

# Traînée aérodynamique d'un métro à grande vitesse dans un tunnel étroit

Autor(en): **Flatt, René**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Ingénieurs et architectes suisses**

Band (Jahr): **120 (1994)**

Heft 9

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-78312>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Traînée aérodynamique d'un train dans un tunnel étroit

Par René Flatt,  
ing. dipl. EPFL-SIA  
EPFL - DME  
1015 Lausanne

Le projet *Swissmetro*, dont il souvent été question dans nos colonnes depuis 1988, reprend une idée traitée depuis bien plus de 20 ans dans la littérature technique, soit la circulation en tunnel sous vide plus ou moins poussé. Dans l'esprit des promoteurs, il s'agissait de bénéficier de l'importante diminution de la résistance aérodynamique liée à la raréfaction de l'air, telle que la connaissent les avions volant à haute altitude (la valeur de la pression choisie pour le tunnel de *Swissmetro* correspond à celle de l'altitude de croisière de Concorde). L'analogie s'arrête là. En effet, l'écoulement aérodynamique autour d'un avion volant en atmosphère libre n'a rien de commun avec celui entourant un véhicule circulant - même à vitesse largement subsonique dans un tube étroit. La caractéristique fondamentale sur laquelle est édifié le projet *Swissmetro*, soit une faible résistance aérodynamique à l'avancement, est encore largement inexplorée. L'article qui suit se veut une contribution au défrichage de ce nouveau terrain d'études. Son auteur, spécialiste de la mécanique des fluides à l'EPFL propose une méthode simplifiée permettant une approche paramétrique de ce problème capital avant que l'on mette en oeuvre les moyens lourds d'analyse et de calcul nécessaires à l'étude de détail du projet.

Nous avons décidé de publier ce travail, malgré ses limites dont l'auteur est parfaitement conscient; ayant été parmi les premiers à signaler le caractère aléatoire des hypothèses des promoteurs quant à l'aérodynamique, nous leur indiquons une voie possible dans laquelle orienter leurs démarches exploratoires.

Jean-Pierre Weibel,  
ing. dipl. EPFZ en aéronautique,  
rédacteur en chef

L'écoulement d'air raréfié ( $p=0,05$  bar) compressible et instationnaire, induit par l'avance à haute vitesse (correspondant à un nombre de Mach  $\approx 0,3$ ) d'un train du type *Swissmetro* dans un tunnel très étroit, est fort complexe. Pourtant, grâce à deux changements de référentiels (mobiles), l'un lié au métro, l'autre au choc normal (qui devance le métro à une vitesse absolue d'environ 1,2 fois celle du son), il est possible de ramener le problème à l'étude d'écoulements stationnaires et unidimensionnels. Traité par des techniques d'analyse particulières émanant de la *dynamique des gaz*, ce type d'écoulement donne lieu à des calculs simples et rapides (même exécutables sur des calculateurs programmables). Une telle approche est particulièrement utile lors de préétudes, permettant d'analyser dans des délais relativement courts l'influence des paramètres principaux.

## Nomenclature

$a$	$= \sqrt{\gamma RT}$	vitesse du son
$a_L, a_L^{(m)}, a_L^{(s)}$		vitesse de Laval, rel. (10)
$A$		section fluide
$A_a$	$= \frac{\pi}{4} (D_t^2 - D_m^2)$	section de l'espace annulaire
$c$		vitesse absolue du fluide (N. B.: dans le référentiel absolu $w=c$ )
$D, D^*$		diamètre, - équivalent, rel. (38)
$E$	$= (D_t - D_m)/2$	espace annulaire
$\dot{E}$		puissance de propulsion
$f$	$= \frac{\tau_0}{\rho w^2/2}$	facteur de frottement (à la paroi)
$F$		force
$F_p$		traînée de pression
$h$		enthalpie massique
$l$		dynamique, rel. (45)
$K_\theta$	$= \sqrt{\gamma \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma+1)}}$	facteur de normalisation, rel. (24)
$K_x$	$= \sqrt{\gamma \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}$	facteur de normalisation, rel. (19)
$L$	$= y_5 - y_4$	longueur de l'espace annulaire (fig. 7 et 10)
$La, Lu, Lw$	$= c/a_L, u/a_L, w/a_L$	nombre de Laval
$\dot{M}, \dot{M}_a^{(m)}$		débit-masse, - pariétal (vu dans le référentiel <i>métro</i> )
$Ma, Mu, Mw$	$= c/a, u/a, w/a$	nombre de Mach
$p$		pression
$r$		rayon, coordonnée radiale (fig. 7)
$R$	$= \frac{p}{\rho RT}$	constante des gaz
$t$		temps
$T$		température absolue
$u_m$		vitesse absolue du métro = vitesse d'entraînement du référentiel <i>métro</i>
$u_s$		vitesse absolue du choc normal = vitesse d'entraînement du référentiel <i>choc</i>
$V$		volume, cylindrée
$w$		vitesse relative (N. B.: dans le référentiel absolu $w=c$ )
$x$		abscisse absolue (le long du tunnel)
$y$		abscisse relative (fig. 7)

# néto à grande vitesse

- $\gamma$  =  $c_2/a_1$
- $\varepsilon$  =  $A_d/A_t = 1 - (D_m/D_t)^2$
- $\theta$  débit-masse adimensionnel de 1<sup>ère</sup> espèce (FDG), rel. (24)
- $\varkappa$  =  $C_p/C_v$  rapport des chaleurs spécifiques à  $p$  et  $v$  constants
- $\pi$  rapport de pressions
- $\rho$  densité (masse volumique)
- $\sigma$  dynalpie adimensionnelle, rel. (47) et (48)
- $\tau_0$  =  $f \left( \frac{\rho w^2}{2} \right)$  contrainte tangentielle (de frottement) à la paroi
- $\varphi$  =  $dF_{0m}/dF_0$ , rel. (36)
- $\chi$  débit-masse adimensionnel de 2<sup>e</sup> espèce (FDG), rel. (19)

- $(\dots)_a$  espace annulaire
- $(\dots)_c$  état thermodynamique total dans le référentiel absolu (ex.:  $h_c = h + c^2/2$ )
- $(\dots)_m$  néto
- $(\dots)_t$  tunnel
- $(\dots)_w$  état thermodynamique "total-relatif" (ex.:  $h_w = h + w^2/2$ )
- $(\dots)_0$  à la paroi
- $(\dots)_1$  à  $(\dots)_6$  sections fluides ① à ⑥ (fig. 5 et 10)
- $(\dots)^{(m)}$ ,  $(\dots)^{(mm)}$  dans le référentiel néto
- $(\dots)^{(s)}$ ,  $(\dots)^{(ss)}$  dans le référentiel choc
- $f(\dots)$  fonction de ...

## 1. Introduction

La problématique de trains à haute vitesse circulant à l'air libre, ainsi que dans des confinements tels que *tunnels* ou *tubes* (de tels trains sont plus communément dénommés *métros*), a déjà fait l'objet d'études très approfondies dans les années fin 60 - début 70, notamment aux Etats-Unis. L'ouvrage [1]<sup>1</sup> est une remarquable présentation des divers phénomènes aérodynamiques relatifs à ce domaine d'application (encore peu exploité) de la *mécanique des fluides compressibles*. Un certain renouveau d'intérêt est apparu en Suisse avec le projet ambitieux (jugé probablement à tort d'un *peu fou* par certains !...), d'un système de transport inter-villes à haute vitesse, appelé *Swissmetro*, prévu pour le début du siècle prochain. La présente étude est purement *technique*, et n'aborde pas les problèmes *socio-économiques*.

Le projet *Swissmetro*, exposé au public lors de la *Journée nationale Swissmetro* (25/26 mars 1993) [2] organisée à l'EPFL, comporte plusieurs volets, dont l'un concerne principalement les *problèmes aérodynamiques* (objet de la présente étude).

Contrairement à [1], qui traite aussi d'autres possibilités (véhicules à coussin d'air, propulsion pneumatique, etc.), la présente étude est plus *limitée* dans le sens qu'elle ne cherche qu'à évaluer la *traînée maximale* d'un néto, confiné dans un tunnel étroit maintenu en dépression. Cette étude présente par contre l'*analyse détaillée* (facilement programmable, même sur une

<sup>1</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

simple calculatrice de poche), conduisant à la *solution numérique* du problème.

Du fait de la très grande vitesse de croisière des rames ( $u_m = 370 \text{ km/h} \approx 103 \text{ m/s}$ , ce qui correspond à un nombre de Mach d'environ 0,3) d'une part, et du petit espace annulaire  $E$  ( $= (D_t - D_m)/2 = 0,2 \text{ m}$ , fig. 1) d'autre part, un certain nombre de phénomènes aérodynamiques peu courants sont présents. Dans ces conditions il n'est pas indiqué d'évaluer la traînée à l'aide de la formule classique

$$F = K A_m \frac{\rho u_m^2}{2} \quad (1)$$

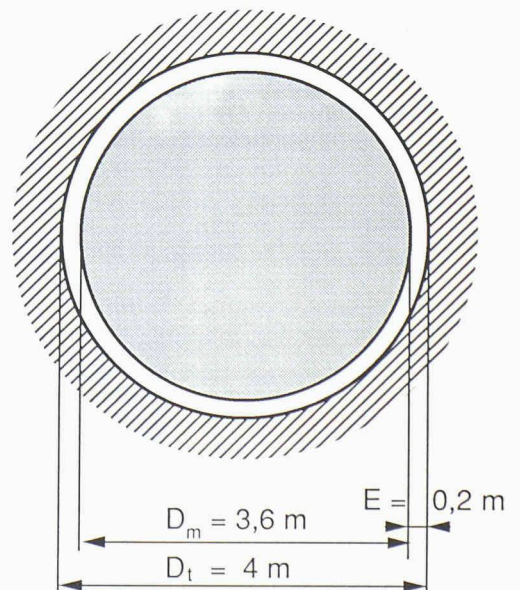


Fig. 1. - Coupe transversale simplifiée du tunnel et du métro

dans laquelle  $K$  est un facteur dont la valeur ne devrait en principe varier que relativement peu, pour une configuration géométrique donnée. Pour le Swissmetro il convient de séparer la traînée (totale)  $F$  en deux contributions:

$$F = F_p + F_{0m} \quad (2)$$

où  $F_p$  = traînée de pression et  
 $F_{0m}$  = traînée de frottement.

Comme nous le verrons plus loin, l'un et l'autre de ces deux termes sont régis par des lois physiques ne convenant pas à l'expression (1).

Le fluide considéré dans l'analyse des §4. à 8. est un "gaz parfait" ( $p = \rho RT$  et  $\alpha = C_p/C_v = \text{const}$ ).

## 2. Description qualitative de l'écoulement

### 2.1 Effet de piston pour un cylindre court

Commençons par considérer le cas d'un piston étanche, se déplaçant à faible vitesse (comparée à la vitesse du son) dans un cylindre de longueur modérée,  $x(t)$  (fig. 2).

L'infinité d'ondes de compression générée par l'avance du piston, ainsi que leurs réflexions successives (sur le fond du cylindre, ainsi que sur le piston lui-même), ont pour effet d'égaliser quasi instantanément la pression sur l'ensemble du cylindre. En *thermodynamique* cela s'exprime par la *relation isentrope*

$$p V^\alpha = \text{const} \quad (3)$$

où  $V = A x$  (fig. 2) et  $A$  = section du cylindre.

On voit que lorsque  $x$  diminue, la pression  $p$  tend rapidement vers de très grandes valeurs.

Imaginons maintenant que le piston présente un certain *jeu* avec le cylindre (fig. 3). Le débit

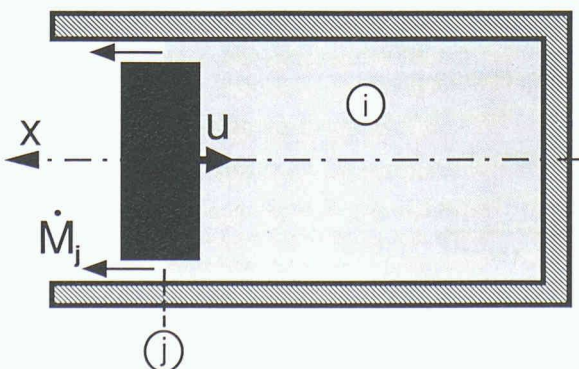


Fig. 3. – Débit  $\dot{M}_j$  limité par le blocage sonique ( $Ma_j=1$ )

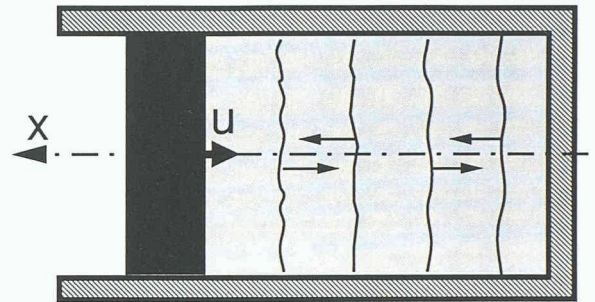


Fig. 2. – Jeu d'ondes dans un cylindre court.  $u$  = vitesse du piston

d'air  $\dot{M}_j$  pouvant s'échapper par ce jeu réduit quelque peu l'augmentation de pression, mais il est *limité* par le phénomène du *blocage sonique*.

Ce dernier est caractérisé par le fait qu'en (j) on a  $Ma_j \leq 1$ , ce qui conduit à la relation

$$\dot{M}_j \leq K_\theta \left( \frac{p A_j}{\sqrt{R T_j}} \right) \quad (4)$$

$$\text{avec } K_\theta = \sqrt{\alpha} \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha+1)}}$$

On voit facilement que si l'avance du piston est suffisamment rapide, le débit  $\dot{M}_j$  est insuffisant pour empêcher la montée en pression de l'air dans le cylindre,  $p_j(t)$ .

### 2.2 Effet de piston partiel pour un tunnel long

Transposons les phénomènes décrits au §2.1 au cas d'une rame de Swissmetro relativement proche d'une gare (dont les sas sont admis fermés), et s'approchant de cette gare à grande vitesse. On voit qu'il est indispensable de prévoir un *tunnel de by-pass aérodynamique* (fig. 4), permettant à la colonne d'air (mise en mouvement par le choc), de contourner le tronçon fermé par les sas, et de lui éviter ainsi une décélération, créatrice de réflexions d'ondes de compression (qui remonteraient le tunnel à contre-courant). Le jeu de va-et-vient de ces ondes entre le sas en amont de la gare et le métro provoquerait une augmentation de la pression sur l'avant de la rame telle, que la traînée de pression  $F_p$  prendrait une valeur inacceptable.

Même sans tenir compte des ondes réfléchies, l'écoulement d'air généré par le métro est très complexe, notamment parce qu'il est *instationnaire*. La *partie principale* de l'air est refoulée vers l'avant (dans le sens de marche), à une

vitesse quelque peu inférieure à celle du métro ( $c_2 \approx 0,9 u_m$ , fig. 5). Appelons *débit refoulé* le débit correspondant à  $A_t \rho_2 c_2$ . (Ce phénomène du *souffle* balayant le quai d'une station, avant l'arrivée d'une rame de métro, est bien connu).

Lors de la phase d'accélération du métro (allant de l'arrêt jusqu'à sa vitesse de croisière  $u_m$ ), les ondes générées devancent le train (puisqu'elles se déplacent relativement à l'air, lui-même en mouvement, à la vitesse du son,  $a = \sqrt{\gamma RT}$ , et finissent par s'accumuler en formant un *choc normal*, localisé à une distance du métro supérieure au double de la distance parcourue par celui-ci. En négligeant l'effet dissipatif (créateur d'entropie, en langage de thermodynamicien) du frottement le long de la paroi du tunnel, on obtient l'égalité des pressions  $p_3 = p_2$  (fig. 5). En réalité on a  $p_2 < p_3$ , pour autant qu'il n'y ait pas *cumul de surpressions par l'effet de réflexions d'ondes* (par exemple sur le sas fermé de la gare vers laquelle le métro se dirige).

La fig. 6 montre un tel cumul. Pour de petites surpressions  $\Delta p$  («  $p_j$  »), on aurait

$$p_j = p_i + \underline{1} \Delta p \text{ et } p_k = p_j + 1 \Delta p = p_i + \underline{2} \Delta p$$

### 2.3 Ecoulement pariétal

Une *partie secondaire* d'air, que nous désignerons par *débit pariétal*, s'engouffre dans l'espace annulaire (compris entre le tunnel et le métro, fig. 1). Cet espace, que nous assimilerons à un anneau de révolution d'épaisseur constante  $E (= (D_t - D_m)/2)$ , présente une section fluide très petite ( $A_a = \pi/4 \cdot (D_t^2 - D_m^2) = 2,4 \text{ m}^2$ ), soit ~20% de la section du tunnel, pour une longueur du métro d'environ 200 m. Il en

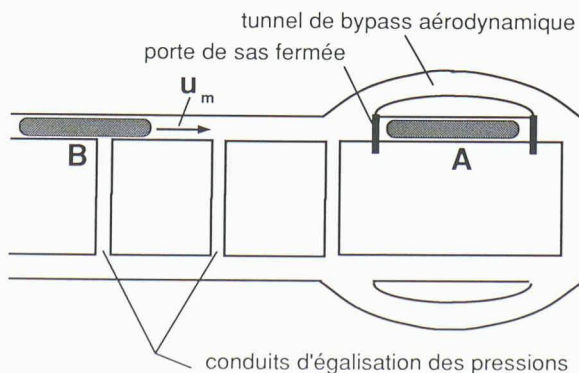


Fig. 4. – Scénario montrant un train (A) à l'arrêt, et un train (B) à pleine vitesse ( $u_m$ ), s'approchant de A

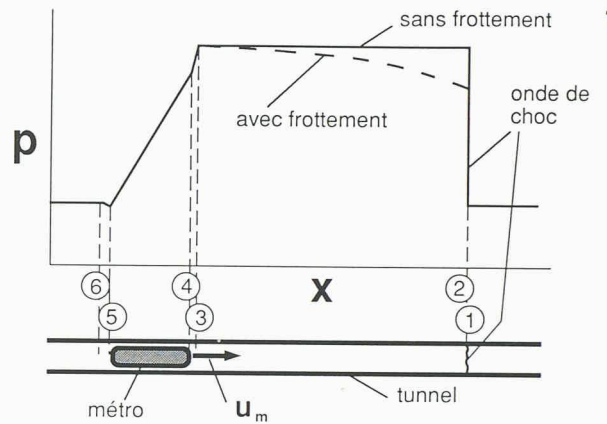


Fig. 5. – Profil de pression approximatif, pour un temps fixé, lorsque le train a atteint sa vitesse de croisière ( $u_m = 103 \text{ m/s}$ )

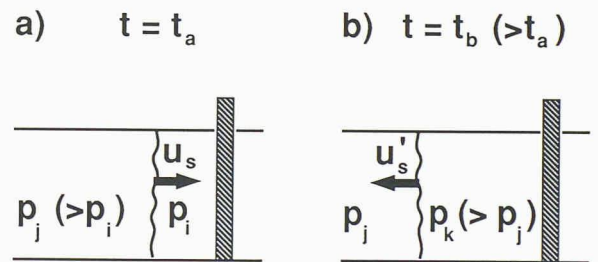


Fig. 6. – Augmentation de pression au passage d'une onde réfléchi sur une paroi a) avant, b) après la réflexion

résulte un débit pariétal  $\dot{M}_a^{(m)}$  de beaucoup inférieur au *débit refoulé* (décrit au §2.2). Ce débit pariétal joue toutefois un rôle important dans le sens qu'il est directement lié à la *trainée de frottement*  $F_{0m}$ , et qu'il contribue (indirectement) à diminuer la *trainée de pression*  $F_p$ . S'il n'y avait pas de débit pariétal, on aurait un effet de piston "pur". Une des difficultés du calcul consistera à évaluer correctement ce débit pariétal.

L'écoulement pariétal *relatif*, vu depuis le référentiel *métro*, va de l'avant (section ④, fig. 7) vers l'arrière (section ⑤, fig. 7) de la rame, donc dans le *même sens* (relatif au métro) que la paroi du tunnel. L'espace annulaire étant très étroit ( $\epsilon = A_a/A_t = (D_t^2 - D_m^2)/D_t^2 = 0,19 \ll 1$ ), cet écoulement est essentiellement régi par la différence de pression  $p_4 - p_5 (> 0)$ , due à l'effet de piston partiel décrit au §2.2.

Cet écoulement relatif (au métro) présente les particularités suivantes:

- a) il peut être considéré comme stationnaire;
- b) la compressibilité joue un rôle non négligeable

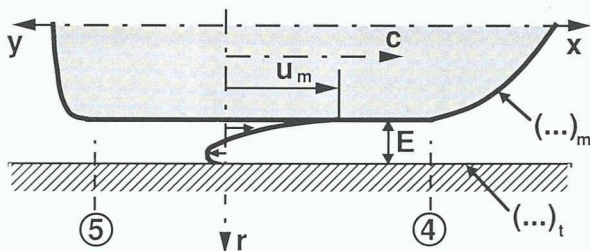


Fig. 7. - Esquisse de l'écoulement pariétal à travers l'espace annulaire, avec profil de la vitesse absolue  $c(r)$

ble, de sorte qu'une certaine analogie avec l'écoulement du type *Couette turbulent* (fig. 8), traité dans [3], n'est valable que par tranches ( $dx$ );

- c) s'il n'y avait pas de *paroi mobile* (celle du tunnel (!), puisque nous considérons l'écoulement vu depuis le métro), le problème serait classique (cf. par ex. [4], chap. 6): écoulement adiabate, stationnaire et sans apport de travail à travers un conduit à section constante. En *dynamique des gaz* on établit les relations suivantes pour le cas d'un tuyau de diamètre  $D$ :

$$T_c(x) = \text{const}$$

(où  $T_c = T + \frac{c^2}{2 \frac{\alpha}{\alpha-1} R}$ , température totale)

$$La_4^2 - La_5^2 - \ln \left( \frac{La_5^2}{La_4^2} \right) = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \frac{4f |x_5 - x_4|}{D}$$

avec  $La = \frac{c}{a_L}$  nombre de Laval

$$a_L = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+1} R T_c} \text{ vitesse de Laval}$$

$$f = \frac{\tau_0}{\rho c^2 / 2} \text{ facteur de frottement (à la paroi)}$$

Mais la présence de la paroi mobile implique un *apport de travail* non négligeable, qui résulte en une température *totale-relative* (définie en plus de détails au §4.), fonction croissante de  $y$

$$T_w^{(m)} = T + \frac{w^{(m)2}}{2 \frac{\alpha}{\alpha-1} R} = F(y) \neq \text{const}$$

( $y$  étant l'abscisse relative, représentée sur la fig. 7, et orientée dans le sens opposé à l'axe absolu  $x$ ). Nos calculs montreront que

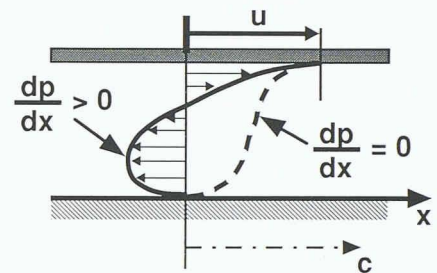


Fig. 8. - Écoulement du type *Couette turbulent* entre deux plaques planes

l'on peut s'attendre à une élévation de la température totale-relative  $T_{5w}^{(m)} - T_{4w}^{(m)}$  d'environ 15 K;

- d) a priori on doit compter avec la possibilité d'un *blocage sonique* en ⑤. (Nos calculs montreront toutefois que cela ne se produira pas, pour un train d'une longueur de 200 m, et en excluant le cumul de surpressions par l'effet de réflexion d'ondes).

### 3. Modélisations mathématiques

Comme nous nous contentons d'une détermination approximative de la traînée, l'approche *1D* (unidimensionnelle) est suffisante. Elle présente le double avantage par rapport aux méthodes modernes de la *CFD* (Computational Fluid Dynamics), d'être beaucoup plus simple à mettre en oeuvre et de demander des temps de calculs pratiquement négligeables. (Le développement d'un code de calcul du type *CFD* requerrait probablement 1 à 3 *personne \* année*!). Il s'ajoute à cela que moyennant quelques hypothèses simplificatrices fort plausibles et l'utilisation de deux *référentiels mobiles* idoines (l'un attaché au métro, l'autre au choc normal), on peut traiter le problème par le biais d'écoulements stationnaires. Une telle analyse est incomparablement plus simple qu'une analyse par *CFD* d'un écoulement *2D* (voire *3D*), et par surcroît, *instationnaire* !

La modélisation *1D* permet aux divers groupes de travail s'occupant des domaines particuliers (génie civil, infrastructures, sustentation et propulsion, aérodynamique, sécurité, aspects socio-économiques, etc.) du projet *Swissmetro* de réajuster les paramètres interdépendants (tels que le diamètre du tunnel, les conduits d'égalisation des pressions, les tunnels de by-pass aérodynamique des gares, etc.) dans des

délais raisonnables, dans le but de converger aussi rapidement que possible vers une préétude apte à convaincre les milieux politiques du bien-fondé de l'entreprise Swissmetro.

#### 4. Calcul de l'effet de piston partiel

Commençons par considérer l'effet piston *pur* (de débit pariétal  $\dot{M}_a^{(m)}=0$ ), décrit qualitativement au §2.1. En postulant que cet écoulement est isentrope, unidimensionnel et adiabate, et en nous intéressant uniquement au choc normal formé par l'ensemble des ondes de compression émises par le métro pendant sa phase d'accélération, la connaissance détaillée de cette phase (par exemple sous la forme de la vitesse du métro en fonction du temps), est superflue. En effet elle n'a aucune influence sur l'intensité du choc, ni sur la vitesse de propagation  $u_s$  de ce dernier.

L'approche la plus simple consiste dès lors, à admettre la fiction d'une *accélération instantanée* de 0 à  $u_m$  du métro.

La fig. 9-a) montre un tel cas. Relevons que l'on a un état thermodynamique uniforme de ② à ③, et que  $c_2=u_m$ .

Passons au cas analogue, mais pour lequel  $\dot{M}_a^{(m)} \neq 0$  (fig. 9-b)). Nous admettrons de manière heuristique (donc sans preuve à l'appui) que ce cas, où l'on a également une phase d'accélération *instantanée* du métro, est suffisamment représentatif du cas d'écoulement engendré par le Swissmetro (qui nécessite évidemment une phase d'accélération prenant un certain laps de temps, de l'ordre de 1 à 2 minutes).

Le problème du choc normal est traité analytiquement de la manière la plus simple en considérant l'écoulement *relatif* (au choc), puisque dans ce référentiel *relatif choc* (que nous indiquerons selon le besoin par (...) <sup>(s)</sup>, respectivement (...) <sup>(ss)</sup>), le choc lui-même, ainsi que les écoulements de part et d'autre, sont *stationnaires*. La *vitesse d'entraînement* de ce référentiel étant  $u_s$  (a priori inconnue), la loi de la cinématique dite de la *composition des vitesses* donne

$$w_1^{(s)} = c_1 - u_s = 0 - u_s = -u_s \quad (5)$$

$$\text{et } w_2^{(s)} = c_2 - u_s = c_2 + w_1^{(s)} \quad (6)$$

N. B.:  $w_1^{(s)}$  et  $w_2^{(s)}$  doivent être considérés comme des valeurs algébriques, ici. On a donc  $w_1^{(s)} < 0$  et  $w_2^{(s)} < 0$  !

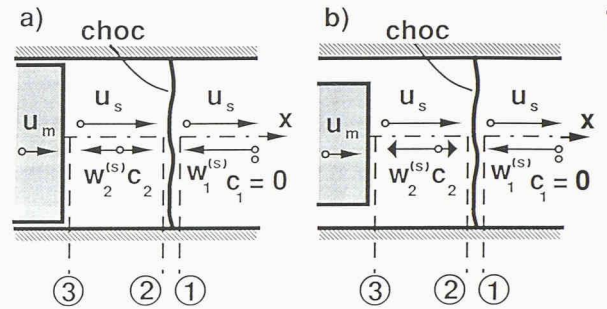


Fig. 9. – Esquisse du choc normal généré par l'accélération instantanée du métro. a) Cas avec  $\dot{M}_a^{(m)}=0$  ( $c_2=u_m$ ); b) cas avec  $\dot{M}_a^{(m)} \neq 0$  ( $c_2 < u_m$ )

$c_2$  devra être déterminé de manière itérative, en concordance avec le calcul de l'écoulement pariétal qui sera traité au §6.

$$\text{Soient } a = \sqrt{\alpha RT} \quad \text{la vitesse de son} \quad (7)$$

$$\text{et } Mw^{(s)} = \frac{w^{(s)}}{a} \quad (8)$$

le nombre de Mach relatif correspondant.

Par des considérations classiques de la *dynamique des gaz* [4], on en déduit la relation donnant la température *totale-relative*

$$T_w^{(s)} = T + \frac{w^{(s)2}}{2 \frac{\alpha}{\alpha-1} R} = T \left( 1 + \frac{\alpha-1}{2} Mw^{(s)2} \right) \quad (9)$$

En introduisant les notions de *vitesse de Laval relative*

$$a_L^{(s)} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+1} RT_w^{(s)}} \quad (10)$$

$$\text{et de } Lw^{(ss)} = \frac{w^{(s)}}{a_L^{(s)}} \quad (11)$$

nombre de Laval (relatif),

la relation de Prandtl (pour chocs normaux) s'écrit

$$Lw_1^{(ss)} \cdot Lw_2^{(ss)} = 1 \quad (12)$$

Remarques:

- 1) La notation (...) <sup>(ss)</sup> est nécessaire, afin de marquer la différence avec

$$Lw^{(s)} = \frac{w^{(s)}}{a_L} \quad \text{où } a_L = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+1} RT_c}$$

$T_c$  étant la température totale *absolue*.

- 2) L'écoulement relatif étant adiabate, stationnaire et sans transfert de travail,

$$\text{on a } T_{2w}^{(s)} = T_{1w}^{(s)} \quad (13)$$

$$\text{et (par (10)) } a_{2L}^{(s)} = a_{1L}^{(s)} \quad (14)$$

En tenant compte de (6) et (14), on peut récrire (12) sous la forme

$$\frac{w_1^{(s)}}{a_{1L}^{(s)}} \cdot \frac{c_2 + w_1^{(s)}}{a_{1L}^{(s)}} = 1$$

Multiplions membre à membre par  $\left(\frac{a_{1L}^{(s)}}{a_1}\right)^2$  et

utilisons (7), (9) et (10)

$$\frac{w_1^{(s)}}{a_1} \left( \frac{c_2}{a_1} + \frac{w_1^{(s)}}{a_1} \right) = \frac{a_{1L}^{(s)2}}{a_1^2} =$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1} \frac{RT_{1w}^{(s)}}{RT_1} = \frac{2}{\alpha+1} \left( 1 + \frac{\alpha-1}{2} Mw_1^{(s)2} \right)$$

Remarquons que  $\frac{w_1^{(s)}}{a_1} = Mw_1^{(s)}$

et posons  $\frac{c_2}{a_1} = \gamma$

$$\gamma Mw_1^{(s)} + Mw_1^{(s)2} = \frac{2}{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} Mw_1^{(s)2}$$

Multiplions par  $\frac{\alpha+1}{2}$  et réarrangeons

$$Mw_1^{(s)2} + 2 \left( \frac{\alpha+1}{4} \gamma \right) Mw_1^{(s)} - 1 = 0$$

dont les solutions mathématiques sont

$$Mw_1^{(s)} = - \left( \frac{\alpha+1}{4} \gamma \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha+1}{4} \gamma \right)^2 + 1}$$

Plus haut nous avons relevé que  $w_1^{(s)} < 0$ . Ceci s'applique aussi à  $Mw_1^{(s)}$  et nous permet d'éliminer la solution *supérieure*. La solution *physique* est donc

$$\begin{aligned} -Mw_1^{(s)} &= |Mw_1^{(s)}| = \\ &= \left( \frac{\alpha+1}{4} \gamma \right) + \sqrt{\left( \frac{\alpha+1}{4} \gamma \right)^2 + 1} \quad (15) \end{aligned}$$

N. B.: Dans la suite de ce §4. nous laisserons tomber le signe *valeur absolue* pour  $Mw^{(s)}$  et  $Lw^{(ss)}$ , ce qui revient en d'autres termes à passer de l'axe absolu  $x$  à l'axe relatif  $y$  (orienté dans le sens opposé à  $x$ , fig. 7).

En *dynamique des gaz* [4] on établit la relation

$$Lw = \sqrt{\frac{\frac{\alpha+1}{2}}{1 + \frac{\alpha-1}{2} Mw^2}} \cdot Mw \quad (16)$$

En admettant connue la valeur de  $\gamma$ , (15) et (16) permettent alors de calculer

$$Lw_1^{(ss)} = \frac{w_1^{(s)}}{a_{1L}^{(s)}} = \dots \quad (17)$$

(12) donne ensuite

$$Lw_2^{(ss)} = \frac{w_2^{(s)}}{a_{2L}^{(s)}} = \frac{1}{Lw_1^{(ss)}} = \dots \quad (18)$$

En appliquant la procédure de calcul décrite dans [5], on détermine ensuite les *FDG* (fonctions de la dynamique des gaz)  $\chi_1^{(s)}$  et  $\chi_2^{(s)}$ , définis comme suit

$$\chi = \frac{\dot{M}}{K_\chi \left( \frac{A \rho}{\sqrt{RT_w}} \right)} = \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)^{-1} \frac{Lw}{\left( 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} Lw^2 \right)} \quad (19)$$

$$\text{avec } K_\chi \sqrt{\alpha \left( \frac{\alpha+1}{2} \right)}$$

puis, par l'équation de continuité adimensionnelle de 2<sup>e</sup> espèce [5]

$$\chi_2^{(s)} = \left( \frac{\sqrt{T_{2w}^{(s)}/T_{1w}^{(s)}}}{\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}} \right) \chi_1^{(s)} \quad \text{avec } \frac{A_2}{A_1} = 1 \quad (20)$$

Posons  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \pi_s$  et tenons compte de (13)

$$\pi_s = \frac{\chi_1^{(s)}}{\chi_2^{(s)}} = \dots \quad (21)$$

En vue du §5. nous déterminons encore

$$\tau_s = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_{2w}^{(s)}}{T_1/T_{1w}^{(s)}} \cdot \frac{T_{2w}^{(s)}}{T_{1w}^{(s)}}$$

Les *FDG* (cf. [4;5]) et (13) permettent d'en déduire l'expression

$$\tau_{(s)} = \frac{1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} Lw_2^{(ss)2}}{1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} Lw_1^{(ss)2}} \cdot 1 = \dots \quad (22)$$

(A suivre)