapezform der Länderkarten, bei denen die begrenzenden Parallekreise oben und unten passend verkürzt werden, ist erst in den lateinischen Renaissancehandschriften belegt und geht wohl auf Nicolaus Germanus zurück (vgl. dazu Ergänzungsband 2009, S. 64f.).
- 7 Daneben mag es noch andere Weltkartenentwürfe gegeben haben. So erwähnt Strabo 2,5,9 eine *chlamys*-artige Form, d.h. eine einem Reitermantel (*chlamys*) ähnliche, offenbar trapezförmige Form der Oikumene (ob damit wirklich eine Karte gemeint ist, bleibe dahingestellt); vgl. Pápay (2006), S. 332–333.
- 8 An eine eigentliche «Zylinderprojektion», wie man das heute bezeichnen würde, hat man dabei in der Antike nicht gedacht.
- 9 Die Bezeichnung «Kegelprojektion» ist aufgrund der Ähnlichkeit der Konstruktion mit einem aufgerollten Kegelmantel auf gekommen. Im mathematischen Sinne handelt es sich nicht um eine eigentliche Kegelprojektion: Die von Ptolemaios angeführte Konstruktion ist keine Projektion, und das Wort «Kegel»/*konos* kommt bei ihm gar nicht vor. Hopfner (1938), S. 93 beschreibt sie in seiner mathematischen Analyse der ptolemäischen Projektionen als «Strahlenbüschel und eine Schar konzentrischer Kreise, deren Mittelpunkt im Scheitel des Büschels liegt»; vgl. dazu auch Pápay (2005), S. 66.
- 10 Die Umzeichnung der Konstruktionsskizzen und die Buchstaben zur Bezeichnung der Punkte lehnen sich weitgehend an unsere Ptolemaiosausgabe an (2006), Bd. 1, S. 123–135.
- 11 Das sagenhafte, auf dem 63. Breitenkreis angesiedelte Thule bildet die ganze Antike hindurch die Nordgrenze der Oikumene. Von den zahlreichen Lokalisierungsvorschlägen dürfte derjenige am meisten für sich haben, der – angesichts der beträchtlichen angenommenen Ausdehnung der Insel – darin einen nicht als Festland erkannten Teil Skandi-naviens sieht.
- 12 Die Lage des Punktes H (G bei Pápay) ist keineswegs «rätselhaft», wie G. Pápay (1994) S. 104 vermutet, und eine Herleitung aus vorptolemäischen Kartenentwürfen somit überflüssig.
- 13 So schon richtig Berggren/Jones (2000) S. 86, Anm. 68. Die Nachzeichnung zeigt, dass die Ecken X/P und M/N knapp ausserhalb des Rechteckes liegen und somit das Strahlenbündel nicht genau auf das Rechteck abgestimmt ist.
- 14 In den Handschriften, an welche sich die hier verwendeten Bezeichnungen der Punkte anlehnen (die griechischen Lettern sind, wo nötig, in lateinische umgesetzt), wird der Zentrums-Punkt in dieser Zeichnung aus unerfindlichen Gründen mit *ΛΛ* bezeichnet; wir haben ihn – in Angleichung an die vorangehenden Zeichnungen – in H umbenannt.



- 15 Ptolemaios unterscheidet genau zwischen den Beschreibungen der eigentlichen Karten (=hypographai) und den Konstruktionszeichnungen (katagraphai) im 1. Buch.
- 16 Erst in den späteren lateinischen Handschriften des 15. Jh. findet man rekonstruierte Illustrationen zur 3. Projektion, so etwa im *Cod. Parisinus Lat. 4801*, fol. 74.
- 17 Die zahlreichen, z.T. prächtig ausgestatteten lateinischen Renaissance-Handschriften der *Geographie* bzw. der *Cosmographie* sind zwar ein eindrückliches Zeugnis für das grosse Interesse, das im 15. Jh. dem wieder entdeckten Werk des Ptolemaios entgegengebracht wurde, sie sind aber für die Text- und Bildüberlieferung wenig relevant.
- 18 Ausführlicher dazu Stückelberger (2011), S. 141–147.
- 19 Zur Kartenüberlieferung s. bes. Florian Mittenhuber, Kap. 1.4 *Karten und Kartenüberlieferung* im Ergänzungsband (2009), S. 34–108.
- 20 So Uta Lindgren, in: *Neue Dt. Biographie* 17 (1994), S. 113. Während die früheren Ptolemaiosausgaben noch vornehmlich als aktuelle geographische Informationsquelle gedacht waren, ist nach den gewaltigen Horizonterweiterungen im ausgehenden 15. Jh. und beginnenden 16. Jh. die Ptolemaios-Ausgabe Mercators «nur noch» von geschichtlicher Bedeutung.
- 21 So im Titel der Kölner Karten-Ausgabe von 1578: *Tabulae geographicae Cl. Ptolemaei ad mentem au(ctoris) restituae et emendatae per Gerardum Mercatorem*. Betreffend Mercator verwenden wir dankbar verschiedene hilfreiche Informationen von Thomas Horst (München).

Abb. 14: Weltkarte des Ptolemaios nach der Bearbeitung Mercators in seiner Ausgabe von 1578; der Punkt H liegt richtig ca. 181e über dem Äquator.

Alfred Stückelberger,  
Prof. (em.), Dr.  
Institut für Klassische  
Philologie der Universität Bern  
E-Mail:  
astueckelberger@bluewin.ch

Heiner Rohner, Dr.  
Mathematiklehrer am  
Gymnasium Neufeld, Bern  
E-Mail: heiner@rohner.net