# Structures en béton: modèle de base et méthodes simplifiées du calcul des déformations des structures en béton selon les codes européens

Autor(en): **Favre, Renaud / Charif, Hazem**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Ingénieurs et architectes suisses**

Band (Jahr): **118 (1992)**

Heft 25

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-77807

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Structures en béton

## Modèle de base et méthodes simplifiées du calcul des déformations des structures en béton selon les codes européens

*Par Renaud Favre, professeur et Hazem Charif, ing. civil EPFL-SIA Dr ès sc. tech. IBAP-Béton armé et précontraint EPFL, 1015 Lausanne*

Le principal objectif de cet article est de présenter la relation moment–courbure, introduite dans le nouveau code modèle CEB–FIP 90 et indiquée également dans les grandes lignes, à l'annexe 4 de l'Eurocode 2. En effet, cette relation représente un modèle de base valable pour le cas de la flexion simple ou composée, permettant de prendre en compte l'effet de la fissuration, de l'armature et des effets différés (fluage et retrait). Par ailleurs, cette relation et les méthodes simplifiées pour le calcul des déformations qui en découlent, ont été développées pour la commission permanente V du CEB (Rapporteur M. Wicke), et ont été définitivement adoptées par l'assemblée générale du CEB à Paris, au mois de septembre 1990 en accord avec la FIP. Une étude paramétrique est également présentée afin de montrer l'influence de plusieurs paramètres sur les courbures en stade 1 ($\psi_1$), les courbures en stade 2–nu ($\psi_2$) et les courbures moyennes ($\psi_m$). De plus, différentes méthodes simplifiées pour le calcul des déformations seront présentées et discutées. Parmi elles, la méthode de la norme SIA 162 qui a été également adoptée pour le code modèle CEB–FIP 90.

### 1. Modèle de base pour la courbure moyenne

Actuellement, l'approche par courbure semble être la méthode la plus globale et la plus directe pour modéliser le comportement réel d'une structure en béton armé ou en béton précontraint en conditions de service. Cette approche permet non seulement de tenir compte de l'armature, de la fissuration et des effets différés, mais également de développer des méthodes simplifiées, facilitant l'estimation rapide du comportement d'une structure en béton.

La relation moment–courbure (fig. 1) a été longuement discutée et finalement acceptée et introduite par le CEB dans le nouveau code modèle CEB–FIP 1990, à paraître durant l'année 1992. Cette relation découle de nombreuses études expérimentales à partir desquelles une hypothèse fondamentale a été avancée: la contribution du béton tendu entre les fissures ($\Delta\psi_{ts}$) dans un élément principalement fléchi, diminue avec l'augmentation des sollicitations au-delà de celles correspondant au moment de fissuration réduit ($M_{r,réd}$). Pour des charges de service, cette diminution suit une loi hyperbolique représentant le comportement moyen de l'élément réel. Ainsi, $\Delta\psi_{ts}$ peut être exprimé comme suit:

$$\Delta\psi_{ts} = (\psi_{2r} - \psi_{1r}) \cdot \beta \cdot \frac{M_r}{M} \text{ pour } M > M_{r,réd} \qquad (1)$$

avec :

- $\psi_{1r}$ – courbure en stade 1 pour $M = M_r$ (section non fissurée)
- $\psi_{2r}$ – courbure en stade 2–nu pour $M = M_r$ (section totalement fissurée)
- $M$ – moment de flexion appliqué à la section
- $M_r$ – moment de fissuration:

$$M_r = W_1 \left( f_{ct} - \frac{N}{A_1} \right) \qquad (2)$$

- $W_1$ – module résistant en stade 1
- $A_1$ – aire de la section en stade 1
- $N$ – effort normal appliqué à la section
- $f_{ct}$ – résistance à la traction du béton
  - = 0,7 $f_{ctm}$ si des déformations locales doivent être considérées,
  - = $f_{ctm}$ si les effets d'une déformation globale doivent être considérés ($f_{ctm}$: résistance moyenne du béton à la traction);
- $M_{r,réd}$ – moment de fissuration réduit. Ce moment a été introduit par le professeur H. Rüsch [6][1] pour le calcul des flèches. Il est défini par l'intersection de l'hyperbole de la courbure moyenne ($\psi_m$) et de la droite définissant le stade 1. Pour la flexion simple (sans retrait):

$$M_{r,réd} = \sqrt{\beta} \cdot M_r \qquad (3)$$

- $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$
- $\beta_1$ – coefficient caractérisant la qualité d'adhérence acier–béton
  - $\beta_1$ = 1,0 pour barres à haute adhérence
  - = 0,5 pour barres lisses
- $\beta_2$ – coefficient représentant la nature et la durée du chargement (charges longue durée, cycle de charges):

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

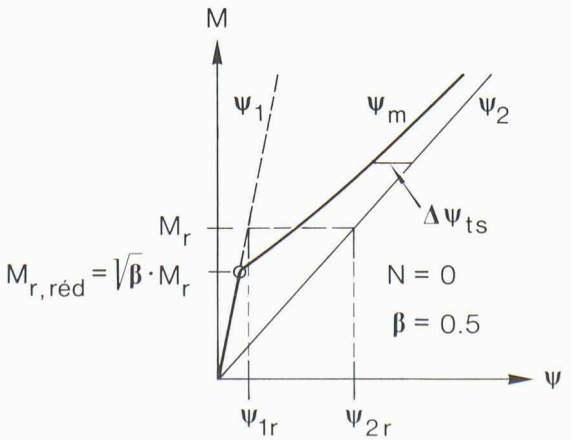



*Fig. 1(a). – Relation moment–courbure du CEB–FIP (flexion simple)*

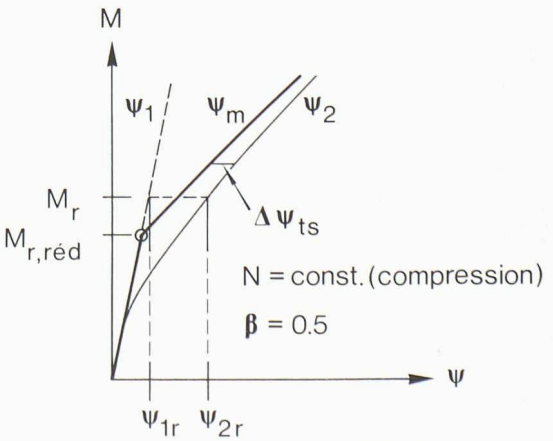



*Fig. 1(b). – Relation moment–courbure du CEB–FIP (flexion composée)*

$\beta_2$ = 0,8 pour le premier chargement
= 0,5 pour charge de longue durée ou un grand nombre de cycles de charge.

Dans le cas le plus fréquent, où l'armature est constituée de barres à haute adhérence et où la charge est de longue durée: $\beta = 0{,}5$.
Ainsi, la courbure due à la contribution du béton tendu entre les fissures *(tension stiffening)* est considérée comme la différence entre la courbure moyenne ($\psi_m$) et la courbure en stade 2–nu ($\psi_2$). De là, la courbure moyenne $\psi_m$ peut être exprimée comme suit:

$$\psi_m = \psi_2 - \Delta\psi_{ts}$$

$$\psi_m = \psi_2 - (\psi_{2r} - \psi_{1r}) \cdot \beta \cdot \frac{M_r}{M} \quad \text{pour } M > M_{r,\text{réd}} \qquad (4)$$

$$\psi_m = \psi_1 \quad \text{pour } M \leq M_{r,\text{réd}}$$

Considérons le cas de la flexion simple dans une section (fig. 2). Les courbures en stade 1 et 2–nu respectivement, sont des fonctions linéaires du moment $M$. Si l'on prend en compte l'effet de l'armature et les effets différés, ces courbures peuvent être exprimées en fonction de la courbure de base $\psi_c$:

$$\psi_c = \frac{M}{(EI)_c} \qquad (5)$$

$(EI)_c$ – rigidité flexionnelle de la section du béton seul.
Cela permettra d'introduire des coefficients de correction $\kappa$ qui sont indépendants des sollicitations. Ainsi, les courbures $\psi_1$ et $\psi_2$ qui représentent respectivement les limites inférieure et supérieure de la courbure moyenne, peuvent être exprimées comme suit:

– effet de l'armature seul:

$$\psi_1 = \psi_c \, \kappa_{s1} \qquad \psi_2 = \psi_c \, \kappa_{s2} \qquad (6)$$

– effet du fluage ($\varphi$ est le coefficient de fluage):

$$\psi_1 = \psi_c \cdot \kappa_{s1} \, \kappa_{\varphi 1} \cdot \varphi \qquad \psi_2 = \psi_c \cdot \kappa_{s2} \, \kappa_{\varphi 2} \cdot \varphi \qquad (7)$$

– effet d'un retrait uniforme $\varepsilon_{cs}$ ($d$ est la hauteur effective de la section):

$$\psi_1 = |\varepsilon_{cs}| \frac{\kappa_{cs1}}{d} \qquad \psi_2 = |\varepsilon_{cs}| \frac{\kappa_{cs2}}{d} \qquad (8)$$

Le développement détaillé de ces coefficients de correction, ainsi que leur représentation graphique sont donnés dans la référence [2]. Notons encore que dans le cas de la flexion simple, on peut écrire (équations 4):

$$\psi_{1r} = \psi_1 \frac{M_r}{M} \qquad \psi_{2r} = \psi_2 \frac{M_r}{M}$$

$$\psi_m = \psi_2 - (\psi_2 - \psi_1) \cdot \beta \left(\frac{M_r}{M}\right)^2 \qquad (9)$$

C'est sous cette forme que la relation moment–courbure est indiquée dans l'Eurocode 2 à l'annexe 4 [21].
Par ailleurs, à partir de la condition $\psi_1 = \psi_m$ qui représente l'intersection de l'hyperbole $\psi_m$ avec la droite $\psi_1$, on obtient la valeur du moment de fissuration réduit:

$$M_{r,\text{réd}} = \sqrt{\beta} \cdot M_r \qquad \text{(sans retrait).}$$

## 2. Etude paramétrique

Dans le but de montrer l'influence de plusieurs paramètres sur les courbures et en particulier la courbure moyenne, une étude paramétrique a été effectuée en variant plusieurs propriétés mécaniques et rhéologiques du béton, ainsi que le pourcentage de l'armature tendue ou comprimée. Une section rectangulaire de 300 mm de largeur et de 500 mm de hauteur, soumise à la flexion simple, a été choisie. Sur cette section on a varié les paramètres suivants:

– le coefficient de fluage ($\varphi$)
– la résistance à la traction ($f_{ct}$)
– le pourcentage d'armature tendue ($\rho = A_s/bd$)
– le rapport entre l'armature comprimée et celle tendue ($\rho' / \rho$)
– la déformation relative de retrait ($\varepsilon_{cs}$).

Les cinq figures suivantes (fig. 3 à 7) montrent l'influence sur les courbures de chacun des paramètres cités ci-dessus. Par ailleurs, puisque l'état limite ultime ne sera pas abordé ici, on a arrêté les courbes moment–courbure à une valeur du moment $M$ égales à 100 kNm, ce qui correspond à environ 80% de la valeur du moment ultime ($M_u$) calculé comme suit:

$$M_u = \chi_u \cdot d \cdot A_s \cdot f_y \qquad (10)$$

avec:

$$\chi_u = 1 - 0{,}514 \, \rho \frac{f_y}{f_c}$$

$\cong 0{,}9$ pour un acier S500

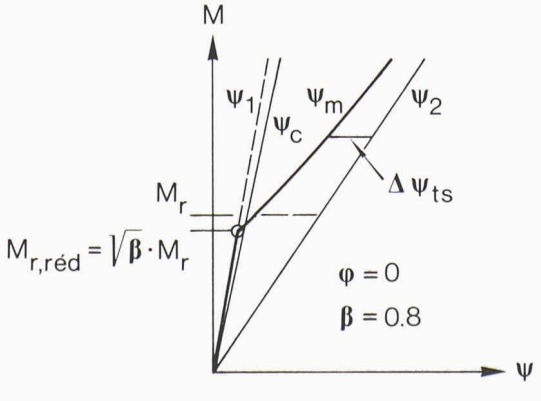



*Fig. 2(a). – Courbure moyenne instantanée (flexion simple)*

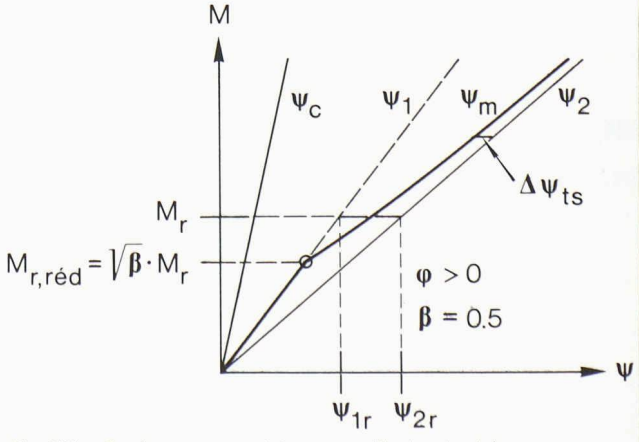



*Fig. 2(b). – Courbure moyenne à long terme (flexion simple)*

d – hauteur effective (statique) de la section
$A_s$ – aire de la section d'armature
$f_y$ – limite d'écoulement de l'acier (ici pour S500 → $f_y$ = 460 N/mm²).

Ainsi, pour $\rho$ = 0,5% et $d$ = 450 mm, $M_u$ devient égal à:

$$M_u = 0{,}9 \cdot 450 \cdot 675 \cdot 460$$
$$= 125{,}8 \text{ kNm}.$$

Signalons enfin que pour une valeur du moment de 100 kNm, la contrainte dans l'acier est égale à environ 366 N/mm².

Dans cette étude paramétrique, toutes les comparaisons seront basées sur les hypothèses suivantes:

- les dimensions de la section rectangulaire ne varient pas (300 × 500 mm)
- le coefficient $\beta$ = 0,5
- lorsqu'on varie un paramètre, les autres paramètres restent constants et prennent des valeurs de référence. Ces valeurs sont les suivantes:

| | |
|---|---|
| $d/h$ = 0,9 | $\rho$ = 0,5% |
| $\alpha = E_s/E_c$ = 200/30 = 6,67 | $\rho'/\rho$ = 0,0 |
| $\varphi$ = 2,5 | $\varepsilon_{cs}$ = 0,0‰ |
| $f_{ct}$ = 2,5 N/mm² | |

Dans ce qui suit on indiquera les variations de la valeur de la courbure moyenne en pour-cent, pour un niveau de sollicitation correspondant à $M$ = 60 kNm ($\sigma_s$ = 219 N/mm²).

Cette valeur du moment est environ égale à deux fois le moment de fissuration $M_r$.

*2.1 Influence du coefficient de fluage ($\varphi$)*
On a varié le coefficient de fluage comme suit:

$$\varphi = 1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 3{,}5.$$

Les autres paramètres sont restés constants comme mentionné ci-dessus. La figure 3 montre la relation moment–courbure pour ces trois valeurs de $\varphi$. En considérant $\varphi$ = 2,5 comme une valeur de référence (100%), les observations suivantes peuvent être mentionnées:

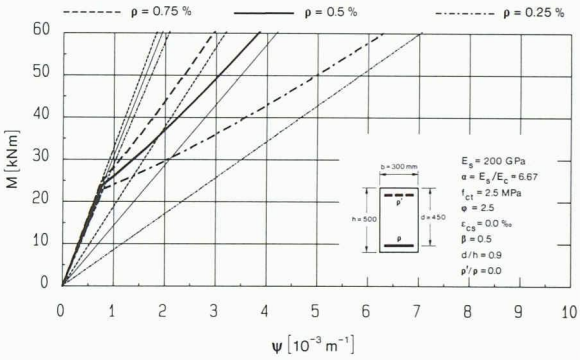



*Fig. 5. – Influence du pourcentage géométrique de l'armature tendue $\rho$ sur les courbures en stade 1, en stade 2–nu et sur la courbure moyenne*

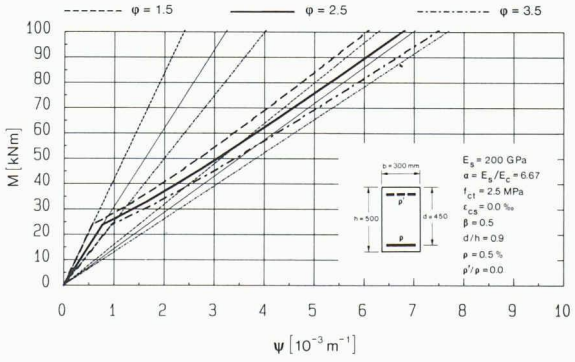



*Fig. 3. – Influence du coefficient de fluage $\varphi$ sur les courbures en stade 1, en stade 2–nu et sur la courbure moyenne*

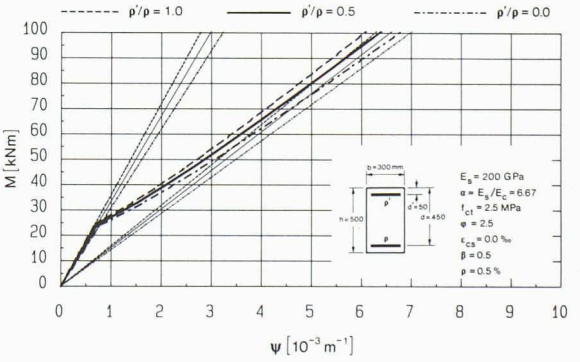



*Fig. 6. – Influence du rapport $\rho'/\rho$ (armature compression/traction) sur les courbures en stade 1, en stade 2–nu et sur la courbure moyenne*

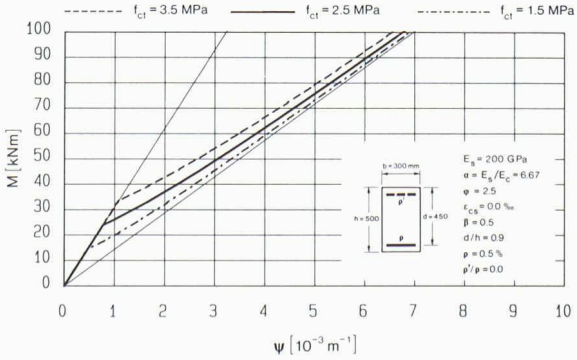



*Fig. 4. – Influence de la résistance à la traction du béton $f_{ct}$ sur la courbure moyenne*

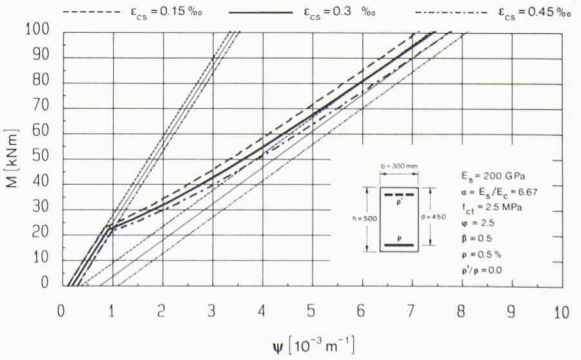



*Fig. 7. – Influence de la déformation relative de retrait $\varepsilon_{cs}$ sur les courbures en stade 1, en stade 2–nu et sur la courbure moyenne*

– en réduisant $\varphi$ de 40% (de 2,5 à 1,5), $\psi_m$ est diminuée d'environ 12%
– en augmentant $\varphi$ de 40% (de 2,5 à 3,5), $\psi_m$ est augmentée d'environ 12%.

Ainsi, le coefficient de fluage $\varphi$ a une influence limitée sur la courbure moyenne $\psi_m$ dans le cas où les moments fissurent la structure.

*2.2 Influence de la résistance à la traction ($f_{ct}$)*
On a varié la résistance à la traction comme suit:

$$f_{ct} = 1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 3{,}5 \text{ N/mm}^2.$$

Les autres paramètres sont restés constants. La figure 4 montre la relation moment–courbure pour les trois valeurs de $f_{ct}$. En prenant $f_{ct} = 2{,}5$ N/mm² comme une valeur de référence (100%), on peut constater que le niveau de sollicitation appliqué a une grande influence sur la courbure moyenne. Ainsi, pour un niveau de sollicitation proche de celui de la fissuration ($M$ = 35 kNm), on peut noter que:

– en augmentant $f_{ct}$ de 40% (de 2,5 à 3,5), $\psi_m$ est réduit d'environ 33%
– en réduisant $f_{ct}$ de 40% (de 2,5 à 1,5), $\psi_m$ est augmentée d'environ 22%.

Cependant, pour un niveau de sollicitation élevé ($M$ = 60 kNm), une variation de ± 40% de $f_{ct}$ n'engendre qu'une faible variation de $\psi_m$ de l'ordre de ± 7%.
Pour conclure, on peut dire que $f_{ct}$ a une grande influence sur $\psi_m$ seulement si le niveau de sollicitation est proche de celui de la fissuration.

*2.3 Influence du pourcentage d'armature tendue ($\rho$)*
On a varié le pourcentage de l'armature tendue $\rho$ comme suit:

$$\rho = 0{,}25 \quad 0{,}5 \quad 0{,}75\ \%.$$

Les autres paramètres sont restés constants. La figure 5 montre la relation moment–courbure pour les différentes valeurs de $\rho$. En prenant la valeur de $\rho$ = 0,5% comme valeur de référence (100%) et en prenant $M$ = 60 kNm, on peut constater que:

– en augmentant $\rho$ de 50% (de 0,5 à 0,75), $\psi_m$ est réduit d'environ 23%
– en diminuant $\rho$ de 50% (de 0,5 à 0,25), $\psi_m$ est augmentée d'environ 65%.

D'où la grande influence de $\rho$ sur la courbure moyenne $\psi_m$.

*2.4 Influence du rapport entre l'armature comprimée et tendue ($\rho'/\rho$)*
On a varié le rapport $\rho'/\rho$ comme suit:

$$\rho'/\rho = 0{,}0 \quad 0{,}5 \quad 1{,}0.$$

Les autres paramètres sont restés constants. La figure 6 montre la relation moment–courbure pour les trois valeurs de $\rho'/\rho$. En prenant la valeur de $\rho'/\rho$ = 0,5 comme une valeur de référence (100%), on constate que:

– en réduisant $\rho'/\rho$ de 100% (de 0,5 à 0,0), $\psi_m$ est augmentée d'environ 6%
– en augmentant $\rho'/\rho$ de 100% (de 0,5 à 1,0), $\psi_m$ est diminuée d'environ 5%.

Ainsi, on peut conclure que le rapport $\rho'/\rho$ a une faible influence sur la courbure moyenne.

*2.5 Influence de la déformation relative de retrait ($\varepsilon_{cs}$)*
On a varié la déformation relative de retrait $\varepsilon_{cs}$ comme suit:

$$\varepsilon_{cs} = 0{,}15 \quad 0{,}30 \quad 0{,}45\ ‰.$$

Les autres paramètres sont restés constants. La figure 7 montre la relation moment–courbure pour les différentes valeurs de $\varepsilon_{cs}$. Si l'on considère la valeur de $\varepsilon_{cs}$ = 0,3 ‰ comme étant une valeur de référence (100%), on peut constater pour $M$ = 60 kNm que:

– en augmentant $\varepsilon_{cs}$ de 50% (de 0,3 à 0,45‰), $\psi_m$ augmente de 7%
– en diminuant $\varepsilon_{cs}$ de 50% (de 0,30 à 0,15‰), $\psi_m$ diminue de 6%.

Ainsi, on peut dire que la déformation de retrait a une petite influence sur la courbure moyenne $\psi_m$ lorsque la structure est fissurée.

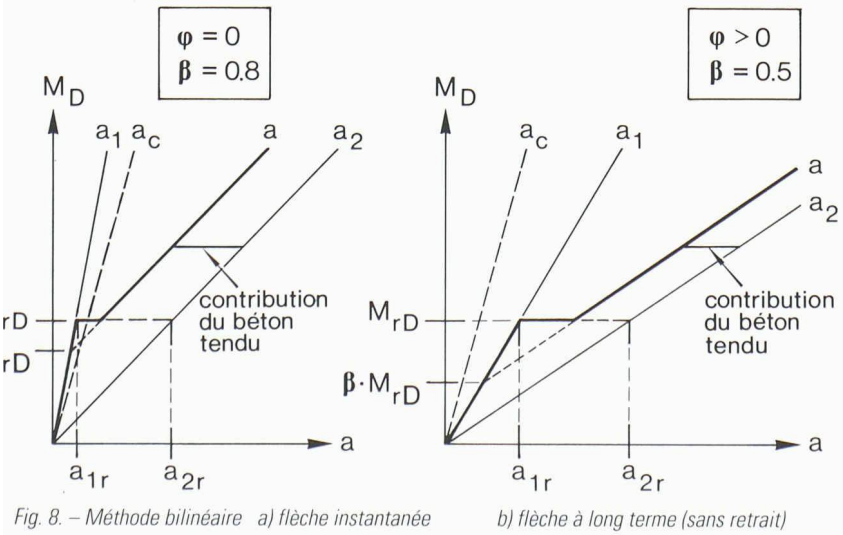



*Fig. 8. – Méthode bilinéaire a) flèche instantanée b) flèche à long terme (sans retrait)*

## 3. Méthodes simplifiées pour le calcul des flèches

*3.1 Méthode bi-linéaire*
La méthode bi-linéaire est limitée au calcul des flèches. Elle découle directement de la relation moment–courbure développée dans [2] et permet une estimation rapide de la flèche d'un élément principalement fléchi.
Il ne faut pas oublier que dans le calcul de la flèche, il y a toujours l'influence de zones de la structure, voisines des moments nuls, qui travaillent en stade 1 (zones non fissurées).
Ainsi, la contribution globale du béton tendu pour le calcul de la flèche reste constante (fig. 8), et on peut écrire:

$$a = a_2 - (a_{2r} - a_{1r}) \cdot \beta \qquad (11)$$

avec:
$a$ – la flèche probable
$a_1$, $a_2$ – les flèches en stade 1 et 2–nu, respectivement pour le cas de la flexion simple

$a_{1r}$, $a_{2r}$ – les flèches $a_1$ et $a_2$ correspondantes à la charge de fissuration

$\beta$ – le coefficient de diminution de la charge de fissuration, défini au chapitre 1.

Notons que cette méthode n'est directement applicable que dans le cas de la flexion simple. Dans ce cas, on peut écrire:

$$a_{1r} = a_1 \frac{M_{rD}}{M_D} \qquad a_{2r} = a_2 \frac{M_{rD}}{M_D} \tag{12}$$

où $M_D$ et $M_{rD}$ représentent respectivement le moment de flexion et le moment de fissuration de la section déterminante qui se trouve à mi-portée d'une poutre ou d'une dalle ou à l'encastrement d'un porte-à-faux. Ainsi, on obtient (équations 11 et 12):

$$a = a_2 - (a_2 - a_1) \cdot \beta \cdot \frac{M_{rD}}{M_D} \tag{13}$$

Le calcul des flèches $a_1$ et $a_2$ ainsi que certaines simplifications seront donnés au paragraphe suivant.

*3.2 Méthode des coefficients globaux*

L'équation (13) peut être simplifiée davantage si l'on prend une approche légèrement différente et que l'on introduit les notations suivantes qui découlent des équations (6) et (7):

$$\kappa_1 = \kappa_{s1}(1 + \kappa_{\varphi 1} \cdot \varphi) \qquad \kappa_2 = \kappa_{s2}(1 + \kappa_{\varphi 2} \cdot \varphi) \tag{14}$$

On peut ainsi écrire, en ne considérant que l'effet de l'armature et du fluage (une estimation de l'effet du retrait sera donnée plus loin):

$$\psi_1 = \psi_c \cdot \kappa_1 \qquad \psi_2 = \psi_c \cdot \kappa_2 \tag{15}$$

Alors les flèches extrêmes $a_1$ et $a_2$ peuvent être exprimées par:

$$a_1 = \int \psi_c \cdot \kappa_1 \overline{M}\, dx \qquad a_2 = \int \psi_c \cdot \kappa_2 \overline{M}\, dx \tag{16}$$

$\overline{M}$ étant le moment virtuel.

Les coefficients $\kappa_1$ et $\kappa_2$ varient d'une section à l'autre le long de l'élément. Néanmoins, en supposant que ces coefficients peuvent être assimilés à ceux de la section déterminante ou plus précisément à une certaine moyenne, comme on va le montrer plus loin, on peut les sortir des intégrales et on obtient:

$$a_1 = \kappa_1 \int \psi_c \cdot \overline{M}\, dx = a_c \cdot \kappa_1$$
$$a_2 = \kappa_2 \int \psi_c \cdot \overline{M}\, dx = a_c \cdot \kappa_2 \tag{17}$$

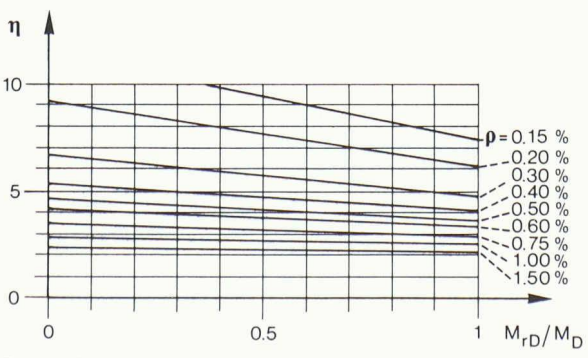



*Fig. 9. – Facteur de correction $\eta$ en fonction du rapport $M_{rD}/M_D$*

avec

$$a_c = \int \psi_c \cdot \overline{M}\, dx \tag{18}$$

La valeur $a_c$ représente la flèche instantanée de l'élément en ne considérant que le béton seul. C'est la flèche donnée par la plupart des programmes classiques d'éléments finis en calcul élastique linéaire.

A partir de l'équation (13), la flèche probable peut donc être exprimée par:

$$a = a_c \left(\kappa_2 - (\kappa_2 - \kappa_1) \cdot \beta \cdot \frac{M_{rD}}{M_D}\right) = a_c \cdot \kappa \tag{19}$$

avec

$$\kappa = \kappa_2 - (\kappa_2 - \kappa_1) \cdot \beta \cdot \frac{M_{rD}}{M_D} \tag{20a}$$

Le coefficient $\kappa$, appelé le coefficient de correction global, dépend de plusieurs paramètres géométriques, mécaniques, ainsi que du niveau de chargement. Des diagrammes d'application sont donnés à la référence [2].

*3.3 Méthode simplifiée SIA et CEB–FIP*

Une étude paramétrique sur le coefficient $\kappa$ et qui considère uniquement l'effet des charges permanentes, a été effectuée. A partir de cette étude, une expression simplifiée pour $\kappa$ a été développée. En effet, cette étude a montré que les coefficients $\kappa_1$ et $\kappa_2$ dépendent essentiellement des paramètres suivants:

$d/h$ – rapport entre la hauteur effective et celle totale de la section;

$\alpha\,\rho$ – avec $\alpha = E_s/E_c$ et $\rho$ = pourcentage géométrique de l'armature tendue ($\rho = A_s/bd$);

$\rho'/\rho$ – rapport entre le pourcentage de l'armature comprimée et celui de l'armature tendue;

$\varphi$ – coefficient de fluage.

Dans le but de libérer les coefficients $\kappa_1$ et $\kappa_2$ de l'influence de l'armature comprimée ($\rho'$), le facteur $(1 - 20\,\rho')$ a été proposé. Ainsi on peut écrire:

$$\kappa = \left(\kappa_2 - (\kappa_2 - \kappa_1) \cdot \beta \cdot \frac{M_{rD}}{M_D}\right)(1 - 20\,\rho') \tag{20b}$$

ce qui rend $\kappa_1$ et $\kappa_2$ indépendants de $\rho'$ et donc beaucoup plus facile à déterminer. L'étude paramétrique a montré également, que si l'on admet pour les paramètres suivants des valeurs constantes:

- $\alpha = E_s/E_c \cong 7$ (valeur courante)
- coefficient de fluage $\varphi$ = 2,5; pour d'autres valeurs de $\varphi$, un facteur de correction simple peut être utilisé (voir plus loin)
- coefficient de vieillissement $\overline{\chi} = 0{,}8$

alors, le coefficient global peut être écrit comme suit :

$$\kappa = (h/d)^3 \cdot \eta \cdot (1 - 20\,\rho') \tag{20c}$$

Le facteur $\eta$ est donné à la figure 9.

Le facteur $(h/d)^3$ est un facteur important que l'on aimerait diminuer le plus possible. Malheureusement, cela va à l'encontre d'un enrobage suffisant, toujours souhaité pour assurer une bonne protection des armatures contre la corrosion. Dans le cas des dalles de bâtiments par exemple, ce facteur prend très souvent la valeur suivante:

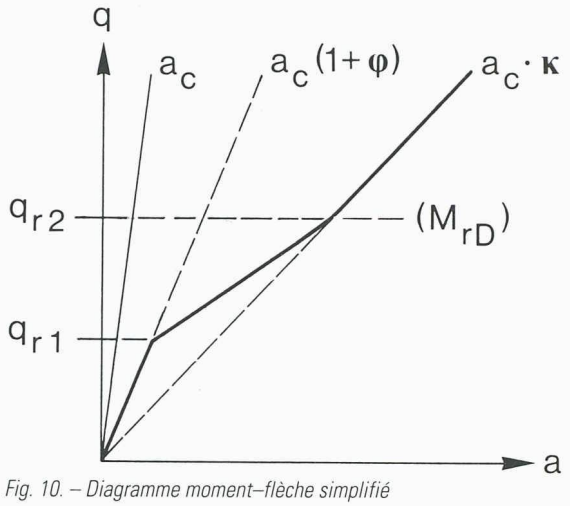



*Fig. 10. – Diagramme moment–flèche simplifié*

**Tableau 1 – Facteur de correction η pour le calcul des flèches**

| $\rho_m$ [%] | 0,15 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 0,75 | 1,0 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| η | 10 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2,5 | 2 |

$$(h/d)^3 = (1{,}2)^3 = 1{,}73 \qquad (21)$$

ce qui est loin d'être négligeable.

Le facteur η représente l'effet de la fissuration en fonction du niveau de sollicitation ($M_{rD}/M_D$) et du pourcentage d'armature tendue ρ. Si $M_{rD}/M_D \cong 0$, c'est-à-dire si $M_D$ est très grand par rapport à $M_{rD}$ ou si $M_{rD} \cong 0$, alors η est maximum. Par contre, si $M_{rD}/M_D \cong 1$, autrement dit si la structure est juste fissurée, alors η est minimum.

ρ' dans l'équation (20c) représente, comme on l'a mentionné précédemment, l'effet favorable d'une armature de compression. Cependant, pour ρ' < 0,5%, cet effet sur la flèche peut être considéré comme négligeable.

L'absence du coefficient de fluage φ dans l'équation (20c) est due au fait qu'elle a été établie pour φ = 2,5. Pour φ = 3,5, la flèche serait augmentée de 10 à 20%. Pour plus d'information, le lecteur interessé pourra consulter la référence [2]. Une expression simple sera donnée plus loin pour tenir compte de la variation de φ.

Essayons de simplifier davantage le facteur η. A partir de la figure 9, on peut constater que pour des sections normalement ou fortement armées, le facteur η ne dépend que très peu du rapport $M_{rD}/M_D$. Ainsi, on peut adopter, avec une très bonne approximation, des valeurs arrondies de η pour $M_{rD}/M_D$ = 0,5 et celui-ci devient donc indépendant des sollicitations. Ces valeurs, adoptées dans la norme SIA 162 [20] (article 3.34.4) et le code modèle CEB–FIP 90 [1] (paragraphe 7.5.2.2), sont montrées au tableau 1.

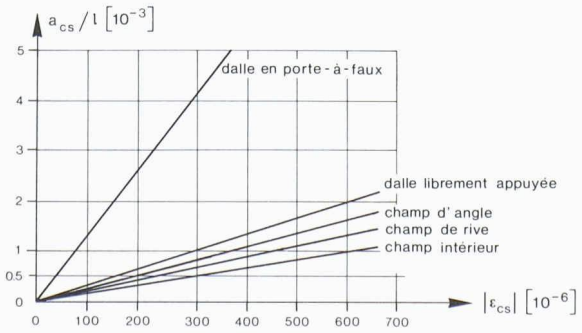



*Fig. 11. – Flèche d'une dalle due au retrait seul*

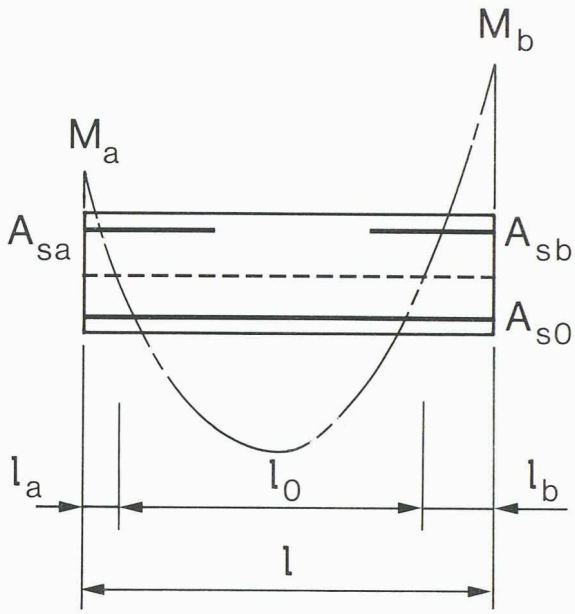



*Fig. 12. – Diagramme des moments définissant $l_0$, $l_a$ et $l_b$*

Donc, l'estimation de la flèche probable d'une structure se résume comme suit (fig. 10):

$$a = a_c \cdot (1 + \varphi) \qquad \text{pour } M_D < M_{rD} \qquad (22)$$

$$a = a_c \cdot (h/d)^3 \cdot \eta \cdot (1 - 20\,\rho') \quad \text{pour } M_D \geq M_{rD} \qquad (23)$$

Afin de déterminer l'influence du retrait sur la flèche, on propose le graphique présenté à la figure 11, qui a été établi par Tellenbach [13]. Ce graphique permet de déterminer directement le supplément de flèche dû au retrait, en fonction de la déformation relative de retrait $\varepsilon_{cs}$.

On peut améliorer sensiblement la fiabilité de cette méthode simplifiée si l'on tient compte de deux paramètres: la répartition des armatures et la progression de la fissuration. Pour tenir compte de la répartition des armatures, on peut déterminer une valeur moyenne de ρ en fonction du diagramme des moments de la structure (fig. 12). Cette valeur moyenne ($\rho_m$) peut être calculée comme suit:

$$\rho_m = \rho_a \cdot \frac{l_a}{l} + \rho_0 \cdot \frac{l_0}{l} + \rho_b \cdot \frac{l_b}{l} \qquad (24)$$

avec

$\rho_a$, $\rho_b$ – pourcentage d'armature tendue sur appuis (armature supérieure)

$\rho_0$ – pourcentage d'armature tendue à mi-portée (armature inférieure).

Une estimation grossière des longueurs $l_a$ et $l_b$ est normalement suffisante.

Pour tenir compte de la progression de la fissuration dans un élément fléchi (fig. 10 et 13), on calcule les deux niveaux de charge $q_{r1}$ et $q_{r2}$ où:

$q_{r1}$ – est le niveau de charge correspondant à la première fissure (la section sur appui est très probablement celle qui se fissure la première),

$q_{r2}$ – est le niveau de charge correspondant à la fissuration de la section déterminante.

Ces deux niveaux de charge définissent le stade de fissuration des sections susmentionnées. Des valeurs intermédiaires entre ces deux limites peuvent être obtenues par interpolation.

Signalons enfin que cette méthode simplifiée a été développée et établie pour des bétons ordinaires. Toutefois, elle a été adaptée aux bétons à hautes performances moyennant certaines modifications du facteur de correction η. Sur la base d'une étude paramétrique présentée en détail à

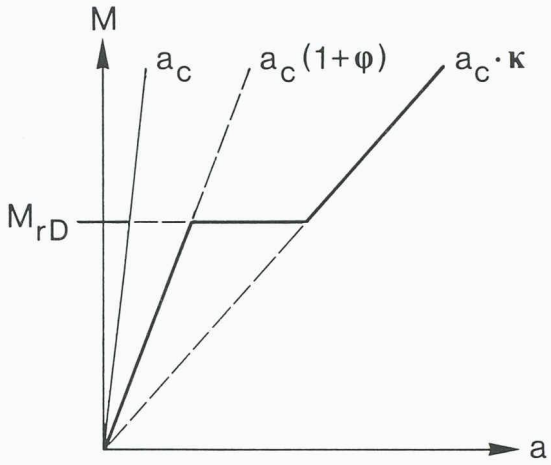



*Fig. 13. – Diagramme (tri-linéaire) charge–flèche simplifié*

la référence [10], on propose les modifications suivantes pour l'estimation de la flèche dans le cas où la structure est fissurée:

$$a = (h/d)^3 \cdot \eta \cdot \eta_\varphi \cdot \eta_M \cdot (1 - 20\,\rho') \cdot a_c \qquad (25)$$

avec:

$\eta_\varphi$– facteur de correction relatif au fluage

$$\eta_\varphi = \frac{6{,}2 + \varphi}{8{,}7} \qquad (26)$$

$\eta_M$– facteur de correction tenant compte de la résistance à la traction du béton $f_{ct}$ par l'intermédiaire du niveau relatif de sollicitation

$$\eta_M = 1{,}22 - 0{,}44\,\frac{M_{rD}}{M_D} \qquad (27)$$

## *4. Conclusions*

Cet article est une synthèse de dix ans de travail de recherche à l'Institut de béton armé et précontraint (IBAP), dans le domaine des déformations des structures en béton. Une méthode générale pour le calcul des flèches a été développée. Celle-ci tient compte de la majorité des facteurs influençant les déformations; en particulier les déformations à long terme qui intéressent au premier plan l'ingénieur constructeur. En effet, les problèmes liés aux déformations à court terme interviennent rarement, à part les problèmes de vibration qui ne sont pas traités ici. De plus, très peu d'exemples d'une déformation à court terme ont joué un rôle important dans les désordres constatés dans les ouvrages.

La sensibilité de la flèche en fonction de plusieurs paramètres a été montrée. De cette étude paramétrique, une méthode simplifiée a été développée et adoptée pour la norme SIA 162 et pour le code modèle 1990 du CEB–FIP. Cette méthode tient compte de ces paramètres. Elle est de plus basée sur un modèle scientifique, qui est celui de la relation moment–courbure du CEB–FIP, et non pas sur un modèle empirique. Ce modèle est par ailleurs indiqué à l'annexe 4 de l'Eurocode 2.

Dans cette méthode simplifiée, les paramètres suivants sont considérés comme constants: le coefficient de fluage, la résistance à la traction du béton et la déformation de retrait. Par contre, le module d'élasticité et le pourcentage moyen de l'armature tendue peuvent varier. Enfin, pour des bétons dont les propriétés diffèrent considérablement de celles d'un béton ordinaire, des relations simples ont été développées pour en tenir compte.

## *Bibliographie*


[1] «CEB–FIP Model Code 1990», Comité Euro-International du Béton – Fédération internationale de la précontrainte, Ed. Thomas Telford, Londres, à paraître en 1992

[2] Manuel CEB: «Fissuration et Déformations», préparé par le Comité Euro-International du Béton, groupe de travail: Favre R. (Rapporteur), Beeby A.W., Falkner H., Koprna M., Schiessl P., Jaccoud J.-P., Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1983

[3] CEB Manual: «Structural effects of time-dependent behaviour of concrete», prepared by Comité Euro-International du Béton, editorial team: Chiorino M.A., Napoli P., Mola F., Koprna M., Georgi Publishing Company, Saint-Saphorin, 1984

[4] Bassant Z.P.: «Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method», Journal of the ACI, April 1972

[5] Grasser E., Thielen G.: «Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrössen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken», Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 240, 1976

[6] Rüsch H., Jungwirth D.: «Stahlbeton-Spannbeton», Band 2, Werner-Verlag, 1976

[7] Trost H., Mainz B.: «Zweckmässige Ermittlung der Durchbiegungen von Stahlbetonträgern», *Beton und Stahlbeton* 6/1969

[8] Favre R., Jaccoud J.-P., Koprna M., Radojicic A.: «Dimensionnement des structures en béton», Traité de Génie Civil, volume 8, Ed. PPR, Lausanne, 1990

[9] Koprna M.: «Effets différés; fluage, retrait, relaxation». Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1986

[10] Charif H.: «Réduction des déformations des structures en béton grâce à l'utilisation de bétons à hautes performances; étude numérique et expérimentale», thèse N° 884, EPFL, Lausanne, 1990

[11] Jaccoud J.-P., Favre R.: «Flèches des structures en béton armé», *Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics,* N° 406, série: béton 208, Paris, 1982

[12] Trevino J.: «Méthode directe de calcul de l'état de déformation et de contrainte à long terme d'une structure composée», thèse N° 728, EPFL, Lausanne, 1988

[13] Tellenbach A.: «Déformation à long terme des dalles en béton à l'état fissuré», thèse N° 544, EPFL, Lausanne, 1985

[14] Ghali A., Favre R.: «Concrete structures; stresses and deformations». Ed. Chapman and Hall, Londres, New York, 1986

[15] Wicke M.: «CEB–FIP Model Code 90 – Serviceability Limit State». Colloquium on the CEB–FIP Model Code 90, Université Fédérale de Rio de Janeiro, Brésil, 28-30 août 1991. Une version approfondie de cet article sera prochainement publiée dans le bulletin d'information du CEB

[16] Najdanovic D., Favre R., Perisic Z.: «Experimental Research of Reinforced Concrete Columns Behaviour Under the Long-term Excentric Normal Force», Proceedings of an international workshop on progress and advances in structural engineering and mechanics, University of Brescia, Italy, September 1991, Ed. Grierson D.E. and al, Kluwer Academic Publishers

[17] Espion B., Halleux P.: «Long-term Deflections of Reinforced Concrete Beams: Reconsideration of Their Variability», *ACI Structural Journal,* March-April 1990, vol. 89 N° 2, p. 232-236

[18] Consenza E., Greco C.: «Il Calcolo Delle Deformazioni Nelle Structture In Cemento Armato», CVEN, Naples, 1991

[19] Favre R., Charif H., Jaccoud J.-P.: «Large reduction of deflections due to HPC», in: «High Performance Concrete; from material to structure» éditeur: Yves Malier, ENS Cachan, Chapman and Hall, Londres, 1992

[20] Norme SIA 162: «Ouvrages en béton», Société suisse des ingénieurs et des architectes, Zurich, 6/1989

[21] Eurocode 2: «Calcul des ouvrages en béton», version française (Prénorme européenne), janvier 1992