

**Zeitschrift:** Bauen + Wohnen = Construction + habitation = Building + home : internationale Zeitschrift

**Herausgeber:** Bauen + Wohnen

**Band:** 13 (1959)

**Heft:** 7: Kunststoff, Holz = Matière synthétique, bois = Synthetic material, wood

**Artikel:** Der Philips-Pavillon an der Brüsseler Weltausstellung. Teil II, Die Hypparschale und ihre mechanischen Eigenschaften

**Autor:** Vreedenburgh, C.G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-330075>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

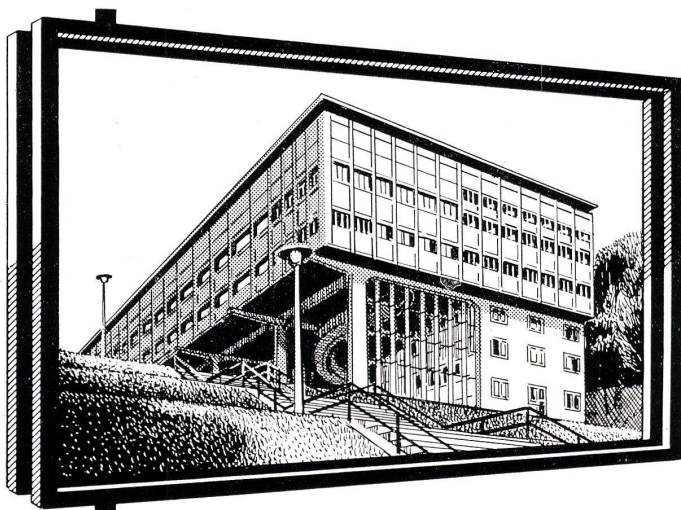
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



**Brown-Boveri** entschied sich für  
isolierende Doppelverglasung

## THERMOPANE

auf Grund folgender Hauptvorteile: Wirksame Wärmeabschirmung im Sommer, ideale Wärme-Haltung im Winter. Starke Schall-Isolation. Kein Anlaufen der Scheiben. Viel weniger Reinigungskosten.

Hunderttausende von Fenstern in allen Ländern, montiert.

GLAVER Belgien liefert ausserdem sämtliche Sorten von Spezialglas und Gussglas. Alle Auskünfte durch Ihren Grossisten oder die Generalvertretung

**JAC. HUBER & BÜHLER**  
Biel 3, Mattenstr. 137, Telefon 032.38833

### Referenzliste

<b>Aarau</b>	Schweizerische Rentenanstalt
<b>Altendorf</b>	Dätwyler AG., Schweizerische Draht-, Kabel- und Gummiwerke
<b>Arbon</b>	AG. Adolf Saurer
<b>Baden</b>	Brown, Boveri & Co. AG.
<b>Basel</b>	(Gemeinschaftshaus Martinsberg)
	Sandoz S.A., Chemische Fabrik (div. Neubauten)
	Ciba AG., Chemische Fabrik (div. Neubauten)
	Bürohochhaus der J.R.Geigy AG. und diverse Neubauten
	Laborgebäude
	der F. Hoffmann-La Roche & Cie. AG.
<b>Bern</b>	Neubau Tobler AG.
	Neubau Dr. Wander AG.
	F. J. Burrus & Co.
	Schuhfabrik HUG
<b>Boncourt</b>	Schweizerische Bankgesellschaft
<b>Dulliken</b>	C.F. Bally AG., Schuhfabrik
<b>Frauenfeld</b>	Tavaro S.A., 1-5 Avenue Châtelaine
<b>Gelterkinden</b>	Centre Européen de Recherches Nucléaires «CERN»
<b>Genève</b>	B.I.T., Bureau International du Travail
	Parktheater
<b>Grenchen</b>	Flughafen, Anbau an Hangar I
<b>Kloten</b>	Assurance «La Suisse»
<b>Lausanne</b>	Hôpital de Cery
	Aluminium AG.
<b>Menziken AG</b>	Suchard S.A., bâtiment «Sugus»
<b>Neuchâtel</b>	Kantonsspital
<b>Oltten</b>	IWC, Uhrenfabrik
<b>Schaffhausen</b>	Gebr. Sulzer AG.
<b>Winterthur</b>	Atomreaktor AG.
<b>Würenlingen</b>	Kinderspital
<b>Zürich</b>	Aluminium-Industrie AG., Chippis (AIAG)
	Neubau Waltisbühl, Bahnhofstrasse

mehr, die nicht einen Teil der Wandflächen bilden. Um die dritte Spitze, die sehr stark geneigt ist, besser zu unterstützen, wurde noch das Hyppar C an seiner Basis statt konkav konvex gestaltet, und schließlich wurden die beiden dreieckigen Öffnungen zum Teil durch neue Hypparflächen geschlossen, die sich an die bereits vorhandenen anschließen. In dieser Weise entstand die in den Konstruktionszeichnungen (Abb. 18 und 19) wiedergegebene endgültige Form des Pavillons. In dieser Form wurde der Pavillon vom Bauunternehmen «Strabed» errichtet.

Das in Abbildung 20 wiedergegebene Bild des Inneren wurde aufgenommen, bevor die Spanndrähte des Betons durch die Auskleidung der Wände dem Anblick entzogen waren. Dieses Bild gibt eine gute Vorstellung von der eigenartigen Raumwirkung des Gebäudes.

## II. Die Hypparschale und ihre mechanischen Eigenschaften

C. G. Vreedenburgh

Etwa im Jahre 1935 wurden von Laffaille und Aimond die ersten Untersuchungen veröffentlicht über die Kraftverteilung in Hypparschalen – das sind gebogene, als hyperbolische Paraboloid geformte Wände, deren Dicke bezogen auf die Flächenabmessungen sehr gering ist.<sup>1)</sup> 2)

Bis vor etwa einem Jahrzehnt zeigte man in der praktischen Bautechnik für diese neue Art von Schalen im Gegensatz zu kugelförmigen und zylindrischen Schalen wenig Interesse. Anscheinend konnte man sich an die Sattelform (entgegen gesetzte Krümmungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen) schwer gewöhnen, da diese Form mit der konventionellen Architektur unvereinbar erschien. Auch glaubte man, daß die praktische Ausführung sich teuer stellen würde als die der gebräuchlichen Schalen.

Inzwischen hat sich in dieser Beziehung manches geändert. Unter anderem durch die bahnbrechenden Arbeiten von Candela in den USA<sup>3</sup> und Hruban in der Tschechoslowakei<sup>4</sup> erkannte man immer deutlicher, daß die Hypparschalen nicht nur eine hohe Festigkeit und Stabilität besitzen, sondern sich daneben hervorragend zur Komposition reizvoller architektonischer Formen eignen, die mit verschiedenen Tendenzen der modernen Kunst wunderbar im Einklang stehen. In dieser Beziehung hat der im vorigen Artikel beschriebene Entwurf von Le Corbusier und Xenakis für den Philips Pavillon in Brüssel, der ganz aus hyperbolischen Paraboloiden aufgebaut ist, eindeutig bewiesen, daß sich in den Hypparschalen die architektonische Phantasie in großartiger Weise entfalten kann. Außerdem ist man im Hinblick auf die praktische Ausführung im Laufe der letzten Jahrzehnte zu der Erkenntnis gelangt, daß das hyperbolische Paraboloid sich sowohl in Holz wie in bewehrtem und in vorgespanntem Beton gerade besonders gut verwirklichen läßt, dank den beiden Geraden-scharen (Erzeugenden), die auf dieser Fläche angegeben werden können.<sup>5</sup>

<sup>1</sup> B. Laffaille, Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauches, Mém. Assoc. Int. Ponts et Charpentiers 3, 295-332, 1935.

<sup>2</sup> F. Aimond, Etude statique des voiles minces en paraboloides hyperboliques, Mém. Assoc. Int. Ponts et Charpentiers 4, 1-112, 1936.

<sup>3</sup> F. Handela, Structural applications of hyperbolic paraboloidal shells, J. Amer. Concrete Inst., Title Nr. 51-20, Januar 1955, 397-415.

<sup>4</sup> K. Hruban, Obecné reseni zlabovych skorepin (Die allgemeine Theorie sattelförmiger Schalen), Technische Hochschule Brno, 1953.

<sup>5</sup> Ein neueres Beispiel für eine große, aus geformtem Holz bestehende Hypparschale ist die Dachkonstruktion des Informationszentrums auf dem Place de Brouckère in Brüssel.

Die Hypparschale hat somit ihren Platz in der Baukunst gefunden und wird bereits an vielen Stellen und für verschiedene Zwecke angewendet. Die Tatsache, daß diese Bauform verhältnismäßig neu ist, sowie die größere geometrische Kompliziertheit der Sattelflächen hat allerdings zur Folge, daß der Bauachtmann sich bei der praktischen Ausführung oftmals nicht ausschließlich auf bereits gesammelte Erfahrungen und auf sein Fingerspitzengefühl verlassen kann, sondern sich auf eine wissenschaftliche Untersuchung des zu erwartenden mechanischen Verhaltens des Bauwerkes stützen möchte. So ersuchte uns die Firma «Strabed» Ende Januar 1957 um Beratung bezüglich der Errichtung des Philips Pavillons.

Die Spannungszustände, die in einer derart komplizierten Kombination von Schalen und Rippen (angebracht in den Durchdringungen der Schalen) auftreten können, sind einer exakten Berechnung ganz und gar unzugänglich. Wir konnten daher der «Strabed» auf Grund theoretischer Erkenntnisse nur ganz im allgemeinen die Auskunft geben, daß der Entwurf uns realisierbar und die geplante Bauweise ausführbar erschien; für die zuverlässige Beantwortung einer Anzahl Fragen war jedoch – unter anderem auch wegen der kurzen verfügbaren Zeit – eine Modelluntersuchung das ausgewiesene Hilfsmittel. Diese Modelluntersuchung, ausgeführt in Rijswijk und in Delft von A. L. Bouma und F. K. Ligtenberg, wird im dritten Artikel dieser Serie beschrieben. Dennoch mag es für den interessierten Leser vielleicht erwünscht sein, auch zu zeigen, wie weit man mit einer Berechnung der allgemeinen Spannungszustände in Hypparschalen kommen kann und welcher Art die Schwierigkeiten sind, die in komplizierten Fällen zur Durchführung einer ergänzenden Modelluntersuchung zwingen.

### Die Geometrie der Hypparschale

Zum Verständnis der auftretenden Kräfteverteilung in einer Hypparschale ist es notwendig, zunächst einiges über deren Geometrie zu rekapitulieren.

Bezogen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz  $Oxyz$  (siehe Abb. 1) kann man die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids am besten in folgender Form schreiben:

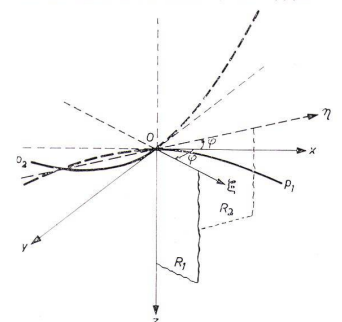
$$z = \frac{x^2}{2r_1} - \frac{y^2}{2r_2} \quad (1)$$

$O$  ist dann der Scheitel (oder Mittelpunkt) der Fläche,  $Oz$  die Achse, während  $xOz$  und  $yOz$  Symmetrieebenen sind, welche das Hyppar in den Parabeln  $p_1$  bzw.  $p_2$  schneiden. Die in (1) vorkommenden Größen  $r_1$  und  $r_2$  sind die Krümmungsradien der Parabeln  $p_1$  und  $p_2$  im Scheitel  $O$ .

Die Ebene  $xOy$  schneidet die Fläche in den Geraden  $O\xi$  und  $O\eta$ , die man Richtlinien nennt. Die Achse  $Ox$  ist die Winkelhalbierende des Winkels  $2\varphi$  zwischen diesen Richtlinien. Es gilt:

$$\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \quad (2)$$

Bezogen auf das Achsenkreuz  $O\xi\eta z$  (wobei die Achsen  $O\xi$  und  $O\eta$  im allgemeinen nicht senkrecht aufeinander stehen) lautet die Gleichung des Hyppars:



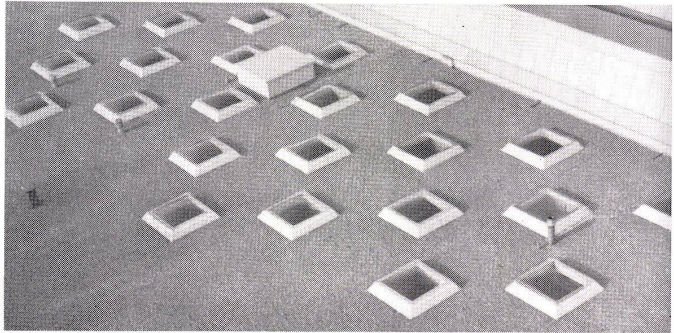
1. Zur Beschreibung des hyperbolischen Paraboloids.  $O$  = Scheitel,  $Oz$  = Achse;  $xOz$  und  $yOz$  sind die Symmetrieebenen;  $\xi Oz$  und  $\eta Oz$  sind die Richtebenen ( $R_1$  und  $R_2$ ), zu denen die beiden Scharen Erzeugenden der Fläche parallel verlaufen.



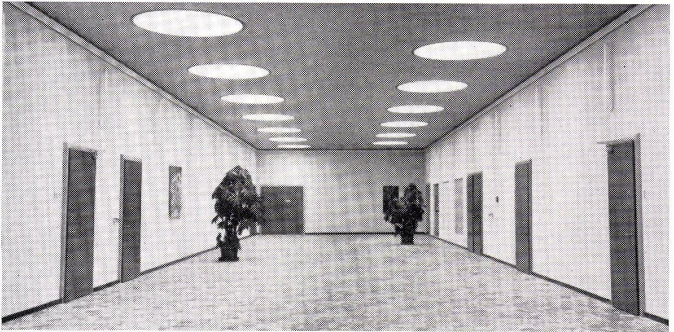


die in 6 europäischen Staaten  
meistverbreitete Oberlichtkuppel

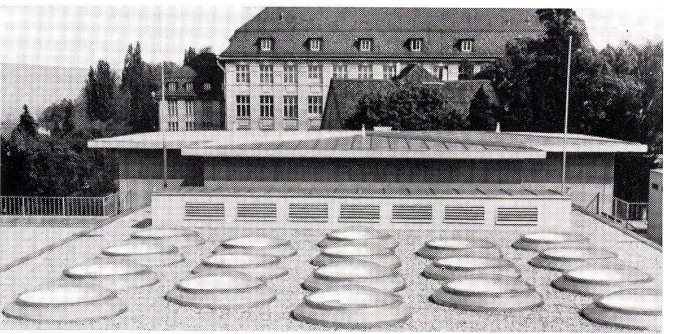
CUPOLUX bewährt in Industriebauten (IMAGO, Tages-Anz. Zürich)  
— ermöglicht individuelle Lichtverteilung



CUPOLUX geschätzt im Schulhausbau (Neues Technikum Luzern)  
— vermittelt ein angenehmes Freiluft-Gefühl



CUPOLUX beliebt in repräsentativen Räumen (Universität Zürich)  
— Akryl-Glas ist witterungsbeständig, vergilbt nicht



CUPOLUX wird in 12 Standardgrößen und -Formen von 40 bis 220 cm  
vorfabriziert, technisch ausgereifte Konstruktion,  
absolut dicht, niedrige Wärmeleitwerte

Verlangen Sie unverbindlich Offerte, Referenzliste, Beratung, individuelle  
Lichtberechnungen, Prospekte und Preisliste

**JAKOB SCHERRER SÖHNE**

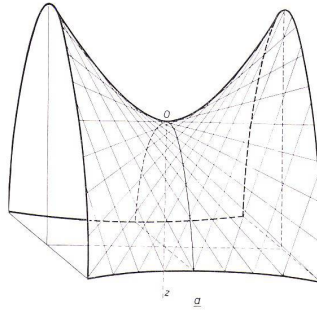
Allmendstraße 7 Zürich 2 Telefon 051 / 25 79 80

$$z = k \xi \eta \sin 2\varphi, \quad (3)$$

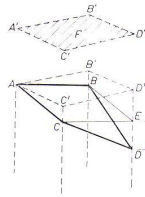
wenn

$$k = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \quad (4)$$

Die beiden durch die Achse  $Oz$  und durch die Richtlinien  $O\xi$  bzw.  $O\eta$  gehenden Ebenen nennt man die Richtebenen  $R_1$  und  $R_2$  des Hyppars. Aus Gleichung (3) ist ersichtlich, daß alle parallel zu  $R_1$  verlaufenden Ebenen das Hyppar in geraden Linien schneiden; das gleiche gilt für alle parallel zu  $R_2$  liegenden Ebenen. Das hyperbolische Paraboloid enthält somit zwei Scharen von Erzeugenden. Die Geraden jeder dieser Scharen laufen sämtlich parallel zu der zugehörigen Richtebene, aber ihre Neigung ändert sich mit der Entfernung von dieser Ebene (siehe Abb. 2a).



2 a  
Hyperbolisches Paraboloid mit den beiden Scharen Erzeugenden.  $O$  = Scheitel,  $Oz$  = Achse.



2 b  
Teil eines hyperbolischen Paraboloids, begrenzt durch die vier Erzeugenden  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $BD$ . Die lineare Verzerrung ist  $v$ , die spezifische Verzerrung  $v/F = k = 1/r_1 r_2$ .

Betrachtet man einen Teil der Fläche einer Hypparschale, begrenzt durch zwei Erzeugenden  $AB$  und  $CD$  der einen Schar und zwei Erzeugenden  $AC$  und  $BC$  der anderen Schar (siehe Abb. 2b), so ist sofort einzusehen, daß ein hyperbolisches Paraboloid auch dann erhalten wird, wenn eine Gerade (z. B.  $AC$ ), welche zwei windschiefe Geraden schneidet ( $AB$  und  $CD$ ), an diesen beiden Geraden entlang gleitend sich verlagert und dabei parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt (im vorliegenden Fall zu der Richtebene, zu der  $AC$  und  $BD$  parallel sind).

Konstruiert man auf zwei aneinanderstoßenden Seiten (z. B.  $AB$  und  $AC$ ) ein Parallelogramm, dessen vierter Eckpunkt mit  $E$  bezeichnet sei, so nennt man das Stück  $DE$  die lineare Verzerrung  $v$  der Hypparfläche  $ABDC$ ; die Verbindungsgerade  $DE$  ist parallel zur Achse des hyperbolischen Paraboloids.

Projiziert man die Fläche  $ABDC$  auf eine senkrecht zur Achsrichtung  $DE$  stehende Ebene und ist der Flächeninhalt dieser Projektion (Parallelogramm  $A'B'D'C'$ ) =  $F$ , so nennt man das Verhältnis  $v/F$  die spezifische Verzerrung; diese Größe ist identisch mit der durch (4) definierten Größe  $k$  und konstant für jeden von vier Erzeugenden begrenzten Ausschnitt der Hypparschale. In der Praxis wird  $k$  gewöhnlich durch Berechnung der spezifischen Verzerrung bestimmt.

Schließlich kann das hyperbolische Paraboloid noch als eine Schiebungsfläche betrachtet werden. Kehren wir hierzu nach Abb. 1 zurück. Alle parallel zur Symmetrieebene  $xOz$  verlaufenden Ebenenschnitten die Fläche nach Gleichung (1) in Parabeln, die mit  $p_1$  kongruent sind, während alle parallel zur Symmetrieebene  $yOz$  verlaufenden Ebenen Schnittkurven ergeben, die mit der Parabel  $p_2$  kongruent sind. Man kann sich das Hyppar somit auch in der Weise entstanden denken, daß man die Parabel  $p_2$  parallel zu sich selbst verschiebt, wobei ihr Scheitel entlang  $p_1$  gleitet, oder indem man die Parabel  $p_1$  parallel zu sich selbst verschiebt, wobei ihr Scheitel entlang  $p_2$  gleitet.

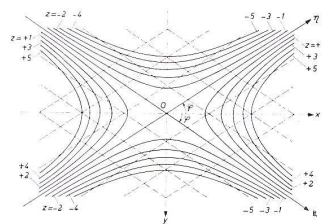
Läßt man eine Ebene  $z = +c$  das Hyppar schneiden, so erhält man gemäß Gleichung (1) als Schnittkurve eine Hyperbel. Projiziert man diese auf  $xOy$ , so sind  $O\xi$  und  $O\eta$  die Asymptoten und  $Oy$  die imaginäre Achse. Läßt man eine Ebene  $z = -c$  das Hyppar schneiden, so ist die projizierte Schnittkurve wieder eine Hyperbel mit den Asymptoten  $O\xi$  und  $O\eta$ , jedoch mit  $Ox$  als imaginäre Achse.

Im Sonderfall  $\varphi = 45^\circ$  ( $O\xi$  und  $O\eta$  stehen in diesem Fall senkrecht aufeinander) werden diese Hyperbeln gleichseitig. Man nennt das Hyppar dann gleichseitig.

Projiziert man von einem beliebigen Hyppar eine Anzahl Hyperbeln (Höhenlinien) und eine Anzahl Erzeugende auf die Ebene  $xOy$ , so erhält man ein Bild wie in Abb. 3. Vollständigkeithalber sei hier noch das einschalige Hyperboloid erwähnt, auf dessen Fläche ebenfalls zwei Scharen von Erzeugenden vorkommen. Diese Geraden verlaufen jedoch nicht parallel zu zwei Richtebenen, sondern parallel zu den Erzeugenden einer Kegelfläche, dem sogenannten Asymptotenkegel des Hyperboloids. Hierdurch wird die Berechnung der Kraftverteilung in der hyperboloidischen Schale viel komplizierter als für die Hypparschale.

### Die Membrantheorie der Hypparschale

Kräfte, die in der Mittelebene einer Platte oder Schale gelegen sind, nennt man Membrankräfte. (Unter Mittelebene versteht man den geometrischen Ort der Mitte der Dickenerstreckung in allen Punkten der Platte oder Schale). Im Gegensatz zur ebenen Platte, die keine senkrecht zur Plattenebene gerichtete Belastung in der Form von Membrankräften aufnehmen kann, ist dies bei einer gekrümmten Schale möglich. In solchen Fällen, in denen die



3  
Hyperbolisches Paraboloid mit Höhenlinien (Hyperbeln) und Erzeugenden (gestrichelt), projiziert auf die Ebene  $xOy$ .

zugehörigen Formänderungen der Schale ungestört vonstatten gehen können, ist eine ausschließlich durch Membrankräfte erfolgende Kraftübertragung eine gute Näherung der wirklichen Kraftverteilung. Eine statisch mögliche Spannungsverteilung, bei der Biegung und Torsion vermieden werden (d. h. eine quasi-zweidimensionale Spannungsverteilung), ergibt nämlich in guter Näherung die kleinste Formänderungsarbeit in der Konstruktion. Man geht daher auch gewöhnlich so vor, daß man zunächst die Kraftverteilung in der Hypparschale nach der Membrantheorie berechnet. Anschließend wird man dann im allgemeinen, so gut es geht, Korrekturen vornehmen müssen wegen der Begrenzungen (Ränder) der Schale, wo die Formänderungen, die dem Membranspannungszustand entsprechen, nicht unbehindert auftreten können. Beim





**Hinter Lamellenstoren  
fühlt man sich wohl!**

**Welches System und welche Ein-  
bauart Ihren Ansprüchen genügt,  
beurteilt am sichersten ein Fach-  
mann der**

**Metallbau AG Zürich 9/47**

Anemonenstrasse 40, Telefon 051/52 13 00

Philips Pavillon ist die Situation derart, daß an der Durchdringung jedes Paares von Hypparflächen diese starr mit einer Rippe verbunden sind. Die Randbedingung ist hier die, daß die Formänderungen der Rippe die gleichen sein müssen wie die der anschließenden Schalenränder. Hierdurch entstehen sogenannte Randstörungen, die weiter unten betrachtet werden.

Die Differentialgleichungen für den Membranspannungszustand kann man am besten aufstellen durch Gleichgewichtsbetrachtung eines belasteten Elementes in den Richtungen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $z$ . Wir betrachten dazu ein Schalenelement, das von vier benachbarten Erzeugenden begrenzt ist; ihre Projektionen auf die (horizontale) Ebene  $\xi O \eta$  bilden ein Elementar-Parallelogramm mit den Seiten  $d\xi$  und  $d\eta$  (siehe Abb. 4). Die Belastungskomponenten je horizontale Flächeneinheit der Schale in den Richtungen  $O\xi$ ,  $O\eta$  und  $Oz$  sind  $p\xi$ ,  $p\eta$  und  $pz$ . Die schiefen Membrankräfte je Längeneinheit (sog. Schnittkräfte, das Analogon zu den Spannungen in der Lehre von den Spannungszuständen) im Schalenelement sind  $n\xi$ ,  $n\eta$  und  $\vartheta$ . Man führt ferner die projizierten Schnittkräfte ein:

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}\xi &= n\xi \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \\ \bar{n}\eta &= n\eta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen in der  $\xi$ -,  $\eta$ - bzw.  $z$ -Richtung liefern dann folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta n\xi}{\delta \xi} + \frac{\delta \vartheta}{\delta \eta} p\xi \sin 2\varphi &= 0, \\ \frac{\delta n\eta}{\delta \eta} + \frac{\delta \vartheta}{\delta \xi} p\eta \sin 2\varphi &= 0, \\ 2\delta \frac{\delta^2 z}{\delta \xi \delta \eta} + \left( pz - p\xi \frac{\delta z}{\delta \xi} - p\eta \frac{\delta z}{\delta \eta} \right) \sin 2\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist die Komponente  $p_z$  der Belastung, wenn man diese nach der  $z$ -Richtung und der Tangentialebene im betrachteten Schalenpunkt zerlegt; man kann somit die dritte Gleichung von (6) auch wie folgt schreiben:

$$2\delta \frac{\delta^2 z}{\delta \xi \delta \eta} + p_z \sin 2\varphi = 0 \quad (7)$$

Eine sehr einfache Lösung bekommt man, wenn die Belastung in der  $z$ -Richtung je horizontale Flächeneinheit der Hypparschale in allen Punkten konstant ist,  $= g$ , während  $p\xi = p\eta = 0$ . Aus Gleichung (3) folgt die rein geometrische Beziehung:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta \xi \delta \eta} = k \sin 2\varphi$$

Gleichung (7) liefert somit für den Fall  $p_z = g$ :

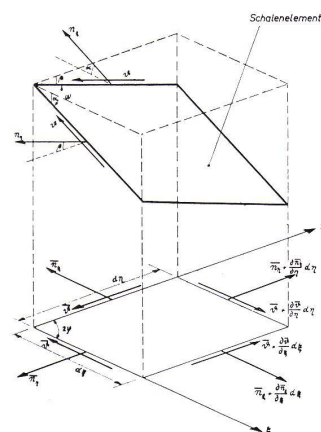
$$\vartheta = -\frac{g}{2k} = \text{konstant} \quad (8)$$

Man ersieht aus dieser Formel, daß die Schnittkraft  $\vartheta$  umgekehrt proportional  $k$  ist. Nach Gleichung (4) ist es somit günstig, die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  möglichst klein zu wählen. Je stärker die Schalenkrümmung, um so günstiger ist die Spannungsverteilung.

Wenn die Schale von Erzeugenden begrenzt wird, und außerdem die Membrankräfte  $n\xi$  und  $n\eta$  hier gleich Null gesetzt werden dürfen (nachgiebige Randglieder), folgt ferner aus den ersten beiden Gleichungen (6), daß in allen Punkten der Schale diese Kräfte Null sind.

Eine konstante Belastung je horizontale Flächeneinheit wird durch eine Hypparschale mit vertikaler Achse und konstanter Dicke somit in der Form von konstanten Schubspannungen entlang den Erzeugenden auf die Randglieder übertragen. Die Schale ist dann nahezu eine Schale gleichen Widerstands; dies be-

deutet, daß, wenn in einem Punkt der Schale die Spannung den maximal zulässigen Wert erreicht, dies in sämtlichen Punkten der Fall ist. Da die Festigkeit des Materials dann überall voll ausgenutzt wird, leuchtet es ein, daß eine Konstruktion gleichen Widerstands einem Minimum an Materialverbrauch entspricht.



4 Gleichgewicht eines Schalenelementes, unter Einführung von schiefen projizierten Schnittkräften. Schnittkräfte sind Kräfte je Längeneinheit der Schale; die Komponenten der parallel zur Mittelebene der Schale wirkenden Schnittkräfte (Membranschnittkräfte) werden gewöhnlich mit  $n$  und  $\vartheta$  bezeichnet. Dividiert man eine Schnittkraft durch die Dicke der Schale, so erhält man offenbar eine Spannung (Kraft je Flächeneinheit).

Obiges kann noch anhand von Abbildung 5 erläutert werden. In ihr ist eine einfache Schalenform abgebildet, bestehend aus vier Quadranten, die jeweils einen Teil eines gleichseitigen Hyppars bilden, mit Rippen als Randgliedern. Wie in einem der Quadranten mit gestrichelten Linien angegeben, befinden sich auf der Fläche Parabeln, die nach oben konvex sind, und solche, die nach oben konkav sind. Die ersteren sind Druckparabeln, die letzteren Zugparabeln. Die Belastung der Schale wird nun zur Hälfte von den Druckparabeln und zur Hälfte von den Zugparabeln aufgenommen. Betrachtet man einen Punkt eines Randgliedes, in dem eine Zugparabel und eine Druckparabel zusammenkommen, so ergeben die Reaktionskräfte von beiden zusammen eine Schubkraft längs des Randgliedes, so daß die Rippen nicht senkrecht zu ihrer Längsrichtung belastet werden. Diese Art der Kraftübertragung findet auch dann statt, wenn die Hypparschalen nicht gleichseitig sind. Dadurch wird begreiflich, daß beim Philips Pavillon die Belastung größtenteils in Form von Druckkräften entlang den Rippen auf die Fußpunkte übertragen wird, und daß daher die ursprünglich notwendig errichteten vertikalen Unterstützungen der Spitzen zuguterletzt entbehrt werden konnten.

Die hier beschriebene einfache Kraftverteilung gilt nur für eine gleichmäßig verteilte Belastung je horizontale Flächeneinheit, wie zum Beispiel eine Schneebelastung von konstanter Dicke in vertikaler Richtung.

Für das Eigengewicht der Schale gilt die einfache Kraftverteilung nur näherungsweise. Beträgt dieses Gewicht je Flächeneinheit der Schale  $g$ , so wird die Schnittkraft  $\vartheta$ , für eine Schale mit vertikaler Achse:

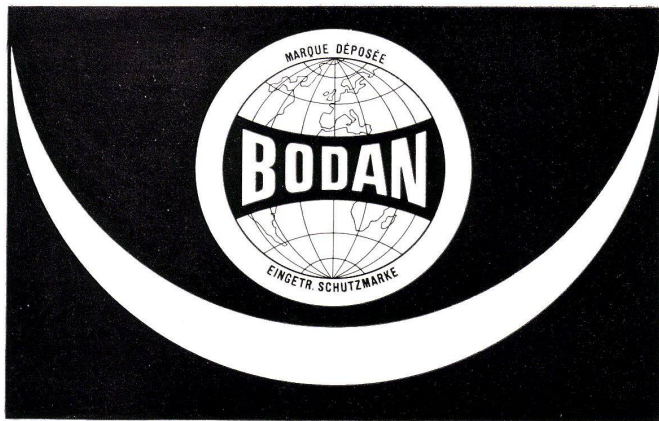
$$\vartheta = -\frac{g}{2k} \sqrt{\Phi} \quad (9)$$

wo

$$\Phi = 1 + k^2 (\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos 2\varphi) \quad (10)$$

Bilden die Normalen der Schalenfläche keinen allzugroßen Winkel mit der Achse ( $\leq 15^\circ$ ), so kann  $\Phi = 1$  gesetzt werden. Ferner findet man:





## Warum wurden BODAN-Lichtpausmaschinen und -apparate zu einem weltweiten Begriff?

- weil** erfahrene Fachleute sie nach dem letzten Stand der Technik aus der Praxis heraus für die Praxis entwickelten
  - weil** sie dank einfachster Konstruktion störungsfrei arbeiten
  - weil** sie durch geräuschlosen Gang und geruchlose Entwicklung überraschen
  - weil** sie mit automatischer Entwicklernachfüllung, endlos gewobenen Transportbändern und rotierenden Glaszylindern ausgerüstet sind
  - weil** die neue automatische Bänderspannung jedes Verschieben des Pausgutes verunmöglicht. Resultat: wie gestochen scharfe Kopien
  - weil** sie dank Gleichstrommotor mit konstantem Drehmoment belastungsunabhängig arbeiten
  - weil** sie von 0 an stufenlos zu regulieren sind
  - weil** die BODAN-Reihe für jedes Unternehmen, selbst den kleinsten Betrieb, die zweckdienlichste und damit rationellste Maschine bereit hat und nicht zuletzt
  - weil** sie sich als schweizerische Qualitätserzeugnisse ausnehmend preisgünstig halten
- 10 verschiedene Modelle mit einer Leistung von 55–450 cm pro Minute

Verlangen Sie bitte unverbindlich eine Gratis-Probestellung in Ihren Betriebsräumen

### BODAN-Erzeugnisse bereichern Ihren Betrieb!

Fabrik für Lichtpausmaschinen und Fotokopierapparate

Karl Müller AG Roggwil TG / Schweiz Tel. 071/4 83 77



$$\left. \begin{aligned} \bar{n}\xi &= -\frac{g}{2k} \cos 2\varphi \sqrt{\Phi} + \\ &+ \frac{1}{2} g \eta \sin 2\varphi \ln [\sqrt{\Phi} + k\xi - k\eta \cos 2\varphi] + \\ &+ f_1(\eta), \\ \bar{n}\eta &= -\frac{g}{2k} \cos 2\varphi \sqrt{\Phi} + \\ &+ \frac{1}{2} g \xi \sin 2\varphi \ln [\sqrt{\Phi} + k\eta - k\xi \cos 2\varphi] + \\ &+ f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

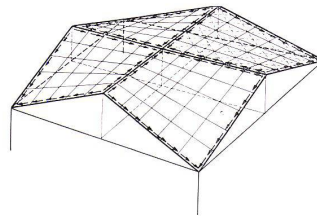
Die Integrationsfunktionen  $f_1(\eta)$  und  $f_2(\xi)$  müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden.

In dieser Weise kann man auch die Membrankräfte für eine konstante Belastung  $w$  je Flächeneinheit der Schale berechnen, die in jedem Punkte senkrecht zur Schale gerichtet ist. Eine derartige Belastung wird nämlich häufig als Windbelastung angenommen.

Man findet dann:

$$\vartheta = -\frac{w\Phi}{2k} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}\xi &= wk(2\xi\eta - \xi^2 \cos 2\varphi) + f_3(\eta), \\ \bar{n}\eta &= wk(2\xi\eta - \eta^2 \cos 2\varphi) + f_4(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



5 System von vier gleichseitigen Hypparschalen bei voller Belastung, die gleichförmig je horizontale Flächeneinheit verteilt ist. Die Pfeile geben die Schubkräfte an, wie sie auf die steifen Randglieder übertragen werden.

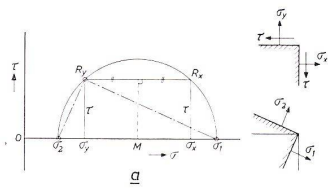
Aus den obigen Formeln sieht man, daß, im Gegensatz zu einer Schneebelastung, sowohl bei Belastung durch Eigengewicht als auch durch Wind, die Schnittkräfte  $d$  nicht mehr konstant sind, und daß jetzt auch die Schnittkräfte  $n$  eine Rolle zu spielen beginnen.

Hat man die projizierten Schnittkräfte  $\bar{n}\xi$  und  $\bar{n}\eta$  berechnet, so sind durch die Beziehungen (5) auch die wirklichen Schnittkräfte  $n\xi$  und  $n\eta$  bekannt. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß (siehe Abb. 4):

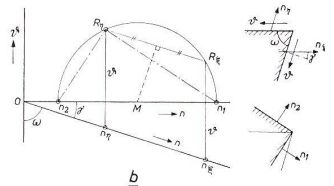
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\delta\xi/\delta\xi)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\delta\xi/\delta\eta)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die minimal erforderliche Vorspannung findet man, wenn der Kreis die  $\vartheta$ -Achse berührt und wenn man gleichzeitig die neuen Punkte  $R\xi''$  und  $R\eta''$  die auf der gleichen schiefen Geraden wie  $R\xi$  und  $R\eta$  liegen, zusammenfallen läßt; der Kreis berührt dann auch diese schiefe Gerade (im Punkt  $R'$ ). Der Mittelpunkt  $M'$  des Kreises wird daher auf der Winkelhalbierenden dieser schiefen Geraden und der  $\vartheta$ -Achse gefunden. Man ersieht aus der

Abbildung, daß die Vorspannung die Druckschnittkräfte  $n\xi + \delta$  und  $n\eta + \delta$  verursachen muß, und daß der Spannungszustand dann umgewandelt wird in eine einachsige Druckschubspannung (eine der Hauptspannungen ist Null), mit einer Hauptschnittkraft  $On_3$ , die in der Richtung  $R'n_3$  wirkt, das heißt in Richtung der genannten Winkelhalbierenden.

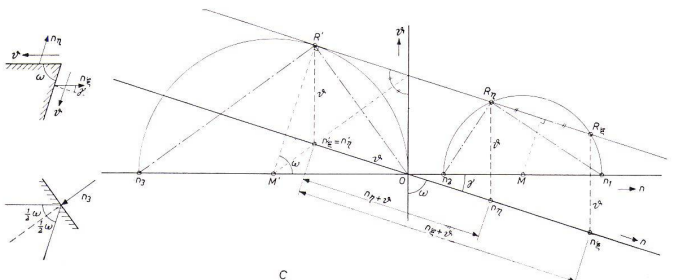


6 a Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises für einen ebenen Spannungszustand, zur Ermittlung der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in einem bestimmten Punkt aus den Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  und aus der Schubspannung  $\tau$  in zwei zueinander senkrechten Flächenelementen in diesem Punkt. Man trägt  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  auf der  $\sigma$ -Achse auf und senkrecht dazu  $\tau$ , was die Punkte  $R_x$  und  $R_y$  ergibt. Der durch  $R_x$  und  $R_y$  gehende Kreis, dessen Mittelpunkt  $M$  auf der  $\sigma$ -Achse liegt, liefert die Punkte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Die Abstände  $O\sigma_1$  und  $O\sigma_2$  stellen die Größe der Hauptspannungen dar, die in den Richtungen  $R_x\sigma_1$  bzw.  $R_y\sigma_2$  wirken.



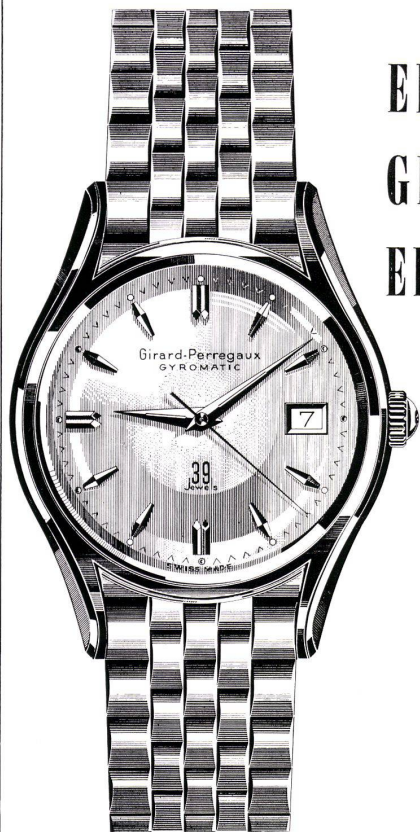
6 b Änderung der Mohrschen Konstruktion, um von den Spannungen (oder, da es sich hier um einen Membranspannungszustand handelt: von den Schnittkräften  $n\xi$  und  $n\eta$ ; siehe Abbildung 4) auszugehen zu können, die nach den beiden durch einen Punkt des Hyppars gehenden Erzeugenden gerichtet sind. Die Flächenelemente, in denen diese Spannungen wirksam sind, stehen also nicht senkrecht aufeinander, sondern bilden einen Winkel  $w$ . Man trägt  $n\xi$  und  $n\eta$  auf einer Achse auf, die einen Winkel  $w$  mit der  $\vartheta$ -Achse bildet, und zeichnet in den gefundenen Punkten  $\vartheta$  parallel zur  $\vartheta$ -Achse, was die Punkte  $R\xi'$  und  $R\eta'$  liefert. Der durch  $R\xi'$  und  $R\eta'$  gehende Kreis, dessen Mittelpunkt  $M$  auf der  $n$ -Achse liegt, liefert die Punkte  $n_1$  und  $n_2$ . Die Abstände  $On_1$  und  $On_2$  geben die Größe der Hauptschnittkräfte an, die in den Richtungen  $R\eta n_1$  bzw.  $R\eta n_2$  wirksam sind.

6 c Wünscht man einen Spannungszustand zu erhalten, in dem keine Zugspannungen auftreten, so muß man durch äußere Kräfte den Mohrschen Spannungskreis derart verschieben, daß er ganz links von der  $\vartheta$ -Achse zu liegen kommt. Man kann dies mit Vorspannungskabeln bewirken, die man gemäß den Erzeugenden des Hyppars verlegt, und muß dann die gemäß  $n\xi$  und  $n\eta$  gerichteten Vorspannungsschnittkräfte (Druckkräfte) von den Punkten  $n\xi$  bzw.  $n\eta$  aus auf der gleichen schiefen Achse nach links auftragen.



6 c





## EINE GENIALE ERFINDUNG

Automatisch  
Wasserdicht  
Stossgesichert

Mit Datum  
Edelstahl 255.-  
Gold 18 Kt. 685.-  
Mit Goldband 2090.-

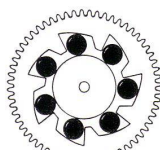
Ohne Datum  
Edelstahl 237.-  
Gold 18 Kt. 665.-

**GIRARD-PERREGAUX**  
Uhren von Weltruf seit 1791

## 39 Rubine

das ist die exklusive Bezeichnung für die erste automatische Uhr mit Gyrotron-Funktion. Die Gyrotronen (Rubinen-Rollager) reagieren auf die kleinste Armbewegung. Deshalb weist die neue Girard-Perregaux «39 Rubine» eine unerwartet hohe Gangreserve auf.

Das Gyrotron arbeitet ohne Stösse, ohne Reibung, ohne Verschleiss. Sein Rubinen-Rollager ersetzt auf geniale Weise die früheren, eher komplizierten automatischen Aufzugsysteme.



GYROTRON

Lassen Sie sich diese interessante Neuheit beim offiziellen Girard-Perregaux Vertreter unverbindlich zeigen:

**BARTH**

Bahnhofstrasse 94

Zürich

Zur Beurteilung der Festigkeit einer Konstruktion müssen schließlich aus den wirklichen Schnittkräften für eine Anzahl hervorstechende Punkte der Schale die Hauptschnittkräfte\* nach Größe und Richtung bestimmt werden. Hierzu ist es noch erforderlich, im betrachteten Punkt den Winkel  $\omega$  zwischen den Erzeugenden (siehe Abb. 4) zu kennen. Dieser kann mit Hilfe nachstehender Formel berechnet werden:

$$\cos \omega = \frac{(\delta z / \delta \xi)(\delta z / \delta \eta) + \cos 2\varphi}{\sqrt{[1 + (\delta z / \delta \xi)^2][1 + (\delta z / \delta \eta)^2]}} \quad (15)$$

Da man es hier mit schiefen Schnittkräften bzw. Spannungen zu tun hat, muß die gebräuchliche Kreiskonstruktion nach Mohr etwas geändert werden. In Abbildung 6a ist die gewöhnliche Konstruktion nach Mohr für einen ebenen Spannungszustand gegeben; mit ihr bestimmt man aus den Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  und der Schubspannung  $\tau$  – wirksam in zwei zueinander senkrechten Flächenelementen, beide senkrecht zur spannungslosen Ebene – die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  nach Richtung und Größe. Abbildung 6b zeigt die geänderte Konstruktion, um aus den schiefen Schnittkräften  $n\xi$ ,  $n\eta$  und  $\vartheta$  – wirksam in zwei Flächenelementen, die einen spitzen Winkel  $\omega$  miteinander bilden – die Hauptschnittkräfte  $n_1$  und  $n_2$  nach Richtung und Größe zu bestimmen.<sup>7</sup>

Weiterhin kann man dann in der Mittelebene der Schale zwei Kurvenscharen zeichnen, welche die Eigenschaft besitzen, daß in jedem Schnittpunkt die beiden Tangenten an die betreffenden Kurven die Richtungen der Hauptschnittkräfte  $n_1$  und  $n_2$  in jenem Punkt angeben. Diese Kurven sind die Hauptschnittkrafttrajektorien; man nennt sie auch Hauptspannungstrajektorien, da ja die Schnittkraft geteilt durch die Dicke der Schale die Spannung ergibt.

Verwendet man vorgespannten Beton, so erhebt sich unter anderem die Frage, welche Spannkraft man in den Kabeln (verlegt in Richtung der Erzeugenden) mindestens anzubringen hat; mit anderen Worten, welche Schnittdruckkräfte man in der  $\xi$ - bzw. in der  $\eta$ -Richtung dem Spannungszustand mindestens überlagern muß, damit in keinem einzigen durch den betrachteten Punkt gehenden Flächenelement noch eine Zugspannung auftritt. Die graphische Lösung dieses Problems ist in Abbildung 6c angegeben.

### Randstörungen

Wie bereits oben erwähnt, kann die Schale in der Nähe der steifen Randglieder nicht ungestört die Formänderungen erfahren, welche dem Membranspannungszustand entsprechen. Denkt man sich nämlich das Randglied von der Schale gelöst, so daß diese Formänderungen ungehindert stattfinden können, so würden Schalenrand und Randglied sich nachher nicht mehr passend aneinanderfügen. Letzteres kann man nur erreichen, wenn das Randglied Kräfte (Normal-, Schub- und Querkraft) und Momente (Biege- und Torsionsmomente) auf den Schalenrand ausübt, und umgekehrt die Schale entgegengesetzte Kräfte und Momente auf das Randglied derart, daß die damit einhergehenden zusätzlichen Formänderungen eine vollkommene Anpassung ermöglichen. Die Berechnung dieser Randstörungen, die dem Membranspannungszustand überlagert werden müssen, gehört zu den

\* Analog definiert als die Hauptspannungen in der zweidimensionalen Spannungslehre, nämlich als die Schnittkräfte in solchen Flächenelementen, in denen keine Schubkräfte, sondern nur Normalkräfte vorhanden sind (dies sind dann gleichzeitig die größten und kleinsten im betrachtenden Punkt auftretenden Schnittkräfte).

<sup>7</sup> C. G. J. Vreedenburgh, Hypparschalen, bearbeitet von W. Grijm, Centr. Comm. Studiebelangen, Delft 1954, Seite 17–26.

schwierigsten Problemen der Schalentheorie.

Ersetzt man die Hypparschale in einem kleinen Bereich durch eine Schiebungsfläche von Kreisen mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ , so gilt bei schwachen Krümmungen für das Randstörungsproblem (näherungsweise) folgende Differentialgleichung:

$$\Delta \Delta \Delta w = -\frac{D}{K}(1-v^2) \quad \left[ \frac{1}{r_2^2} \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} - \frac{2}{r_1 r_2} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right] \quad (16)$$

Hierin ist:

$w$  = Verlagerung eines Schalenpunktes in Richtung der Normalen,

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}, \quad D = \frac{E\delta}{1-v^2}$$

$$K = \frac{E\delta^3}{12(1-v^2)}$$

$\vartheta$  = Schalendicke,  
 $E$  = Elastizitätsmodul,  
 $v$  = Poissonsche Querszahl.

Die Größen  $D$  und  $K$  stellen die Dehnungssteifigkeit bzw. Biegesteifigkeit der Schale dar.

Ist  $w$  bekannt, so kann die gesamte Kraftverteilung bestimmt werden. Man findet, daß die von den Randpunkten ausgehenden Störungen stets aus der Überlagerung zweier Wellen bestehen, die beide in vielen Fällen schnell abklingen, so daß in gewisser Entfernung von den Randgliedern kaum noch etwas von den Randstörungen zu bemerken ist.

Unter anderem wegen der Tatsache, daß eine Berechnung nach Gleichung (16) überaus schwierig ist und bei komplizierten Randbedingungen, wie sie beim Phillips Pavillon herrschen, sogar undurchführbar, erscheint uns die folgende näherungsweise Berechnung zur Bestimmung der Größenordnung der Randstörungen in Hypparschalen für die Praxis durchaus genügend. Diese Rechenmethode basiert auf der Tatsache, daß eine Schale, was die Biegeerscheinungen betrifft, verglichen werden kann mit einer Platte auf elastischer Unterlage. Denkt man sich also einen Streifen der Hypparschale senkrecht zum Randglied, so verhält sich dieser Streifen annähernd wie ein Träger auf elastischer Unterlage. Sind die Hauptkrümmungen der Hypparschale im betrachteten Randpunkt  $k_1$ , bzw.  $k_2$ ,<sup>8</sup> so beträgt die Bettungskonstante für den äquivalenten Träger auf elastischer Unterlage ungefähr:

$$c = E\delta(k_1^2 + k_2^2). \quad (17)$$

(Unter der Bettungskonstante einer elastischen Unterlage versteht man den Gegenstand je Flächeneinheit, der je Einheit der Zusammenpressung entsteht. Je größer  $c$ , um so größer die Bettungssteifigkeit.) Der Verlauf der Randstörung, nunmehr ausschließlich bestimmt durch das Biegemoment  $m$  und die Querkraft  $q$  (beide je Längeneinheit der Schale), kann nun in einfacher Weise berechnet werden. Es ergibt sich, daß man den Verlauf der Randstörungen durch eine «Wellenlänge» und eine «Dämpfung» beschreiben kann, die beide durch eine charakteristische Länge bestimmt werden:

$$\lambda = \frac{0,76 \sqrt{\delta}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (18)$$

Man kann annehmen, daß in einer Entfernung von ungefähr  $3,5\lambda$  vom Rand der Einfluß der Störung vernachlässigt werden kann. Aus (18) sieht man, daß die Störungsbereiche um so kleiner sind, je geringer die Schalendicke und je größer die Hauptkrümmungen (d. h. je kleiner die Hauptkrümmungsradien). Kann die Befestigung der Schale im Randglied als völlig starre Einspannung angesehen werden, so verlaufen das Rand-

<sup>8</sup> Bei einem hyperbolischen Paraboloid fallen die Hauptkrümmungsrichtungen in einem bestimmten Punkt zusammen mit den beiden Winkelhalbierenden der beiden durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden.



VON FACHLEUTEN  
ALS FÜHREND  
ANERKANNT!

# XPELAIR

MIT IRIS-VERSCHLUSS

In den letzten Jahren weiter vervollkommen... heute das Beste, was man sich denken kann:

▲ Dank Irisverschluss in Ruhestellung vollständige Abdichtung gegen aussen.

▲ Vibrationsfreier, ruhig laufender, vollständig gegen Öl- und Fettdämpfe abgedichteter Spezialmotor mit kleinstem Stromverbrauch.

Hauptverwendungszwecke:

● Bei bestehenden Bauten und wo der Platz fehlt einfachster Einbau in Fensterscheiben.

● Bei Neubauten leichte Montage in Fenster, dünne Wände oder dicke Mauern.

WICHTIG:

1. Im Preis inbegriffen sind eingebauter Schalter, Irisverschluss und Nylonkordeln zum Ein- und Ausschalten.

2. Drei formschöne Modelle für 210/310, 425 und 850 m<sup>3</sup>/h Förderleistung.

AWAG

SEV-geprüft

37

A. WIDMER AG., ZÜRICH 1 Talacker 35, Tel. (051) 23 03 11

Normen  
vereinfachen und  
verbilligen das Bauen

# Göhner Normen

die beste  
Garantie für Qualität

Ernst Göhner AG, Zürich  
Hegibachstrasse 47  
Telefon 051/24 17 80  
Vertretungen in  
Bern, Basel, St.Gallen, Zug  
Biel, Genève, Lugano

Fenster 221 Norm-Typen,  
Türen 326 Norm-Typen,  
Luftschutzfenster + -Türen,  
Garderoben-+Toilettenschränke,  
Kombi-Einbauküchen,  
Carda-Schwingflügel Fenster.

Verlangen Sie unsere Masslisten  
und Prospekte. Besuchen  
Sie unsere Fabrikausstellung.

G1

Störungsmoment  $m$  und die Randstörungs-  
querkraft  $q$ , beide je Längeneinheit der  
Schale, als Funktion der Entfernung  $x$  zum  
Rand gemäß den Kurven in Abbildung 7  
(die Belastung der Schale senkrecht zu  
deren Fläche ist  $p$ ). Man sieht aus den ins  
Diagramm eingeschriebenen Formeln,  
daß jede Störung jetzt als eine einzige  
gedämpfte Welle verläuft, die man als die  
Resultierende der beiden Wellen betrachten  
kann, die Gleichung (16) entsprechen.  
Die Dämpfung ist um so stärker, je kleiner  
die charakteristische Länge  $\lambda$  ist. In diesem  
Fall einer starren Einspannung am  
Rande wird das negative Einspannungs-  
Schnittmoment:

$$m_0 = \frac{1}{2} p \lambda^2, \quad (19)$$

und die Auflagerreaktion je Längeneinheit  
(= die Schnittquerkraft an der Einspan-  
stelle):

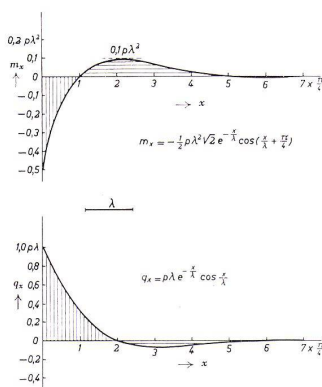
$$q_0 = p \lambda. \quad (20)$$

Ist die Schale am Rande scharnierend ge-  
lagert, so wird die Auflagerreaktion:

$$q_0 = \frac{1}{2} p \lambda, \quad (21)$$

und das maximale (positive) Schnitt-  
moment, das in einer Entfernung 0,785  $\lambda$   
vom Randglied auftritt:

$$m = 0,16 p \lambda^2 \quad (22)$$



7 Verlauf der Randstörungen  $m$  (Biege-  
moment je Längeneinheit der Schale) und  
 $q$  (Querkraft je Längeneinheit der Schale)  
bei Einspannung der Schale in einem  
völlig steifen Randglied.  $\lambda$  ist die charak-  
teristische Länge. In einer Entfernung  
 $x = 3,5 \lambda = 4,5 \times (\pi/4) \lambda$  vom Rande ist  
die Störungswelle praktisch abgeklungen.

Kann das Randglied selbst noch eine  
Formänderung erfahren, so kann nötigen-  
falls deren Einfluß ebenfalls in der Rech-  
nung berücksichtigt werden.

Mit Hilfe der Formeln (19) und (22) ist es  
möglich, für eine beliebige Schale die  
Größenordnung der Randstörungs-  
momente zu bestimmen. Werden diese Mo-  
mente zu groß, so muß die Schale in den  
kritischen Punkten verstärkt werden. Bei  
Schalen aus bewehrtem Beton kann man  
sich in vielen Fällen mit der Einfügung zu-  
sätzlicher Bewehrungsstäbe begnügen.  
Reicht diese Maßnahme nicht aus, so ist  
auch die Schalendicke größer zu wählen.  
Mit Hilfe der Formeln (20) und (21) kann  
man berechnen, welcher Teil der Gesamt-  
schalenbelastung durch Biegung auf die  
Randglieder übertragen wird. Offenbar  
wird dann der übrige Teil in Form von  
Membrankräften von der Schale aufge-  
nommen.

Die hier angegebenen Formeln und ins-  
besondere Formel (8) bildeten die Grund-  
lage für die theoretische Analyse der  
Kraftverteilung, wie sie im Philips Pavillon  
ungefähr zu erwarten war, sowie für die  
vorläufige Dimensionierung der Rippen  
und Schalenwände, die auch für die Mo-  
delluntersuchung zugrunde zu legen war.  
Vollständigkeitshalber sei in diesem Zu-  
sammenhang noch erwähnt, daß vor kur-  
zem im Stevin-Laboratorium in Delft die

Brauchbarkeit von Formel (19) bei einem  
großen Modellversuch mit einer Hyppar-  
schale aus bewehrtem Beton gemäß Ab-  
bildung 5 experimentell nachgewiesen  
worden ist.

**Stabilität gegen Beulung und Durch-  
schlag**

Es ist eine bekannte Tatsache, daß dop-  
pelt gekrümmte Schalen viel stabiler ge-  
gen Beulung sind als zylindrische Scha-  
len. Zur Schätzung der Beulungsbelastung  
 $p_k$  (d. h. die senkrecht auf die Schalen-  
oberfläche wirkende Belastung, bei der  
die Schalenwand gerade im Begriff steht,  
sich auszubeulen) einer Hypparschale  
kann man die Theorie von Wansleben<sup>9</sup>  
anwenden. Man findet dann:

$$p_k = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} k_1 k_2 \quad (23)$$

worin  $k_1$  und  $k_2$  die absoluten Werte der  
örtlichen Hauptkrümmungen darstellen.  
Wenn  $k_1 = k_2$ , geht (23) über in die Formel  
für die Kugelschale nach Zoelly. Bezüg-  
lich einer strengeren Berechnung der  
Beulungsbelastung einer gleichseitigen  
Hypparschale sei verwiesen auf eine Ar-  
beit von Ralston.<sup>10</sup>

Aus Formel (23) ist ersichtlich, daß mit  
wachsenden Krümmungen die Beulungs-  
belastung zunimmt bzw. die Beulungs-  
gefahr abnimmt. Beim Philips Pavillon  
mußte somit vor allem der Stabilität der-  
jenigen Teile Aufmerksamkeit geschenkt  
werden, an denen die Krümmungen sehr  
gering waren. Wie jedoch auch aus For-  
mel (23) hervorgeht, kann man die Beu-  
lungsgefahr einer Schale dadurch wesent-  
lich vermindern, daß man die Schalend-  
icke größer wählt. Jedenfalls aber wird  
man bei Anwendung dieser Formel einen  
erheblichen Sicherheitskoeffizienten ein-  
rechnen müssen; dies ist übrigens auch  
wegen dem möglichen Vorhandensein  
von Formfehlern der Schale notwendig.  
Die theoretische Untersuchung der Sta-  
bilität von Schalen ist nicht einfach, vor  
allem dann nicht, wenn man neben der  
Beulung auch die Möglichkeit eines  
Durchschlags berücksichtigen möchte.  
Bei Durchschlag kann die Schale plötzlich  
eine neue Gleichgewichtslage einnehmen,  
wobei Verlagerungen von endlicher Größe  
auftreten. Die gebräuchliche Theorie, bei  
der nur unendlich kleine Formänderungen  
vorausgesetzt werden, ist dann nicht mehr  
anwendbar; man benutzt dann statt des-  
sen die sogenannte Theorie zweiter Or-  
dnung. Wir glauben, daß bezüglich der  
Durchschlagsgefahr, die naturgemäß er-  
ster ist als die Beulungsgefahr, eine Hyp-  
parschale ihrer Sattelform wegen günsti-  
ger sein dürfte als die kugelförmige  
Schale. Obgleich dies theoretisch noch  
nicht bewiesen ist, findet unsere Ver-  
mutung eine gewisse Bestätigung in der  
besonders hohen Stabilität, die im Ver-  
laufe der im dritten Artikel dieser Reihe  
beschriebenen Modellversuche beobach-  
tet wurde.

Die Fortsetzung der beiden Beiträge:  
«Modelluntersuchung für den Bau des  
Pavillons» und «Konstruktion des Pavil-  
lons in vorgespanntem Beton» folgt in der  
nächsten Ausgabe Nr. 8, August 1959.

<sup>9</sup> K. Girkmann, Flächentragwerke, Springer  
Wien, 4. Auflage, 1956, S. 516-529.

<sup>10</sup> A. Ralston, On the problem of buckling  
of a hyperbolic paraboloidal shell loaded  
by its own weight, J. Math. Phys. 35,  
53-59, 1956.