Von Eigenschaften ausgezeichneter Punkte in regulären geometrischen Systemen = Au sujet des caractéristiques des points indiqués dans les systèmes géométriques réguliers = On the properties of designated points in regular geometric systems

Autor(en): **Haller, Fritz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bauen + Wohnen = Construction + habitation = Building + home : internationale Zeitschrift**

Band (Jahr): **21 (1967)**

Heft 11: **Bauforschung = Construction research = Recherche en construction**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-332980

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Fritz Haller, Solothurn

Von Eigenschaften ausgezeichneter Punkte in regulären geometrischen Systemen

Au sujet des caractéristiques des points indiqués dans les systèmes géométriques réguliers

On the properties of designated points in regular geometric systems

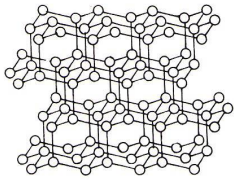
Erster Arbeitsbericht über Studien an der Division of Building Research der University of Southern California, Direktor Professor Konrad Wachsmann

Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, Eigenschaften und Zusammenhänge ausgezeichneter Punkte in regulären geometrischen Systemen näher kennenzulernen, mit dem Ziel, Gesetzmäßigkeiten in solchen Systemen aufzuzeichnen und diese in Form von Modellen sichtbar zu machen. Dies in der Meinung, daß aus den Erfahrungen Regeln oder Modelle resultieren, die als Arbeitsgrundlage oder Arbeitsgeräte zur Planung von mehrdimensionalen Strukturen dienen.
Dieser erste Arbeitsbericht hat die Aufgabe, Beobachtungen festzuhalten und den Ausgangspunkt für konkrete Betrachtungen zu umschreiben. Er besitzt den Charakter von Arbeitsblättern, die für eine spätere Zusammenfassung als Informationsmaterial dienen. Auf diesen Blättern sind die Arbeiten chronologisch zusammengefaßt. Hypothesen, Analogien oder Resultate sind an den Stellen eingesetzt, wo sie aufgestellt oder erkannt wurden.

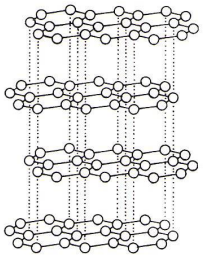
Wenn es gelingen sollte, die Eigenschaften und die gegenseitigen Beziehungen dieser ausgezeichneten Punkte genau zu definieren, so könnte man sich vielleicht räumliche geometrische Systeme als ein Netz von Punkten mit bestimmten Eigenschaften und Beziehungen vorstellen. Es gäbe keine Räume, Flächen und Linien mehr. Diese würden sich alle als Folge der Eigenschaften und der Beziehungen der ausgezeichneten Punkte ergeben.

Ähnlich wie Atome auf Grund der Eigenschaften ihrer Kraftfelder unter gewissen Voraussetzungen sich zu bestimmten geometrischen Strukturen formieren, erzeugen die gewählten Kraftfelder ausgezeichneter Punkte ein Netz von geometrischen Ordnungen.

Kohlenstoff-Atomgitter

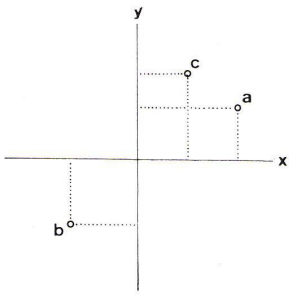


Diamantgitter

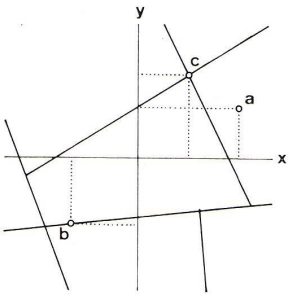


Graphitgitter

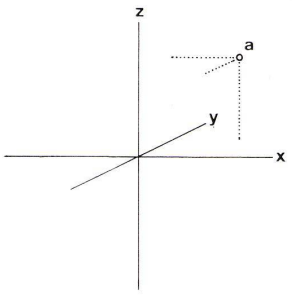
Definition ausgezeichneter Punkte



Punkte sind in einer unendlichen Ebene durch ihre Abstände von zwei senkrecht zueinander stehenden Koordinaten x und y bestimmt und unterscheidbar.

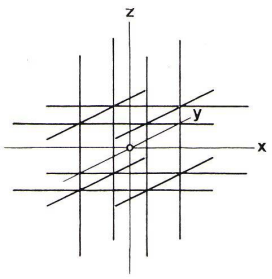


Punkte, die in einer unterteilten Ebene oder in einem zweidimensionalen Flächensystem liegen, unterscheiden sich nebst ihren Abständen von den Koordinaten x und y durch ihre Lage in den Flächen und durch die Eigenschaften der Flächen, in denen sie liegen.
Punkte, die auf Grenzlinien zweier Flächen oder auf Schnittpunkten mehrerer Grenzlinien liegen, haben gegenüber allen übrigen Punkten eine ausgezeichnete Lage im System. Sie liegen in zwei und mehr Flächen und sind bestimmt von den Eigenschaften mehrere Flächen.
Sie sind »ausgezeichnete Punkte« genannt.

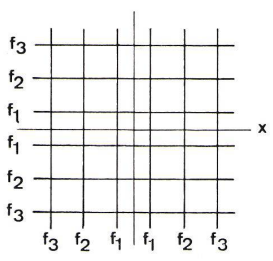


Dieselben Betrachtungen lassen sich auf räumliche Systeme übertragen.
Punkte in einem unbegrenzten Raum können durch ihre Abstände von den Koordinaten x, y und z unterschieden werden.
Punkte in einem von Flächen unterteilten Raum – genannt »dreidimensionales Flächensystem« – unterscheiden sich nebst ihren Koordinaten durch ihre Lage in den von den Flächen gebildeten Räumen.
Ausgezeichnete Punkte sind solche, die auf Schnittlinien von Flächen oder auf Schnittpunkten von Schnittlinien liegen.

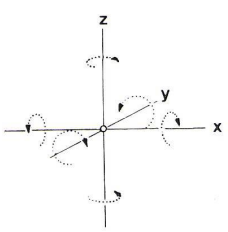
Eigenschaften von ausgezeichneten Punkten in einem orthogonalen regulären räumlichen Flächensystem



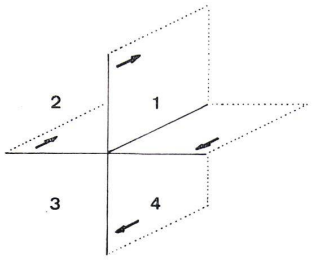
Legt man senkrecht zu jedem Ast der drei Koordinaten x, y und z je eine Ebene – also sechs Ebenen total (f_1) –, so umschließen diese einen kubischen Raum, in dessen Mittelpunkt der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt.



Legt man außerhalb dieser Ebenen parallel zu ihnen wieder sechs Ebenen (f_2), so umschließen die total 12 Ebenen (f_1 und f_2) 27 kubische Räume.
Setzt man diesen Prozeß mit den Ebenen f_3 fort, so entstehen 125 Räume, dann mit den Ebenen f_4 343 Räume u. s. f.
Ein solches System sei »orthogonales dreidimensionales Flächensystem« genannt.

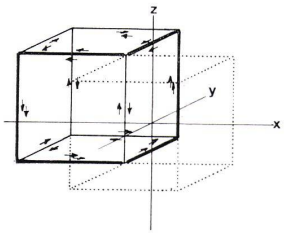


Gibt man den senkrecht auf den Koordinatenachsen stehenden Flächen eine vom Nullpunkt aus gesehen gleichgerichtete Grund-Drehrichtung oder Orientierungsrichtung (analog der Reihenfolge der Quadranten) als Merkmal, so entstehen für die ausgezeichneten Punkte des Systems unterschiedliche Beziehungen zur Grund-Drehrichtung der Flächen, denen sie angehören.

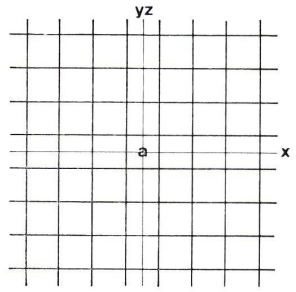


Bei Punkten auf Schnittlinien von Flächen ist die Beziehung der Drehrichtung der einen der vier Raumwinkel (Quadranten) begrenzenden Nachbarflächen unterschiedlich.
Im ersten und dritten Quadranten ist die Drehrichtung gegenläufig, im zweiten und vierten ist sie parallel.

Löst man diese vier Beziehungen voneinander und ordnet sie den kubischen Räumen zu, denen die Quadranten angehören, so entstehen je nach der Lage im System Räume, genannt »Kuben«, mit Kanten und Flächen von unterschiedlichen Eigenschaften.

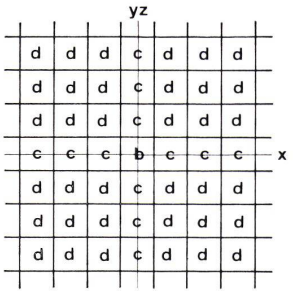


Sechs Kanten der Flächen, die gegen die Koordinatenachsen gerichtet sind, haben angrenzenden Flächen mit paralleler Grund-Drehrichtung.
Die gegen den Nullpunkt gerichtete Kante und die übrigen fünf Kanten – also total sechs Kanten – haben anliegende Flächen mit gegenläufiger Grund-Drehrichtung.
Zwei gegenüberliegende Flächenpaare haben parallele Grund-Drehrichtung. Ein gegenüberliegendes Flächenpaar hat gegenläufige Grund-Drehrichtung.



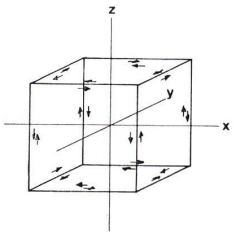
Kubus a

Der innerste kubische Raum oder der »Kubus«, in dessen Mittelpunkt der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt.

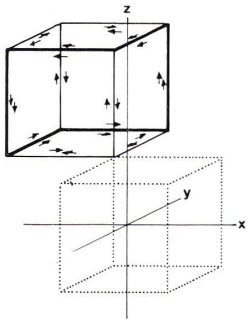


Kubus d

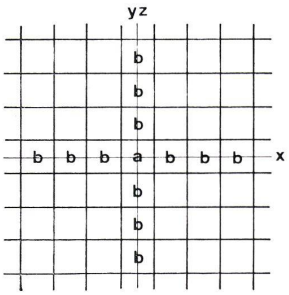
Alle äußeren kubischen Räume, die weder eine Koordinate noch eine Koordinatenebene umschließen. Der dem Kubus a nächstliegende Kubus d hat mit diesem eine gemeinsame Ecke.



Alle Kanten haben angrenzende Flächen mit gegenläufiger Grund-Drehrichtung.
Alle gegenüberliegenden Flächen haben gegenläufige Grund-Drehrichtung.



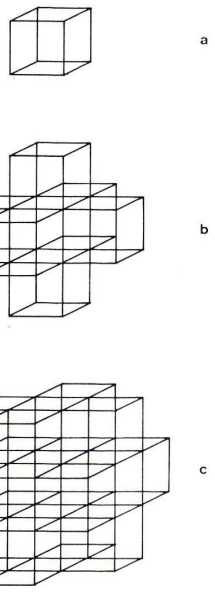
Gegenüberliegende Kanten haben immer unterschiedliche Eigenschaften
Eine Kante hat anliegende Flächen mit paralleler Grund-Drehrichtung, die andere Fläche mit gegenläufiger Richtung.
Die drei dem Kubus a zugewendeten und die drei diagonal gegenüberliegenden Kanten haben anliegende Flächen mit gegenläufiger Drehrichtung.
Alle drei Flächenpaare haben parallele Grund-Drehrichtung.



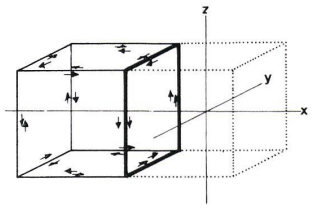
Kubus b

Alle äußeren kubischen Räume, welche die Koordinatenachsen x, y und z umschließen. Der dem Kubus a benachbarte Kubus b hat mit diesem eine gemeinsame Fläche.

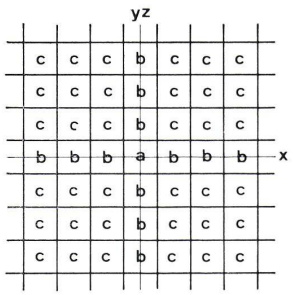
Hypothese



Alle die mit dem beschriebenen Vorgehen entstandenen unterschiedlichen Kuben a, b, c und d sind in dem aus zwei mal sechs Ebenen gebildeten Flächensystem mit 27 umschlossenen kubischen Räumen anzutreffen. Außerhalb dieses Kerns – also in einem Flächensystem aus drei mal sechs Ebenen und mehr – findet man keine kubischen Räume mit andern Eigenschaften.

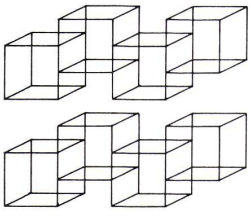


Die vier gegen den Nullpunkt gerichteten Kanten haben angrenzende Flächen mit paralleler Grund-Drehrichtung.
Die übrigen acht Kanten haben angrenzende Fächen mit gegenläufiger Grund-Drehrichtung.
Zwei gegenüberliegende Flächenpaare haben gegenläufige Grund-Drehrichtung.
Das senkrecht auf der vom Würfel umschlossenen Koordinatenachse x, y oder z stehende Flächenpaar hat parallele Grund-Drehrichtung.



Kubus c

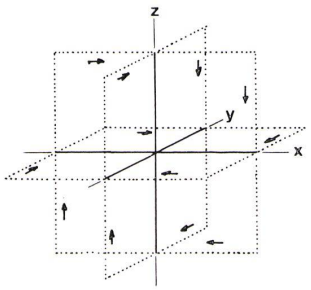
Alle äußeren kubischen Räume, in denen die von den Koordinatenachsen gebildeten Flächen liegen. Der dem Kubus a benachbarte Kubus c hat mit diesem eine gemeinsame Kante.



Es scheint, daß in den 27 Kuben alle Eigenschaften und Beziehungen von ausgezeichneten Punkten des orthogonalen dreidimensionalen Flächensystems untersucht werden können.

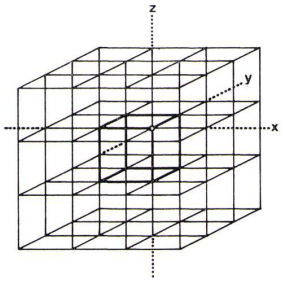
Die verschiedenen Typen haben eine spezifische Lage im System. Die 27 Kuben teilen sich auf in

1 Kubus a,
6 Kuben b, entspricht den 6 Flächen von a,
12 Kuben c, entspricht den 12 Kanten von a,
8 Kuben d, entspricht von 8 Ecken von a.



Durch Drehung in den Koordinatenebenen oder parallel dazu können die Kuben des gleichen Typs gegenseitig zur Deckung gebracht werden.

Es stellt sich die Frage, ob durch die speziellen Annahmen (Lage des Nullpunktes, Drehrichtung usw.) diese speziellen Kubentypen entstanden sind und andere Annahmen andere Typen erzeugen.
Im folgenden ist untersucht, welche Resultate andere Annahmen ergeben.



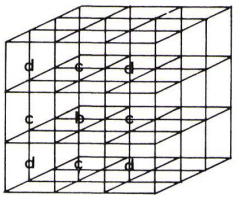
Verschiebt man den Nullpunkt vom Zentrum des Kubus a an eine Ecke des Kubus und nimmt man an, daß die Grund-Drehrichtung der Koordinatenebenen und der jeweils rechts davon liegenden im Uhrzeigersinn ist, und die links vom Nullpunkt liegenden Ebenen im Gegenuhrzeigersinn orientiert sind (also vom Nullpunkt aus gesehen ebenfalls in Uhrzeigerrichtung), so entstehen dieselben Kubentypen.

Kubus a mit dem Nullpunkt in einer Ecke, 6 Kuben b, 12 Kuben c und 8 Kuben d.

Nimmt man bei derselben Lage des Nullpunktes für alle Ebenen gleiche Drehrichtung an, so entstehen alles Kuben des Typus d.

Bei dieser Annahme kann der Nullpunkt in jede Lage verschoben werden. Diese Annahme erzeugt nur Kuben d.

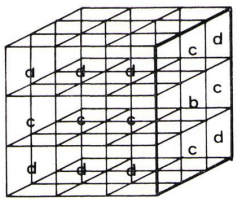
Alle Variationen von Flächendrehrichtungen und Nullpunktlagen erzeugen verschiedene Gruppierungen der Kuben a, b, c und d, und zwar solche, die entstehen, wenn die Kuben a, b, c und d einzeln wieder in 27 Zeilen unterteilt werden.



Unterteilung des Kubus a

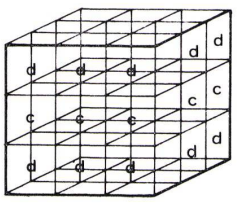
Ergibt das bereits beschriebene System (Nullpunkt im Zentrum, Drehrichtung der Flächen vom Nullpunkt aus gesehen gleich).

Es entstehen
1 Kubus a
6 Kuben b
12 Kuben c
8 Kuben d



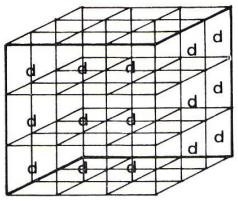
Unterteilung des Kubus b

Es entstehen
3 Kuben b
12 Kuben c
12 Kuben d



Unterteilung des Kubus c

Es entstehen
9 Kuben c
18 Kuben d

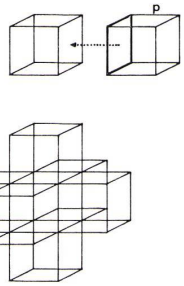


Unterteilung des Kubus d.

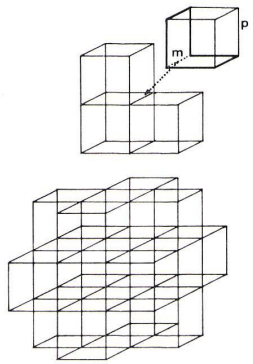
Es entstehen
27 Kuben d

Ein weiterer Versuch, die Strukturen der verschiedenen kubischen Räume weder mit Hilfe des Koordinatensystems noch mit Grund-Drehrichtungen der Flächen zu erforschen:
Man baut die kubischen Räume einen nach dem andern auf. Zuerst eine Zelle, dann die zweite an die erste und so fort und beobachtet dabei die Vorgänge.

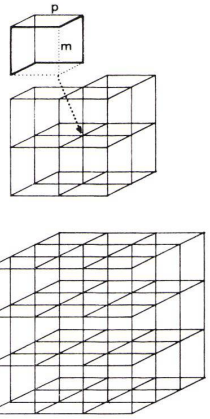
Erste Stufe.
Man baut den Kubus a aus 6 Flächen.



Zweite Stufe.
Man baut an den Kubus a einen weiteren kubischen Raum. Dieser Kubus besteht aus fünf Flächen und hat – wie sich zeigt – das Strukturbild des Kubus b.
Solche Kuben b können an allen Flächen des Kubus a angebaut werden.
Der Kubus b wird in Richtung der Flächen bewegt.



Dritte Stufe.
Man baut zwischen die Kuben b einen kubischen Raum. Dieser Kubus besteht aus vier Flächen und hat das Strukturbild des Kubus c.
12 solcher Kuben c können an alle Flächen der Kuben b angebaut werden.
Der Kubus c wird in Richtung der Flächendiagonale bewegt.



Vierte Stufe.
Man baut an die Kuben c weitere kubische Räume. Diese Kuben bestehen aus drei Flächen und haben das Strukturbild der Kuben d.
Acht solcher Zellen können an die Kuben c angebaut werden.
Der Kubus d wird in Richtung der Raumdiagonale bewegt.

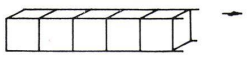
Auf diese Weise sind wieder die 27 Kuben a, b, c und d entstanden.
Eine kleine Präzisierung scheint durch diese Untersuchung nötig zu sein. Die in den Zeichnungen punktierten Kanten m – nicht vorhandene Kanten – sind in den geometrischen Strukturbildern der Kubentypen gleich bezeichnet wie die Kanten p.
Die p-Linien sind Schnittlinien von Flächen, die sich in der Grund-Drehrichtung drehen, oder auch Linien mit zwei Plus-Zeichen.
Die m-Linien sind Schnittlinien von Flächen, die sich entgegen der Grund-Drehrichtung bewegen, oder auch Linien mit zwei Minus-Zeichen (ausmultipliziert +).
Diese Unterscheidung könnte vielleicht einmal von Bedeutung sein.

Hypothese

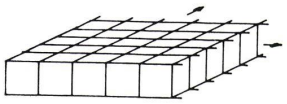
Versucht man, mit den unterschiedlichen Kuben einzeln oder kombiniert mit einem oder mehreren andern Typen dreidimensionale Flächensysteme zu bilden, so entstehen ein- oder mehrseitig begrenzte Systeme.

Systeme mit einem Typ

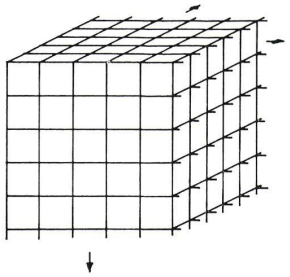
Mit dem Kubus a
ein einzelliges System, das in keine Richtung ausgedehnt werden kann:
Ein punktförmiges System.



Mit dem Kubus b
ein mehrzelliges System, das in einer Richtung fortgesetzt werden kann:
Ein linienförmiges System.

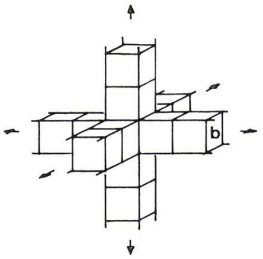


Mit dem Kubus c
ein mehrzelliges System, das in zwei Richtungen fortgesetzt werden kann:
Ein flächenförmiges System.

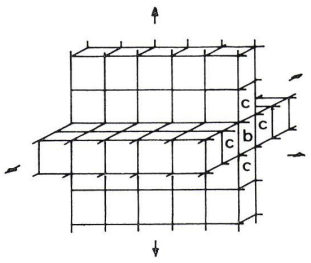


Mit dem Kubus d
ein mehrzelliges System, das in drei Richtungen fortgesetzt werden kann:
Ein raumförmiges System.
(Entspricht der Unterteilung von Kubus d in 27 Kuben, siehe Seite 427, Spalten 3 und 4 oben.)

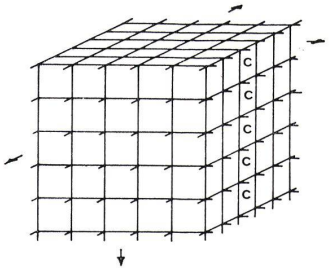
Systeme mit zwei Typen



Mit den Kuben a und b
ein mehrzelliges System, das linienförmig in allen Richtungen fortgesetzt werden kann.

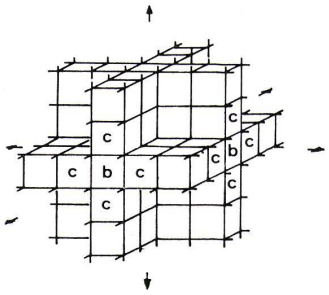


Mit den Kuben b und c
ein mehrzelliges System, das flächenförmig in fünf Richtungen fortgesetzt werden kann.

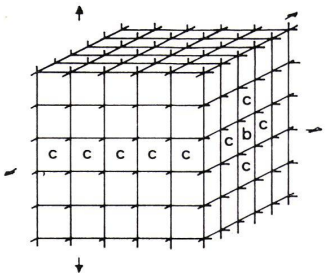


Mit den Kuben c und d
ein mehrzelliges System, das raumförmig in vier Richtungen ausgedehnt werden kann.
(Entspricht der Unterteilung von Kubus c in 27 Kuben, siehe Seite 427, Spalten 1 und 2 unten.)

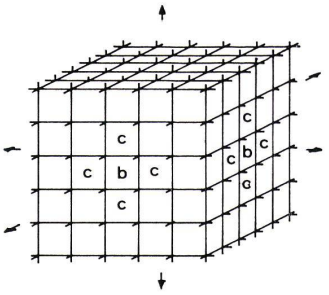
Systeme mit drei und vier Typen



Mit den Kuben a, b und c
ein mehrzelliges System, das flächenförmig in allen Richtungen fortgesetzt werden kann.

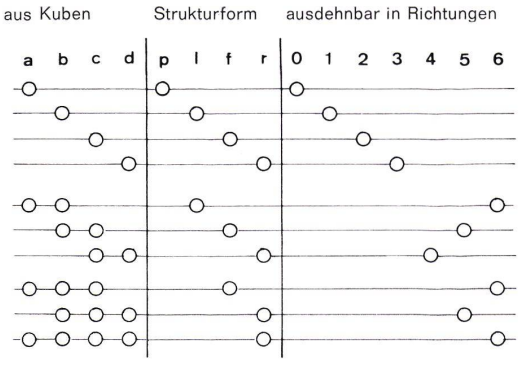


Mit den Kuben b, c und d
ein mehrzelliges System, das raumförmig in fünf Richtungen fortgesetzt werden kann.
(Entspricht der Unterteilung von Kubus b in 27 Kuben, siehe Seite 427, Spalten 1 und 2.)



Mit den Kuben a, b, c, und d
ein mehrzelliges System, das raumförmig in allen Richtungen fortgesetzt werden kann.
(Entspricht der Unterteilung von Kubus a in 27 Teile, siehe Seite 427, Spalten 1 und 2.)

Merkmale der verschiedenen Systeme



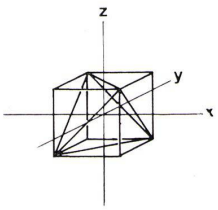
Mehrzellige Systeme mit linienförmiger Struktur müssen den Kubus b enthalten, mit flächenförmiger Struktur den Kubus c und mit raumförmiger Struktur den Kubus d.
Mehrzellige Systeme, die in allen – also sechs – Richtungen fortgesetzt werden können, müssen den Kubus a enthalten, in fünf Richtungen die Kuben b und c, in vier Richtungen die Kuben c und d, in drei Richtungen den Kubus d, in zwei Richtungen den Kubus c und in einer Richtung den Kubus b.

Die Punkte an den Ecken der kubischen Räume sind die am meisten ausgezeichneten Punkte des Systems. Die Beziehungen dieser Punkte untereinander sind deshab vermutlich die wichtigsten Merkmale des Systems.
Mit den bisherigen Untersuchungen sind die Beziehungen eines Eckpunktes zu den drei auf denselben Flächenschnittlinien liegenden benachbarten Eckpunkten eines kubischen Raumes beobachtet.
Verbindet man diagonal gegenüberliegende Punkte die in derselben Fläche liegen, so entstehen Diagonallinien. In eine Fläche eines Kubus kann nur eine solche Diagonale gelegt werden, ohne daß ein zusätzlicher Schnittpunkt entsteht.
Legt man in jede Fläche eines Kubus eine der beiden möglichen Diagonalen, so entstehen durch Variationen verschiedene geometrische Strukturen. Es ist eine endliche oder große Zahl von Variationen möglich.
Durch das Ergänzen der Kuben mit Diagonalen entsteht ein trianguliertes stabiles räumliches System.
Die Flächen können eliminiert werden. Es gib nur noch Punkte und Linien. Es scheint, daß es einige »klassische« Stellungen von Diagonalen in einem orthogonalen räumlichen System gibt.

Zwei solcher »klassischen« Anordnungen seien als Beispiele näher betrachtet – in der Hoffnung, daß daraus gewisse Hypothesen resultieren könnten.

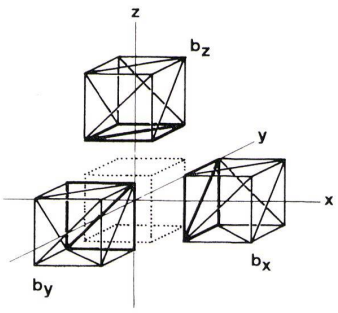
1. Beispiel

Die Richtung aller Diagonalen ist analog der Grund-Drehrichtung der Flächen.



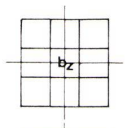
Kubus a

Die Richtung der Diagonalen gegenüberliegender Flächen ist entgegengesetzt analog der gegenläufigen Grund-Drehrichtung derselben.
4 Ecken haben 2 Diagonalen.
4 Ecken haben 1 Diagonale.

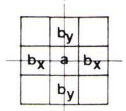


Kubus b

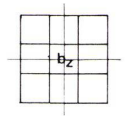
Entsprechend der Grund-Drehrichtung gegenüberliegender Flächen ist die Richtung ihrer Diagonalen. Ein Diagonalenpaar ist parallel, zwei gegenläufig.
(Diagonalen, die in Flächen mit negativer Grund-Drehrichtung sind, sind dicker gezeichnet.)



Obere Lage

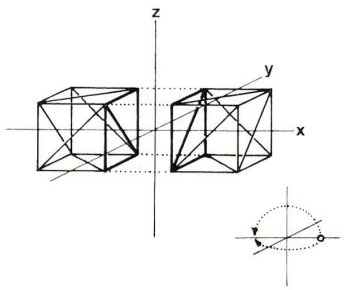


Mittlere Lage



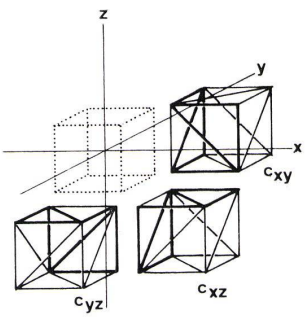
Untere Lage

Durch Drehung können nur gegenüberliegende Kuben so zur Deckung gebracht werden, daß alle Diagonalrichtungen gleich sind.
Es gibt demnach drei verschiedene Typen von b-Kuben.
2 Kuben bx in der x-Achse
2 Kuben by in der y-Achse
2 Kuben bz in der z-Achse



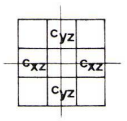
Die Drehung ist immer 180° in einer der beiden zur Achse des Kubus gehörenden Koordinatenebenen. Bei bx in den Ebenen xy oder xz.

Der Kubus kann durch Drehung von 180° um die von ihm umschlossene Koordinatenachse zur eigenen Dekkung gebracht werden.

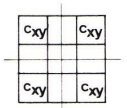


Kubus c

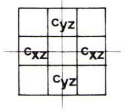
Entsprechend der Grund-Drehrichtung gegenüberliegender Flächen ist die Richtung ihrer Diagonalen. Zwei Diagonalenpaare sind parallel, ein Paar ist gegenläufig.
Zwei Diagonalen haben eine negative Richtung.



Obere Lage

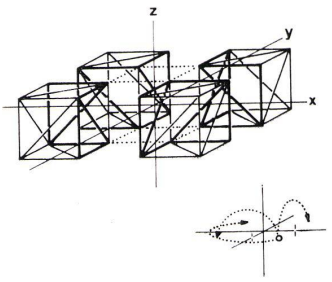


Mittlere Lage



Untere Lage

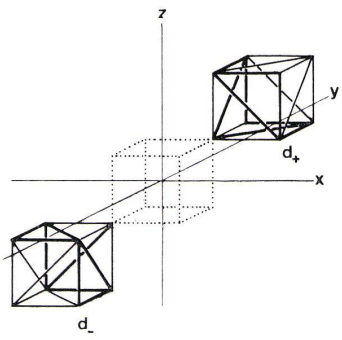
Durch Drehung können nur die in derselben Koordinatenebene liegenden Kuben so zur Deckung gebracht werden, daß alle Diagonalrichtungen gleich sind.
Es gibt demnach drei verschiedene Typen von c-Kuben.
4 Kuben c xy in der Ebene xy
4 Kuben c xz in der Ebene xz
4 Kuben c yz in der Ebene yz



Die Deckung zum Diagonal gegenüberliegender Kubus entsteht durch eine Drehung um 180° in der Ebene, in der die Kuben liegen.
(In der Zeichnung c xy um 180° gedreht in der Ebene xy.)

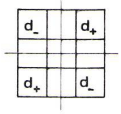
Dreht man diesen Kubus senkrecht zu dieser Ebene in der Diagonalrichtung, so kommt er nicht zur Deckung.

Die Deckung zu einem der beiden andern Kuben entsteht durch eine Drehung von 180° um die Koordinatenachse, die zwischen ihnen liegt. Dreht man den Kubus in der gemeinsamen Ebene der Kuben um 90°, so kommt er nicht zur Deckung.

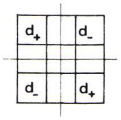


Kubus d

Entsprechend der Grund-Drehrichtung der gegenüberliegenden Flächen sind alle gegenüberliegenden Diagonalen parallel gerichtet.
Drei Diagonale haben eine negative Richtung.

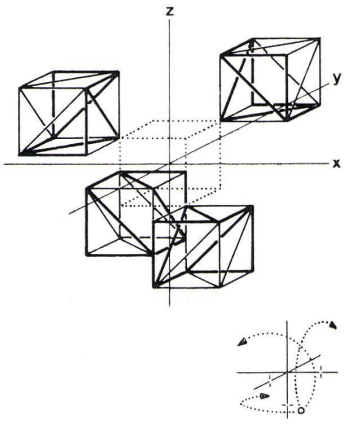


Obere Lage

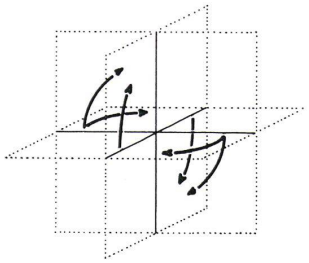


Untere Lage

Durch Drehung um 180° in einer der drei Koordinatenebenen kann ein Kubus mit drei andern so zur Drehung gebracht werden, daß alle Diagonalrichtungen gleich sind.
Es gibt zwei verschiedene Typen von Kuben, die gegenseitig nicht zur Dekkung gebracht werden können.
4 Kuben d-positiv
4 Kuben d-negativ
so genannt, weil der Kubus positive x-, y- und z-Koordinaten besitzt und sich mit dem Kubus mit den negativen x-, y- und z-Koordinaten nicht deckt.



Die Deckung entsteht durch Drehung um 180° parallel zu einen der drei Koordinatenebenen.



Die Kuben a, b, c und d können durch Drehung parallel zu einer der drei Koordinatenebenen xy, xz und yz um 180° mit einem oder mehreren Kuben derselben Gruppe zur Deckung gebracht werden.

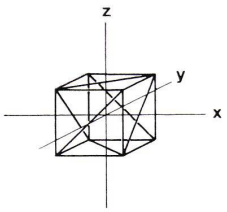
Die Gruppen unterscheiden folgende Typen:

	Zahl und Art		
Kubus a	1		
Kubus b	2 bx	2 by	2 bz
Kubus c	4 bxy	4 byz	4 bxz
Kubus d	4 d+	4 d–	

Die einzelnen Kubentypen des 2. Beispieles und ihre Deckungsformen

2. Beispiel

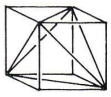
Die Diagonalen bilden ein Tetraeder.



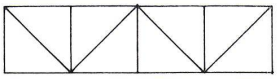
Kubus a

Die Diagonalen gegenüberliegender Flächen sind entgegengesetzt gerichtet. 4 Ecken haben je 3 Diagonalen. 4 Ecken haben keine Diagonalen.

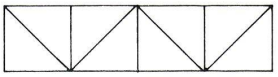
Die Diagonalen sind so angeordnet, daß sie ein Tetraeder bilden, und zwar in allen 27 Kuben. Es wäre auch möglich, nur beim innern Kubus (a) diese Bestimmung zu treffen und alle andern Diagonalrichtungen in der Richtung jedes Koordinatenastes parallel zu legen. Die gewählten Diagonalen haben also die besondere Eigenschaft, daß die im innern Kubus entstandenen Tetraederflächen sich in die äußeren Kuben fortsetzen, so daß den Kuben Tetraeder, Oktaeder und andere Polyeder eingeschrieben sind, was für spätere Untersuchungen von nicht orthogonalen dreidimensionalen Systemen von großer Bedeutung ist.



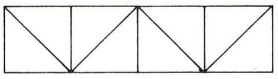
Die Tetraederstellung der Diagonalen scheint auch die symmetrischste Art zu sein, wie Diagonalen in Kuben gelegt werden können.
Wickelt man die Flächen in den drei Koordinatenebenen ab, so entstehen alles gleiche geometrische Figuren.



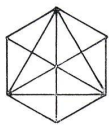
Abwicklung in der xy-Ebene



Abwicklung in der yz-Ebene

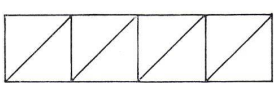


Abwicklung in der xz-Ebene

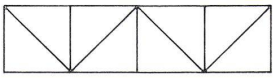


Projiziert man den Kubus auf eine Ebene senkrecht zur räumlichen Diagonale, so entstehen ebenfalls immer gleiche geometrische Figuren. Keine andere Stellung der Diagonalen hat diese Eigenschaften.

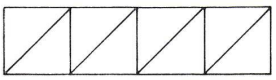
Bei der Anordnung der Diagonalen nach Beispiel 1 geben die Abwicklung und die Projektion des inneren Würfels ungleiche geometrische Figuren.



Abwicklung in der xy-ebene

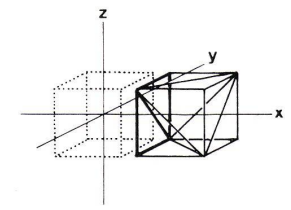


Abwicklung in der zy-Ebene



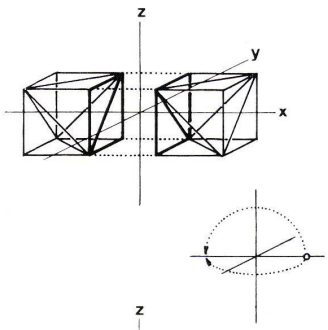
Abwicklung in der zx-Ebene

Projektion senkrecht zur Raumdiagonalen

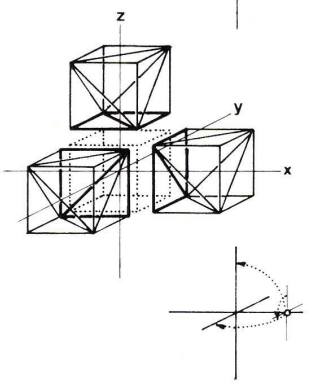


Kubus b

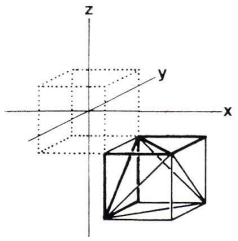
Alle Kuben b können durch unterschiedliche Drehung gegenseitig zur Deckung gebracht werden.



Der gegenüberliegende Kubus wird durch eine 180°-Drehung in einer der beiden zur Achse des Kubus angehörenden Koordinatenebene zur Deckung gebracht.

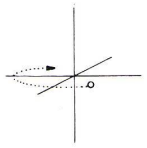


Die vier benachbarten Kuben werden mit zwei verschiedenen Drehbewegungen zur Deckung gebracht:
Eine Drehung von 90° um die vom Kubus umschlossene Achse.
Eine Drehung von 90° in der gemeinsamen Ebene mit dem zu deckenden Kubus.

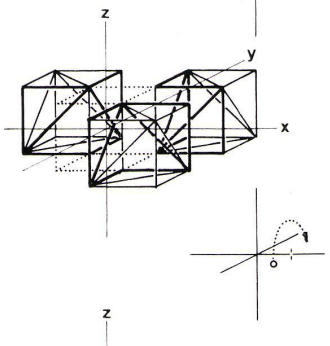


Kubus c

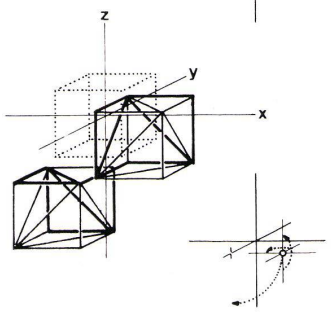
Alle Kuben c können durch unterschiedliche Drehung gegenseitig zur Deckung gebracht werden.



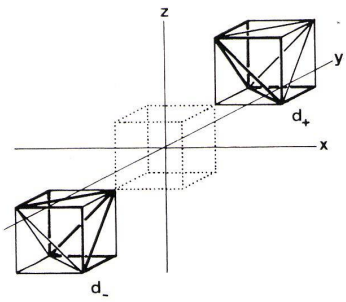
Der diagonal gegenüberliegende Kubus c wird durch Drehung um 180° in der gemeinsamen Koordinatenebene (Ebene xy im Beispiel) zur Dekkung gebracht.



Die zwei benachbarten Kuben c, die in derselben Koordinatenebene liegen (im Beispiel Ebene xy) können durch Drehung um 180° um die zwischen ihnen liegende Koordinatenachse (im Beispiel x) zur Deckung gebracht werden.

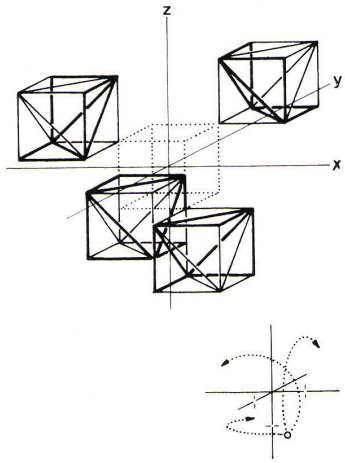


Die nicht in derselben Koordinatenebene liegenden benachbarten Kuben c können nur mit zusammengesetzten Drehungen zur Deckung gebracht werden.
Zwei Bewegungen sind Drehungen von 180° und 90° um die eigenen Achsen und eine dritte Bewegung eine Drehung von 90° um eine Achse des Systems.



Kubus d

Es gibt zwei Gruppen von Kuben d, die gegenseitig nicht zur Deckung gebracht werden können. Sie sollen aus denselben Gründen wie beim 1. Beispiel d positiv (d+) und d negativ (d–) genannt werden.



Ein Kubus d kann mit den drei andern identischen Kuben d durch Drehung um 180° parallel zu einer der drei zugehörigen Koordinatenachsen zur Deckung gebracht werden.

Hypothese

Vergleicht man die Resultate der beiden Untersuchungen, so stellt man fest, daß die 27 Kuben verschiedene Deckungsformen besitzen.
Demnach hat je nach der Lage der Diagonalen das System entsprechende Eigenschaften.

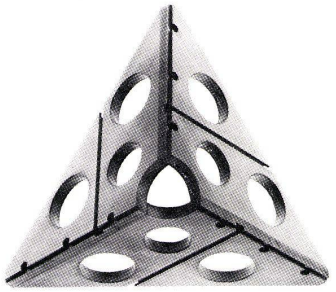
Zum Beispiel sind beim zweiten Beispiel die Kuben b und c in allen drei Koordinatenachsen gleichwertig. Beim ersten Beispiel sind sie unterschiedlich, entsprechend den xyz-Koordinaten. In dieses System könnte vielleicht der Begriff horizontal-vertikal ohne zusätzliche Veränderungen eingeführt werden.

Anmerkung

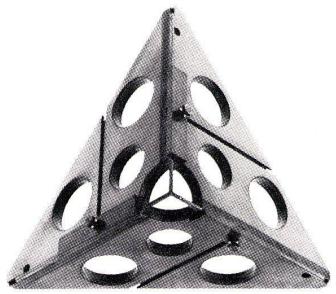
Unter einer Diagonalen ist nicht ein Konstruktionselement verstanden, sondern eine »Vorzugsbeziehung« zweier diagonal gegenüberliegenden Ecken. Diagonalen können als konstruktive Elemente auf Bausysteme übertragen werden, Diagonalen können aber auch als solche in Bausystemen nicht sichtbar sein. Sie sind Symmetrieachsen von Flächen, Bewegungsachsen oder anderes.

Arbeitsmodell

Weil es scheint, daß zusammen mit den variablen Diagonalstellungen in den 27 Würfeln bestimmte Eigenarten solcher Stellungen beobachtet werden können – und weil es scheint, daß solche geometrische Modelle bei genügend Kenntnissen sogar als Arbeitsmodelle zum Simulieren von Bausystemen dienen könnten, stellte sich die Aufgabe, solche Modelle zu bauen.
Die Erfahrung an den ersten Versuchsmodellen hat gezeigt, daß ein solches Hilfswerkzeug bestimmte Eigenschaften besitzen muß, damit zweckmäßig mit ihm gearbeitet werden kann.
Die Würfel müssen unter anderem sehr präzis sein, damit sie möglichst mühelos und in jeder Stellung aufeinandergeschichtet werden können und damit Diagonalen in jeder beliebigen Lage eingefügt werden können, ohne daß sie den Würfel verformen. Die Würfelecken müssen einfach sein, damit man sie auch im Innern des Systems gut beobachten kann.
Die zusammen mit Studenten als Seminararbeit gebauten Würfel bestehen aus Vierkantstäben von ca. 3/3 mm ($^1/_8$") und haben eine Kantenlänge von ca. 20 cm (8"). Die Stäbe sind an den Ecken mit Hartlot verbunden. Die Diagonalen werden nur eingelegt und mit Rubberzement fixiert und sind deshalb auswechselbar.
Um eine genaue dreidimensionale Ecke bauen zu können, wurde eine spezielle Lehre konstruiert. Diese Lehre hat sehr kleine Toleranzmaße und dient als allgemeines Werkzeug zum Bau von rechtwinkligen räumlichen Ecken, im selben Sinne wie Zeichenwinkel zum Zeichnen von rechten Winkeln.
Mit 45° Anschlägen ist es auch möglich, die Tetraederecke in dieser Lehre zu bauen.

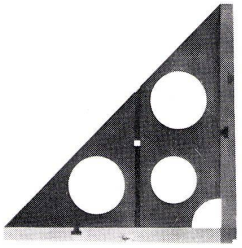


Lehre zum Bau von räumlichen Ecken

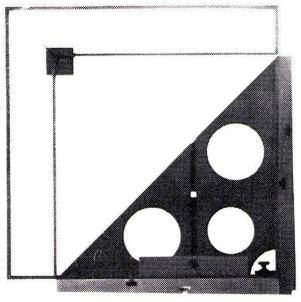


Ansicht von außen

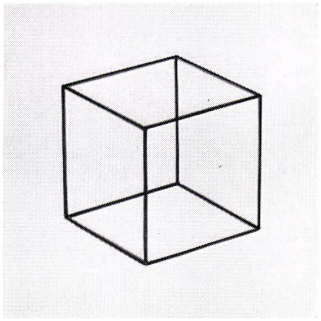
Ansicht von außen mit eingelegten Stäben und Klemmen



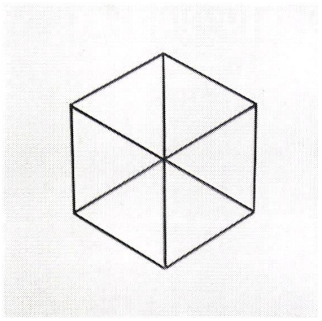
Ansicht von innen



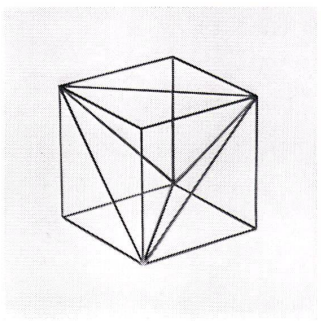
Ansicht von innen mit Würfel und Klemmen.
Würfel vor der letzten Lötung.



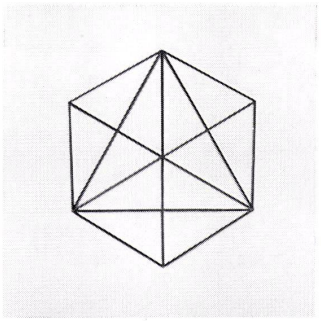
Ansicht eines Würfels.
Vierkantstäbe $^1/_8$".
Kantenlänge 8".



Projektion in der Raumdiagonalen.

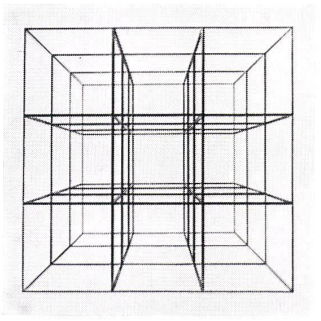


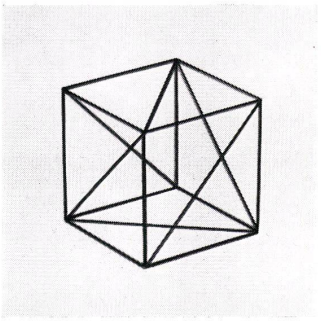
Würfel mit Diagonalen, die ein Tetraeder bilden (2. Beispiel).



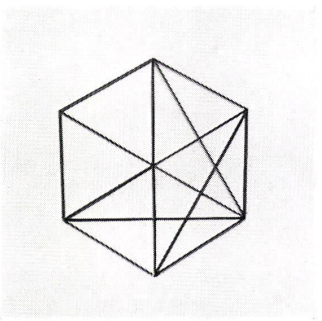
Projektion senkrecht zur Raumdiagonale.

27 Würfel.



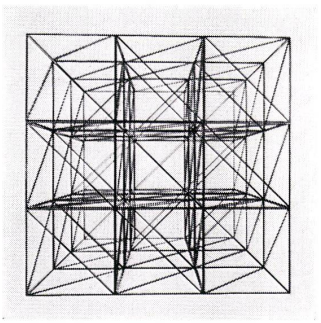


Würfel mit Diagonalen in Grund-Drehrichtung der Flächen (1. Beispiel).

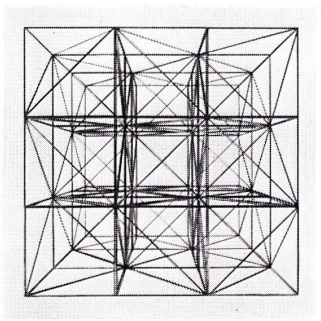


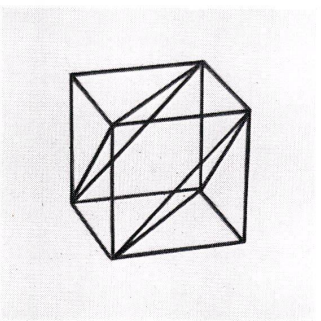
Projektion senkrecht zur Raumdiagonale.

27 Würfel mit Diagonalen in Grund-Drehrichtung der Flächen.

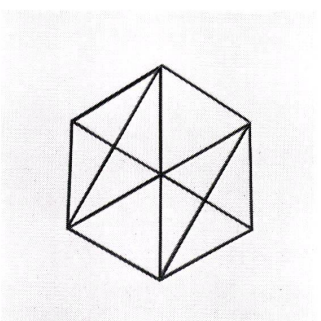


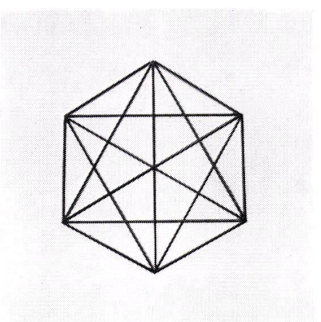
27 Würfel mit Diagonalen, die ein Tetraeder bilden.



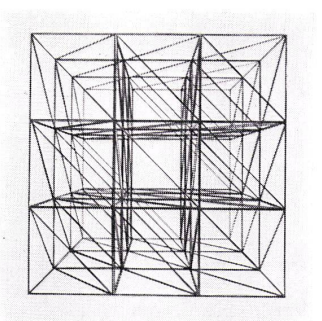


Würfel mit parallel gerichteten gegenüberliegenden Diagonalen, die zwei Dreiecke bilden.

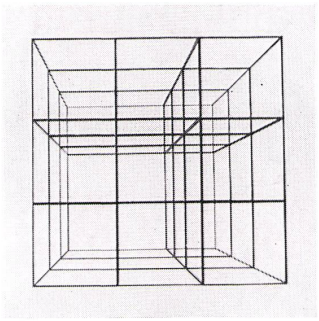


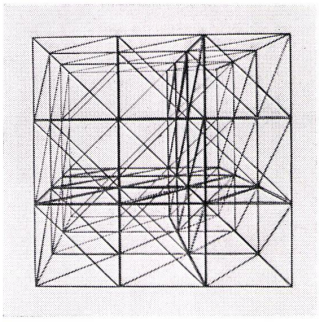


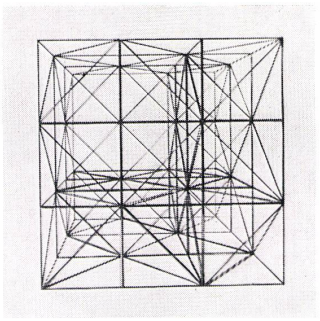
27 Würfel mit den parallel gerichteten Diagonalen.

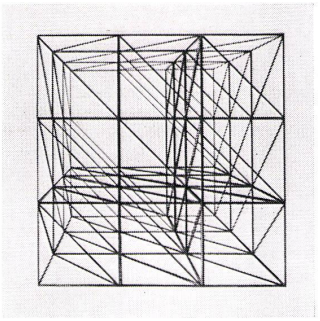


Projektion senkrecht zur Raumdiagonale.
(Es entstehen zwei verschiedene Bilder.)

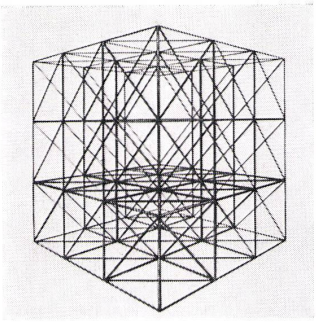




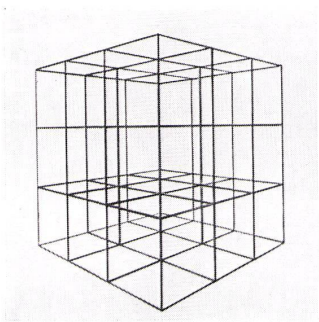


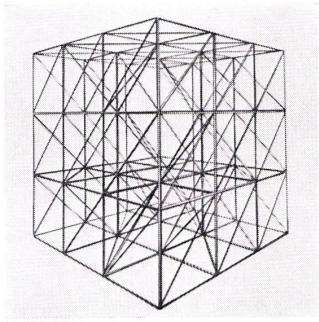


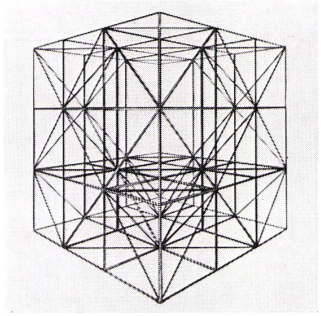
Aufnahmen der 27 Würfel von verschiedenen Augpunkten aus.

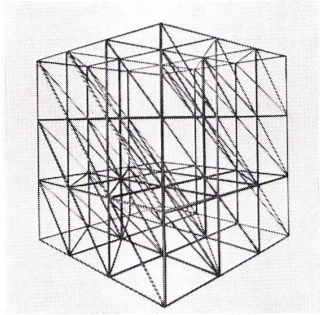


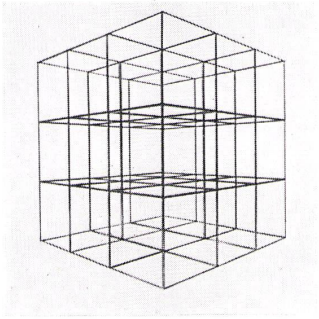
Diagonal gesehen entstehen zwei verschiedene Bilder.

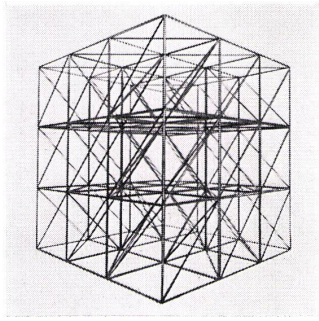




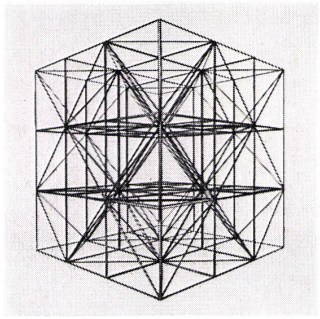




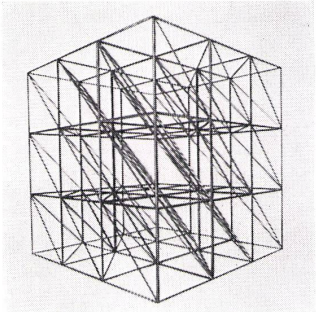




Diagonalen nach Beispiel 1.



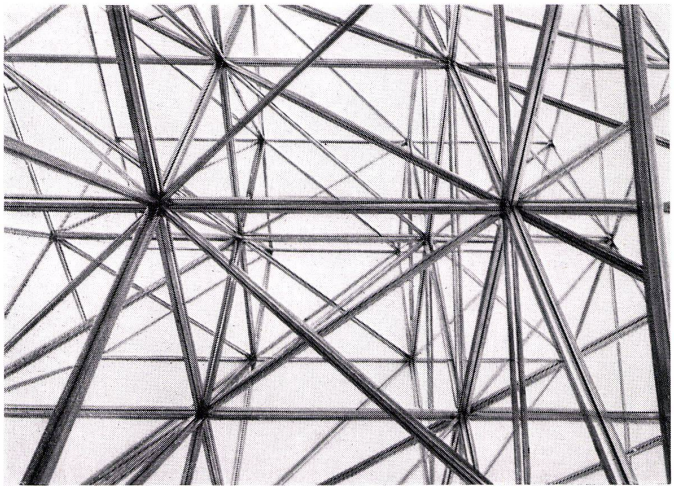
Diagonalen nach Beispiel 2.



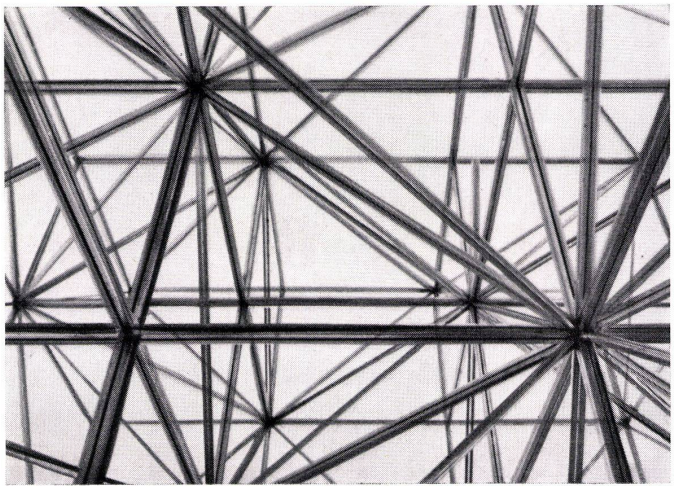
Gegenüberliegende Diagonalen parallel gerichtet.

Detailaufnahmen der Knotenpunkte.

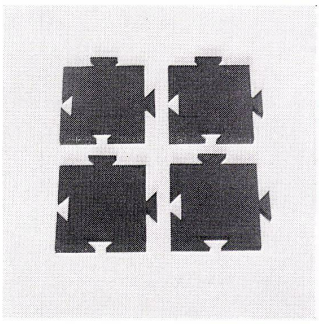
Knotenpunkte bei den 27 Würfeln mit Diagonalen nach Beispiel 1.
Alle Knotenpunkte sind gleichwertig.



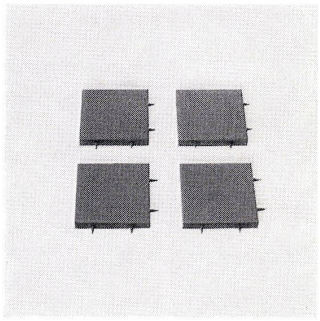
Knotenpunkte bei den 27 Würfeln mit Diagonalen nach Beispiel 2 (Tetraeder).
Es gibt Knotenpunkte mit Diagonalen und Knotenpunkte ohne Diagonalen.



In dieser Arbeit geht es um eine ganz konkrete Frage – um die Frage nach Modellen oder eine »Grammatik« als Hilfe zum Planen von Systemen. Die bis jetzt angestellten geometrischen Betrachtungen sind nutzlos, wenn es nicht gelingt, von ihnen eine Brücke zu dem Gefragten zu schlagen.
Beim Bau des Arbeitsmodelles der 27 Würfel zeigten sich geometrische und Bewegungsprobleme, die unmittelbar an die theoretischen Betrachtungen, die zu diesem Modell geführt hatten, erinnerten. Aus diesen Erfahrungen stammt der Versuch, einfache Bausysteme mit den geometrischen Systemen zu vergleichen, um in Beziehung zum gesetzten Ziel zu kommen. Dieses Vorhaben kann gefährlich sein – es kann auch sehr nützlich sein. Gefährlich, weil man sehr rasch zu Analogien bereit ist, die in Wirklichkeit keine sind und dadurch die Arbeit in eine falsche Richtung gelenkt wird. Nützlich, weil das Entdecken tatsächlicher Analogien einen bedeutenden Schritt weiterhelfen könnte.
An einer einfachen Konstruktionsaufgabe sollen die Zusammenhänge der theoretischen Untersuchungen mit den Problemen beim Planen von Systemen dargestellt werden.



Eine andere Ausbildung der Fugen gibt neue Bewegungsformen. Diese Platten können mit Bewegungen senkrecht zur Plattenfläche zusammengefügt werden.
(Auch dieser Bewegungsart sind in praktischen Beispielen bestimmte Grenzen gesetzt.)

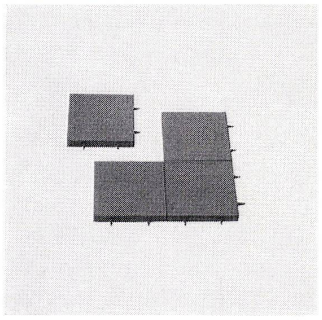


Es sei die Aufgabe, vier und mehr Platten auf eine einfache Weise stabil zu verbinden.

Ganz bestimmte Probleme über die Form der Fugen, der Verbindungsstelle der Art und Reihenfolge der Bewegungen, die die Platten zusammenbringen, sind zu lösen.

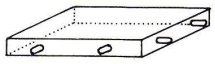
Nimmt man an, man würde die Fugen mit zwei Bolzen verbinden, dann könnten die Platten nicht in jeder beliebigen Reihenfolge zusammengebaut werden. Der Verbindungsart sind aus diesem Grunde bestimmte Grenzen gesetzt.

Die geometrische Struktur eines Bauteils steht im Zusammenhang mit der Art und der Reihenfolge der Bewegungen, mit deren Hilfe die Bauteile in ihre vorbestimmte Lage gebracht werden. Alle diese Zusammenhänge unterliegen bestimmten Gesetzen.

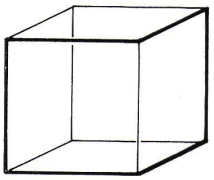


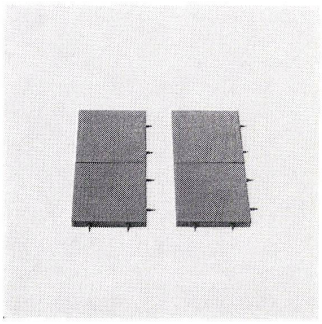
Auf diese Art lassen sich die Platten nicht zusammenfügen.

Versuch zur Analyse



Der Bauteil des Systems – die Platte – hat die geometrische Struktur des Kubus c, dem Kubus, mit dem flächige Systeme gebaut sind – laut Hypothese.

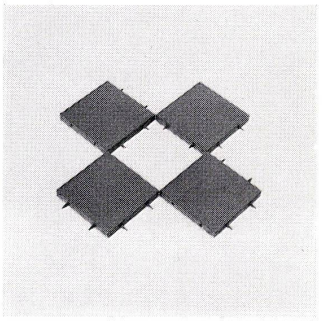


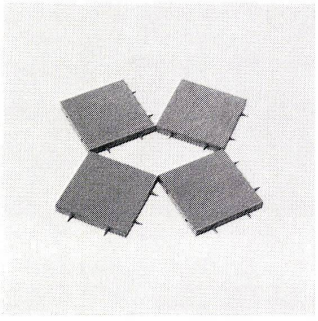


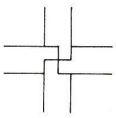
Diese Reihenfolge gestattet das Zusammenfügen.
(Bei sehr großen Elementzahlen werden jedoch kaum überbrückbare Probleme auftreten.)

Schwieriger ist der Versuch, die unterschiedlichen Verbindungselemente im Modell darzustellen, besonders weil sie in ihrer Geometrie mit bestimmten Bewegungsrichtungen und bestimmten Kräfteflüssen verknüpft sind.
Vielleicht, daß solche Eigenschaften mit diagonalen oder anderen zusätzlichen Elementen im Kubus simuliert werden können. Zum Beispiel ist bei den zwei Lösungen nicht dieselbe Koordinatenachse Bewegungsrichtung. Nun gibt es Diagonalstellungen, die eine Koordinatenachse gegenüber den andern auszeichnet (siehe 1. Beispiel, Seite 429), so daß eventuell die Bewegungseigenschaft der Verbindungsart mit entsprechender Anordnung der Diagonalen ausgedrückt werden kann. Aber es kann auch möglich sein, daß andere Elemente für dieses Problem gefunden werden müssen.

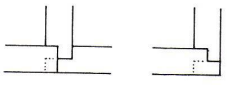
Mit einer weitern Konstruktionsaufgabe sei versucht, mehr Zusammenhänge zu finden.







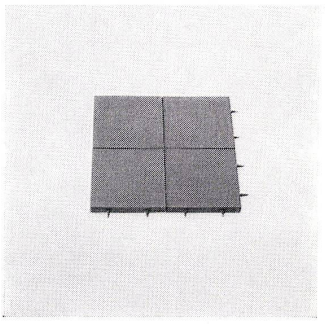
Kreuzungspunkt im Innern



Abschluß nach außen

Es sei ein Bausystem konstruiert aus Platten, die Räume umschließen, deren Zahl beliebig erweitert werden kann. Nach außen soll das System mit Spezialplatten so abgeschlossen sein, daß in den Flächen keine Nuten vorhanden sind.

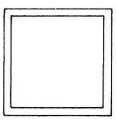
Angenommene Fugenausbildung



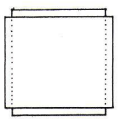
Durch Drehung lassen sich Platten in einer Bewegung zusammenführen, sofern sie an den Ecken gelenkig verbunden sind.
(Auch dieser Methode sind bestimmte Grenzen gesetzt.)

Welche Formen haben die allgemeine und die innere Bauplatte des Systems?

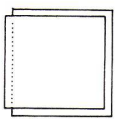
Nach der Theorie von den Kubentypen würde diese Platte das geometrische Bild des Kubus d haben, oder das Bild des Kubus d muß irgendwie sichtbar sein.
Von den vier möglichen Plattenformen würde die Platte 4 am ehesten diesem Bild entsprechen.



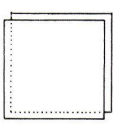
Platte 1



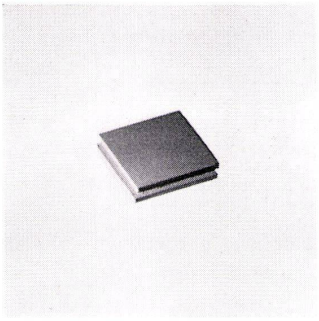
Platte 2



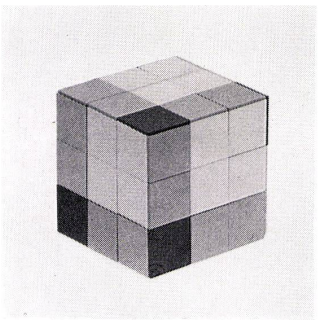
Platte 3

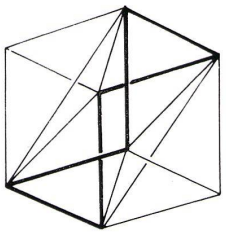


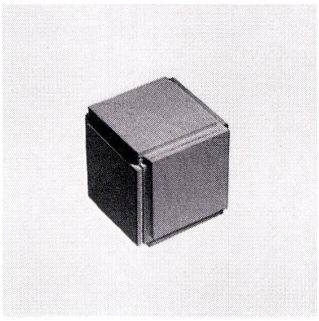
Platte 4

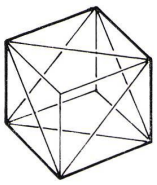


Tatsächlich läßt sich aus dieser Platte ein zellenförmiges System bauen.



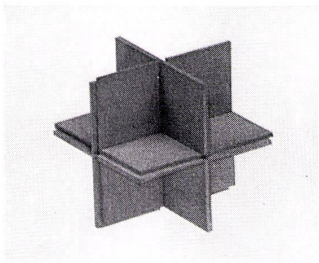




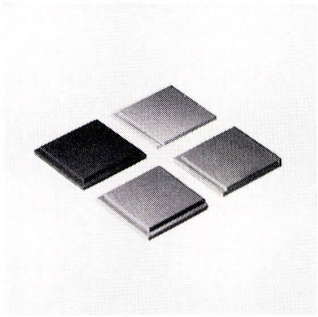


Auch die äußere Begrenzung des Systems zeigt dasselbe Strukturbild wie der innere Einzelkubus.

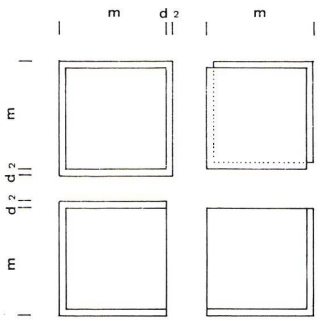
Die vier Einzelplatten, mit denen das außen begrenzte System gebaut werden kann.
Eine Analogie mit den Kuben a, b, c und d drängt sich auf. Solche Zusammenhänge müssen jedoch eingehender untersucht werden, bevor Regeln aufgestellt werden.



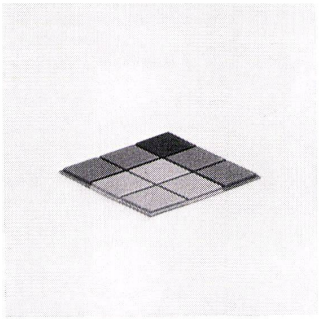
Auch eine aus Platten zusammengebaute Zelle zeigt die Struktur eines Kubus d. Legt man dazu die Symmetrieachse als Diagonale in die Flächen, so ist die Struktur dieses Kubus analog dem Kubus d im Beispiel der unterschiedlichen Diagonalstellungen (Seite 432, Spalten 3 und 4 unten). Der Kubus könnte aber auch Kubus d des im Text Seite 430, Spalten 1 und 2), erwähnten Systems sein (Kubus-a-Diagonalen als Tetraeder, äußere Kuben-Diagonalen parallel dazu). Mit Kuben d können mehrzellige Systeme gebaut werden (Seite 428, Spalten 1 und 2).

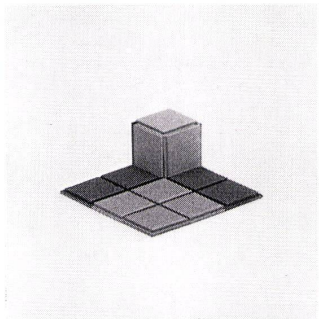


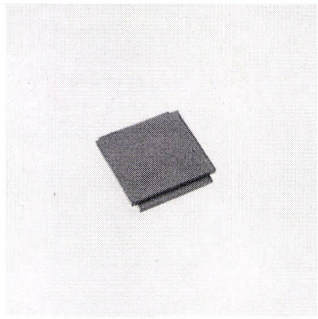
Platte 1:1.
Platte 1.2.
Platte 4.
Platte 1.3.



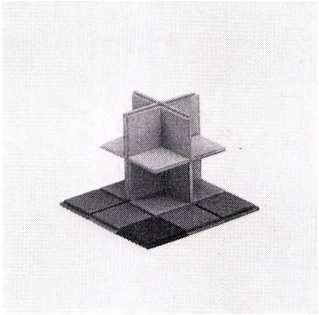
Das System aus 27 Kuben mit Spezialplatten für die äußere Begrenzung in verschiedenen Bauphasen.

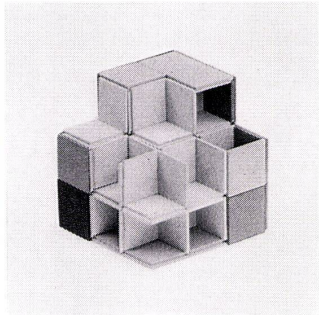


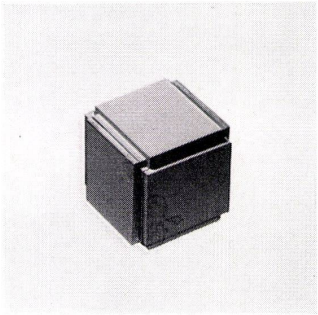


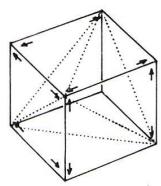


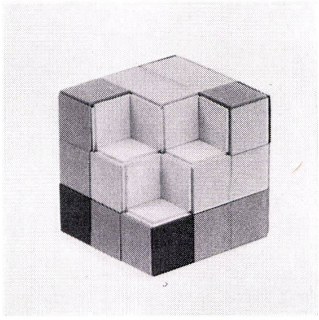
Überraschend stellt sich heraus, daß mit dem Plattentyp 2 ebenfalls mehrzellige Systeme gebaut werden können. Zwar hat dieses System andere Eigenschaften – z. B. sind die Plattenrichtungen schachbrettförmig um 90° verschieden, oder beim Zusammenschluß der Platten zur Raumecke entsteht ein kubischer Hohlraum mit der Plattendicke als Kantenlänge.

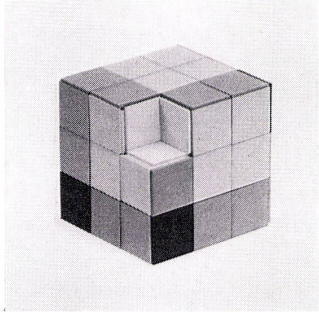


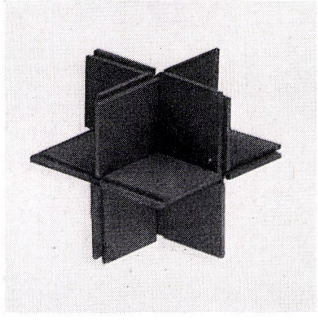










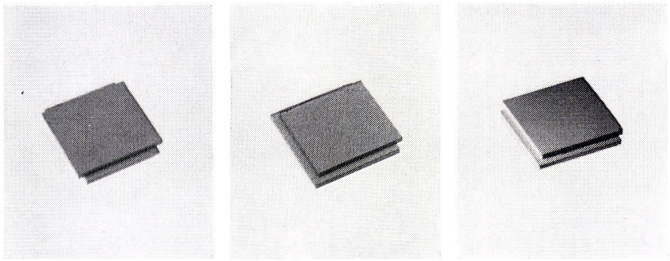


Sehr unklar ist die Zuordnung des Systems. Einziger auswertbarer Hinweis könnte die Tatsache sein, daß vier Ecken rechtsdrehend und vier Ecken linksdrehend sind.
Verbindet man die gleichartigen Ecken, so entstehen Flächendiagonalen, die ein Tetraeder bilden. Die Verwandtschaft müßte demnach beim Beispiel 2, Seite 430, gesucht werden.

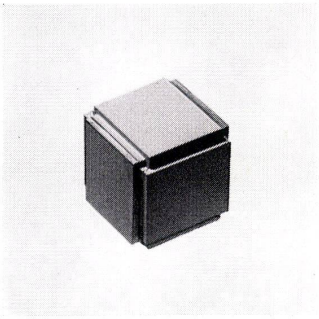
Wenn der Kubus d, gebaut aus der Platte 4, der Kubus d des Systems ist, in dem beim Kubus a die Diagonalen in Tetraederstellung sind und die Diagonalen der äußern Kuben parallel dazu liegen – also das hier nicht dargestellte System ausgehend vom Tetraeder (siehe Seite 430, Spalten 1 und 2) –, dann müssen die noch unbekannten Kuben a, b, und c mit Hilfe des Arbeitsmodelles konstruiert werden können. Tatsächlich ist dies ohne Mühe möglich. Wenn man das Problem des äußern Abschlusses nicht betrachtet – es ist im Moment auch von sekundärer Natur –, so kann das unbegrenzte Zellensystem mit drei Plattentypen gebaut werden.

Die drei Plattentypen

Platte 2 Platte 3 Platte 4



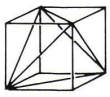
Die einzeln aus dem System herausgelösten Kuben



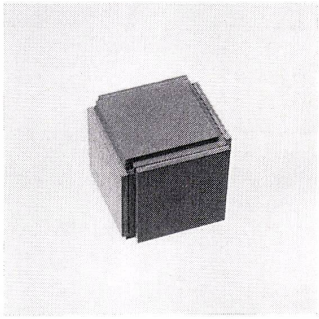
Kubus a

Aus sechs Platten 2.
Alle acht Ecken sind »offen«.

Entspricht dem Kubus Seite 435, Spalten 3 und 4 unten, – die Vermutung hat sich demnach bestätigt.

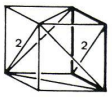


Analoger Kubus a

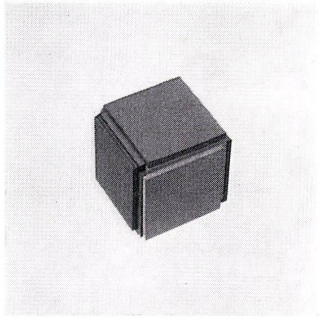


Kubus b

Aus zwei Platten 2, senkrecht zur Koordinatenachse liegend, und vier Platten 3. Vier in einer Fläche liegende Ecken sind »offen«, die andern »geschlossen«.

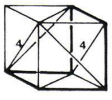


Analoger Kubus b

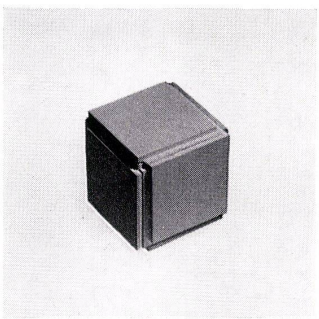


Kubus c

Aus vier Platten 3 und zwei Platten 4 parallel zur Koordinatenebene liegend. Zwei Ecken mit einer gemeinsamen Kante sind »offen«, die andern »geschlossen«.

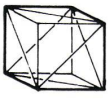


Analoger Kubus c



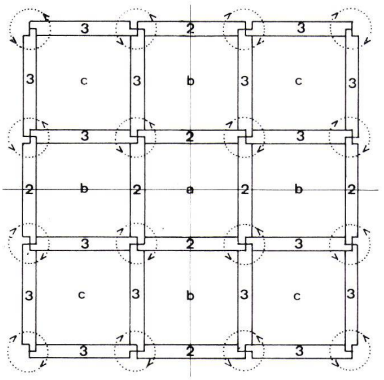
Kubus d (wie Seite 435, Spalten 1 und 2).

Aus sechs Platten 4. Zwei an einer Raumdiagonale liegende Ecken sind »offen«, die andern »geschlossen«.



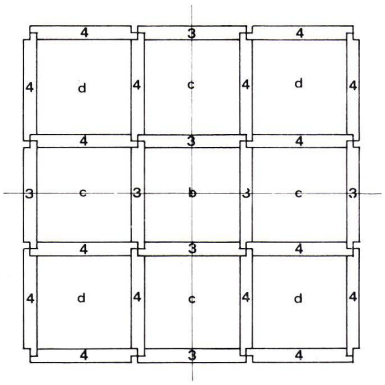
Analoger Kubus d

Die geometrische Struktur des Systems

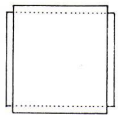


Mittlere Lage

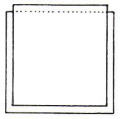
Obere und untere Lage



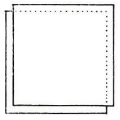
Die zu diesem System nötigen Plattentypen



Platte 4



Platte 3



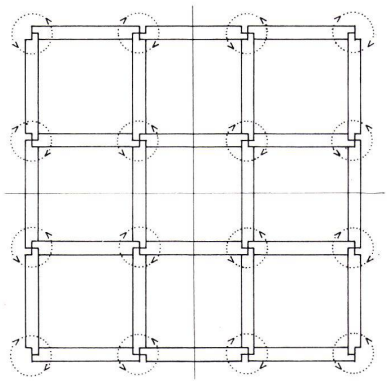
Platte 2

Drehrichtung des Knotenpunktes

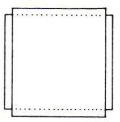
Es bleibt immer noch die Frage, warum aus dem Kubus a dieses Systems auch mehrzellige Systeme gebaut werden können. Dies widerspricht der aufgestellten Hypothese Seite 428, Spalten 1 und 2, daß aus Kuben a nur einzellige Systeme gebaut werden können. Ordnet man die Drehrichtungen der Knotenpunkte so an, daß sie schachbrettartig einmal links- und einmal rechtsdrehend sind, so entsteht das mehrzellige System, das mit der Platte 2 gebaut werden kann (auch wieder ohne den äußern Abschluß). Die Geometrie dieses Systems entspricht der Anordnung der Diagonalen im Arbeitsmodell Seiten 430, 432, Spalten 3 und 4 oben, und Seite 433, Spalte 3: Tetraeder-Diagonalstellung in allen Kuben.

Diesem System gegenüber steht das mehrzellige System aus dem Kubus d, bei dem sich alle Knotenpunkte in derselben Richtung drehen – entweder links oder rechts. (Der Kubus d kann tatsächlich mit der Platte 4 auf zwei Arten zusammengebaut werden.)

Die geometrische Struktur des Systems mit abwechselnd rechts- und linksdre-
Aufnahmen der 27 Würfel von verschiedenen Augpunkten aus.

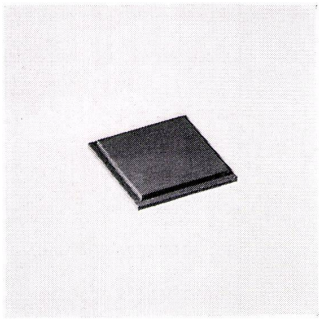


Der zu diesem System nötige Plattentyp

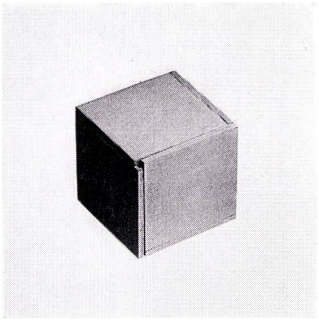


Platte 2

Drehrichtung des Knotenpunktes



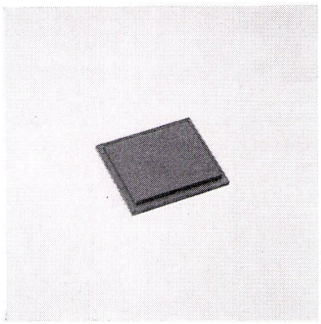
Quadratische Platte.
Platte 1.1 der äußeren Begrenzung des Systems mit Kubus d.



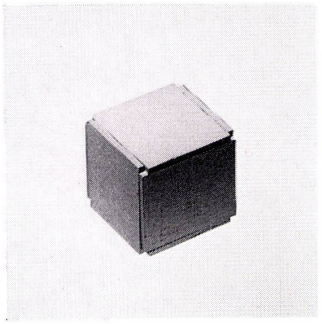
Begrenzter Kubus d
mit denselben zwei »offenen« Ecken wie beim anbaubaren Kubus d.

Das Problem von unausdehnbaren einzelligen Systemen scheint sich etwas anders zu stellen als in der Hypothese Seite 428, Spalten 1 und 2, vermutet wird, oder vielleicht fehlt bis jetzt noch die richtige Betrachtungsweise.

Rechteckige Platte.

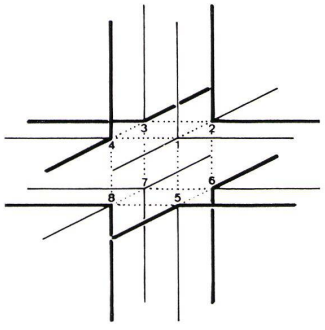


Begrenzter Kubus a.
mit denselben acht »offenen« Ecken wie beim anbaubaren Kubus des letzten Beispiels.

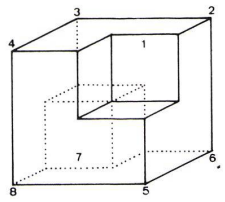


Versuch zu einem weitern Arbeitsmodell

Trotzdem es wahrscheinlich ist, daß die entworfenen Systeme alle mit den unterschiedlichen Diagonalstellungen in den 27 Würfeln simuliert werden können, tauchte während der Arbeit die Idee auf, daß der Knotenpunkt selbst in Form eines Strukturmodells des am meisten ausgezeichneten Punktes im orthogonalen räumlichen System dargestellt werden könnte. Oft schien es, daß mit den Diagonalen gewisse Tatsachen nur auf Umwegen dargestellt werden können. Der Versuch stammt aber auch von der Vorstellung, daß es möglich sein sollte, die Eigenschaften von Systemen mit den Eigenschaften ihrer ausgezeichneten Punkte darzustellen (siehe Seite 425, Spalten 3 und 4 oben).

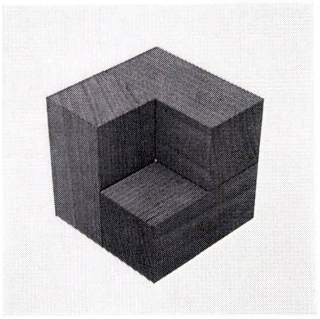


Der Schnittpunkt von drei Ebenen – also der Ort, wo die Ecken von acht Kuben zusammentreffen – ist der ausgezeichnetste Punkt im dreidimensionalen orthogonalen System.
Alle diese Punkte, die nicht am Rand des Systems liegen, haben dieselbe Struktur. Zwei der Raumecken haben Kanten, deren angrenzende Flächen gegenläufige Grund-Drehrichtung haben (Ecken 1 und 7).
Die sechs übrigen Raumecken haben eine Kante, deren angrenzende Flächen gegenläufige Grund-Drehrichtung haben und die andern zwei Kanten haben parallellaufende Flächen (Ecken 2, 3, 4, 5, 6 und 8).
Die Raumdiagonale von der Ecke 1 zur Ecke 7 hat eine ausgezeichnete Stellung. Ihre Richtung steht im Zusammenhang mit der Lage des Nullpunktes des Systems. Entweder geht sie in der Verlängerung durch den Nullpunkt und ist Raumdiagonale eines Quadranten, oder sie ist parallel zur Raumdiagonale des Quadranten, in dem der beobachtete Schnittpunkt liegt.



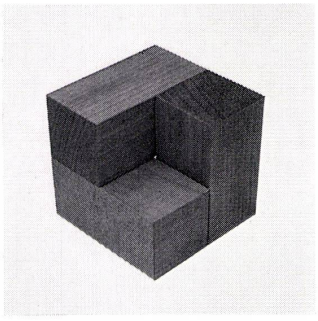
Das Strukturmodell, das die geometrische Struktur des Schnittpunktes dreier Ebenen darstellt.

Die zwei gegenüberliegenden ausgeschnittenen Achtelkuben stellen die Ecken 1 und 7 dar, also die Raumecken mit Kanten, deren anliegende Flächen gegenläufige Grund-Drehrichtung haben. Die vollen Ecken stellen die Ecken 2, 3, 4, 5, 6 und 8 dar.



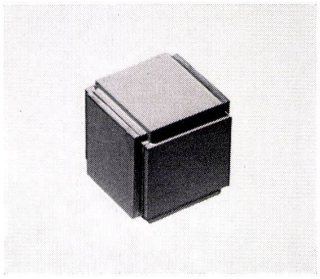
Die Anordnung der zweiachtelkubusgroßen Holzprismas stellt die Drehrichtung des Knotenpunktes dar.

Rechtsdrehender oder positiver Knotenpunkt.



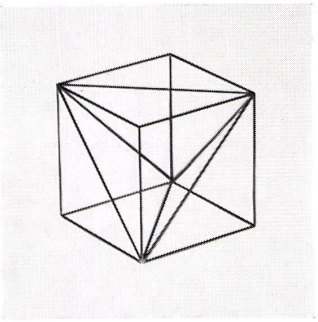
Linksdrehender oder negativer Knotenpunkt.

Mit den Holzwürfeln simulierte Systeme

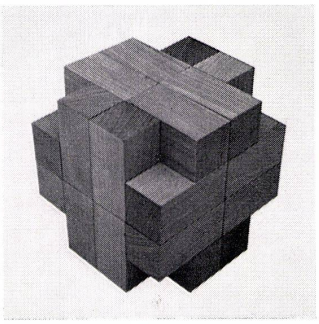


System mit der Tetraeder-Diagonalstellung im Zentrum Seite 436, Spalten 1 und 2).

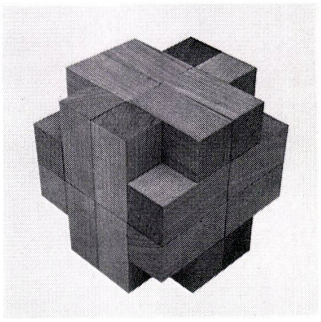
Kubus a
des konstruierten Systems.

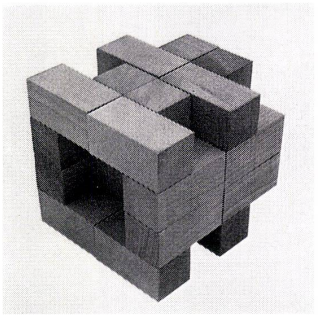


Kubus a
mit dem Würfel aus Stahlstäben.
Die Diagonalen markieren die unterschiedliche Drehrichtung der Ecken.

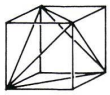


Kubus a
mit 8 Holzwürfeln (8 Ecken) simuliert:
4 Ecken linksdrehend,
4 Ecken rechtsdrehend.

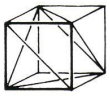




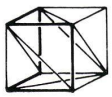
Kubus a



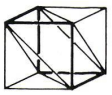
Kubus b



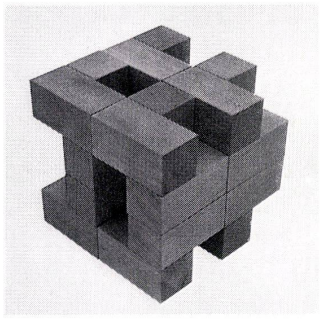
System mit parallelen Diagonalen zum Kubus a mit Tetraeder-Diagonalen

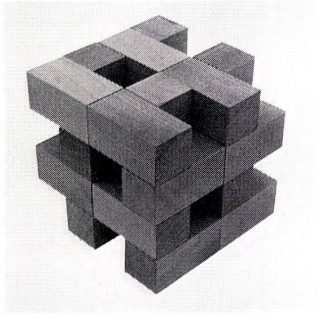


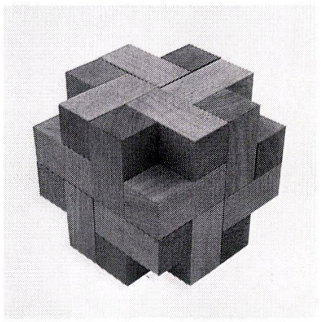
Kubus c

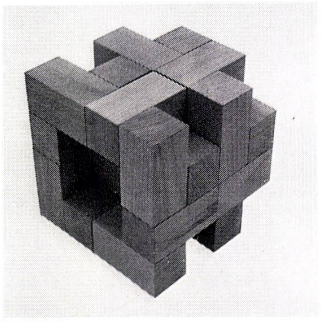


Kubus d

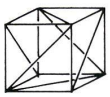




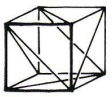




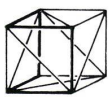
Kubus a



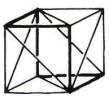
Kubus b



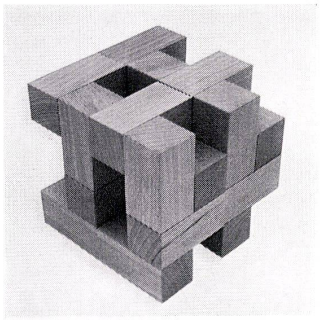
System nach Beispiel 1. Diagonalen in Grund-Drehrichtung der Flächen

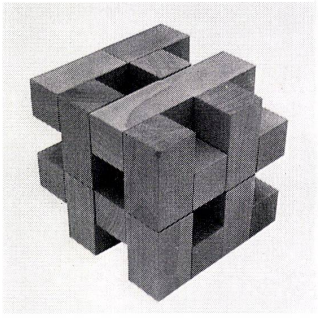


Kubus c



Kubus d





Alle diese Vergleiche sind als Hypothese zu verstehen. Analogien gegenüber muß man vorsichtig sein. Aus Analogien Regeln abzuleiten ist ohne umfassendere Untersuchungen nicht möglich. Zwischen den beiden Arbeitsmodellen bestehen sichtbare und versteckte Differenzen, die vieles noch in Frage stellen.

Zwischen den beiden Arbeitsgeräten besteht zum Beispiel ein grundsätzlicher Unterschied, der vielleicht jedem seine spezifischen Eigenschaften gibt, der aber Gegenüberstellungen sehr fragwürdig macht.

Der Würfel aus den Stahlstäben stellt eine Zelle des Systems dar und seine Ecken sind ein Achtel eines Knotenpunktes.

Der Holzwürfel stellt einen ganzen Knotenpunkt oder ausgezeichneten Punkt dar.

Die Würfel aus den Stahlstäben haben vermutlich einen wesentlich höheren Verwendungsbereich – weil unter anderem die inneren Knotenpunkte oder die inneren ausgezeichneten Punkte eines mit ihnen simulierten Systems gut beobachtet werden können. Dieses Arbeitsgerät verlangt zwar ein hohes Abstraktionsvermögen beim Simulieren von Systemeigenschaften. Aber bereits das Analysieren von Systemen verlangt diese Fähigkeiten, so daß Arbeit am Modell keine zusätzlichen Erschwernisse bringen dürfte. Um an den Geräten arbeiten zu können, wird in jedem Fall ein Training nötig sein.

Das Holzmodell ist vorläufig interessant, weil es vielleicht den Weg zum Strukturmodell des ausgezeichneten Punktes öffnen hilft.

Schlußbetrachtungen zum 1. Arbeitsbericht

Jedes System hat charakteristische Eigenschaften in bezug auf seine Geometrie, die Montagebewegungen und den Kräftefluß. Es muß möglich sein, Systeme nach diesen Merkmalen zu ordnen und vielleicht lassen sich diese nach Stämmen, Familien und Gliedern klassifizieren. Auf Grund dieser Gruppierung könnte es möglich sein, Systeme zu bestimmen, wie in der Botanik Pflanzen auf Grund einer Klassifikation bestimmt werden. Kennt man einmal die Eigenschaften der Stämme, Familien und Glieder, sollte es möglich sein, sich diese Kenntnisse beim Bau von Arbeitsmodellen und in der Folge auch beim Konstruieren von Bausystemen nutzbar zu machen.

Es ist verfrüht, Resultate nach dieser ersten Arbeitsetappe zusammenzufassen. Das Hauptergebnis der Untersuchungen ist, daß wahrscheinlich Arbeitsmodelle zum Planen von Systemen erfunden werden können.

Noch viele Fragen sind offen, und viele Resultate bedürfen einer Kontrolle, bevor sie akzeptiert werden dürfen.
Die meisten Analogien und Erkenntnisse sind erst hypothetisch und müssen durch weitere Versuche überprüft werden.

Nichts ist gesagt von den Raumdiagonalen, von der Auflösung der Kuben in Tetraeder, Oktaeder und andere Polyeder.
Nichts oder nur wenig ist gesagt von Bewegungen in den Systemen und von den Zusammenhängen von Bewegungen, geometrischer Struktur und dem Kräftefluß.

Was hier vorliegt, ist erst die Arbeit von einzelnen. Sie kann deshalb nur ein Versuch sein, wenig Bekanntes, Unbekanntes oder Unbewußtes kennenzulernen und sie kann dazu dienen, Ziele besser zu formulieren und zu begründen.