

# Définition modifiée d'élancement des colonnes dans les ossatures en béton armé à nœuds déplaçables

Autor(en): **Cauvin, Aldo / Macchi, Giorgio**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Ingénieurs et architectes suisses**

Band (Jahr): **109 (1983)**

Heft 21

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-74995>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Définition modifiée d'élançement des colonnes dans les ossatures en béton armé à nœuds déplaçables

par Aldo Cauvin et Giorgio Macchi, Pavia

La définition d'élançement suivant laquelle le domaine des «ossatures élançées» est défini dans le Code Modèle CEB-FIP, n'introduit pas les influences de l'effort normal, de l'armature et de la qualité du béton, facteurs qui déterminent le «degré de non-linéarité» du comportement de la structure. Une meilleure définition d'«ossature élançée» exige donc une définition modifiée d'«élançement»; d'autre part, elle peut être utilisée avec des critères prudents, le calcul non linéaire étant forcément adopté dans les cas douteux: l'adoption d'hypothèses simples est donc admissible, compte tenu du domaine d'application limité.

Ayant identifié les paramètres essentiels, leur discussion conduit à une formulation ayant une structure semblable à celle proposée par Menegotto et Via dans une étude précédente.

La nouvelle formulation traite toutefois différemment les effets de l'effort normal et du pourcentage d'armature; elle consent en plus de tenir compte de la qualité du béton.

Une série très étendue de calculs non linéaires sur des simples portiques encastres confirme que la validité de cette formulation n'est pas limitée à la considération de colonnes isolées; l'effet du fluage du béton sur les conditions d'excentricité initiale paraît être mieux pris en compte. La validité de l'approche pour des portiques à nombreux étages nécessite encore des contrôles.

## Introduction

Le Code Modèle CEB-FIP [1] – (comme les autres Codes, d'ailleurs) – donne une définition d'ossature «élançée»; si une ossature en béton armé tombe dans ce domaine, les effets du second ordre ne peuvent pas être négligés, et on doit les calculer par des procédés non linéaires: ces procédés peuvent conduire à de longs calculs difficiles à appliquer, en particulier dans le cas d'ossatures à nœuds déplaçables, où la vérification colonne par colonne (par exemple au moyen de la méthode de la colonne modèle) doit suivre l'analyse non linéaire de l'ossature dans son ensemble. De tels procédés sont en réalité justifiés seulement si les moments du second ordre sont une fraction considérable du moment total de projet dans les sections critiques: d'où l'importance de délimiter le domaine dans lequel la non-linéarité géométrique est à considérer.

Une mesure de la non-linéarité géométrique est nécessaire. On a utilisé jusqu'ici l'élançement «eulerien» des colonnes:

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i}$$

où:

$\ell_0$  = longueur effective de flambement

$i$  = rayon d'inertie minimum de la section de béton seul

Le comportement non linéaire ne dépend toutefois pas seulement des paramètres géométriques synthétisés par  $\lambda$ . Cette définition d'élançement, valable pour les structures homogènes et faites d'un matériau linéaire, n'est plus suffisante pour un matériau non homogène

comme le béton armé, dans lequel un rôle essentiel est joué par l'acier, et qui est en plus sujet à la fissuration et au fluage; ceci comporte aussi des effets importants de la qualité du béton et du niveau de l'effort normal.

Un élançement effectif, qui tienne compte au moins des plus importantes variables du comportement non linéaire du béton armé, serait donc utile pour mieux définir le domaine dans lequel les effets du second ordre doivent être considérés. Le problème est complexe, pour le nombre de variables concernées, même dans le cas d'une colonne isolée. Si, en plus, on veut considérer le cas réaliste des ossatures complètes, les difficultés augmentent.

Pour ces raisons, les formulations avancées jusqu'ici [3, 4] sont fondées seulement en partie sur des considérations théoriques, et leur validité est contrôlée par des simulations paramétriques non linéaires. Deux formulations possibles sont ici discutées.

## Définition d'ossature élançée suivant le Code Modèle CEB-FIP

Le Code Modèle donne les limites suivantes, en termes d'élançement eulerien:

- pour  $\lambda < 25$  le contrôle des effets du second ordre n'est pas nécessaire;
- pour  $\lambda \leq 140$ , les effets du second ordre peuvent être pris en compte par des méthodes approchées, telles que celle de la «colonne modèle»; toutefois, pour les ossatures à nœuds déplaçables, ces méthodes peuvent

être appliquées seulement à la colonne isolée, une analyse non linéaire d'ensemble étant nécessaire;

c) pour  $140 < \lambda < 200$ , une analyse non linéaire d'ensemble est obligatoire;

d)  $\lambda > 200$  n'est pas recommandé.

Toutefois, l'expérience jusqu'ici faite par les auteurs sur l'analyse non linéaire d'ossatures montre que fréquemment des colonnes ayant élançement compris entre 25 et 40 sont soumises à des effets du second ordre négligeables. Ce résultat a été trouvé en particulier au cours de l'élaboration des exemples de calcul faits pour contrôler l'applicabilité et la validité du Code Modèle du CEB [5]. Dans un exemple d'ossature à nœuds déplaçables (exemple 14) ayant des colonnes de section  $50 \times 50$  cm sur une hauteur d'étage de 3,50 m, tout en étant dans un cas où  $\lambda = 35$ , les effets du second ordre sont restés négligeables.

La limite inférieure d'élançement nécessite donc une définition meilleure.

Le Code ACI 318/77, de son côté, est encore plus conservateur, en donnant une limite inférieure  $\lambda = 22$ . Pour le CEB, toutefois, une raisonnable définition d'élançement est plus importante du fait que les méthodes approchées envisagées par le ACI (Moment Magnifier Method) ne sont pas permises pour les ossatures à nœud déplaçables.

## Facteurs influençant le comportement non linéaire des ossatures élançées en béton armé

Le comportement non linéaire des ossatures est influencé aussi par des paramètres autres que ceux de la colonne considérée: par exemple la fissuration d'autres éléments de l'ossature, la distribution des charges, l'histoire des charges. Toutefois, même en se bornant à la considération de paramètres liés à la colonne seule, au moins les facteurs suivants sont à considérer comme compléments essentiels à l'élançement  $\lambda$ :

- l'effort axial sur la colonne;
- le pourcentage d'armature;
- la résistance du béton.

Des essais dans cette direction ont été faits par Menegotto et Via [3], qui ont inclus dans leur expression l'effort axial et l'armature, et par les auteurs, qui ont ajouté l'effet de la qualité du béton.

## Formulations de l'élançement équivalent

Une modification de l'élançement peut être poursuivie sur les lignes suivantes:

- établir le moment de second ordre



$M_{II}$  (ou bien le facteur d'amplification  $\mu = (M_I + M_{II}) / M_I$  en fonction de chacune des variables;

- utiliser de telles fonctions pour établir une définition d'élancement équivalent  $\lambda^*$ ;
- au lieu d'avoir une famille de courbes  $\mu_i = \mu_i(\lambda)$  (voir réf. [4]) on obtient ainsi une courbe unique  $\mu = \mu(\lambda^*)$ .

La courbe  $\mu(\lambda^*)$  est une représentation synthétique du comportement non linéaire d'une colonne dans l'ossature du type considéré et peut être donc adoptée pour choisir des valeurs convenables des élancements limites. Deux formulations d'élancement équivalent ont été proposées jusqu'ici. Menegotto et Via ont proposé [3] l'expression suivante:

$$(1) \lambda^{**} = \lambda^{s+c} \sqrt{v}$$

étant:

$A_s$  = section totale d'acier

$A_c + 20 A_s$  = section homogénéisée de la colonne avec rapport des modules  $n$  ( $E_s/E_c = 20$ )

$J_c + 20 J_s$  = moment d'inertie de la section homogénéisée

$$(2) \lambda^{s+c} = \ell_0 \left( \frac{J_c + 20 J_s}{A_c + 20 A_s} \right)^{-1/2}$$

$\ell_0$  = longueur effective de flambement

$$v = \frac{N}{baf_c} =$$

effort axial réduit (par rapport à la section  $b_a$  et à la résistance à compression  $f_c$  du béton).

L'expression (1) a été vérifiée par une série d'essais numériques sur des colonnes isolées; les effets du fluage et des imperfections initiales ont été négligés. Les auteurs ont à leur fois suggéré [4] l'expression

$$(3) \lambda^* = \lambda \frac{v^{0,6}}{1+15 \varrho} \left( \frac{f_{cd}}{17,5} \right)^{0,5}$$

étant:

$\lambda$  = élancement Eulerien

$\varrho = \frac{A_s}{b_a} =$  pourcentage géométrique d'armature

$v$  = effort axial réduit

$f_{cd}$  = résistance de calcul à la compression du béton (MPa).

L'expression (3), justifiée par les considérations théoriques (chapitre suivant), a été vérifiée au moyen d'une série paramétrique d'essais numériques sur des ossatures en béton armé à nœuds déplaçables, compte tenu du fluage et des imperfections initiales (voir chapitre «Résultats»).

### Considérations théoriques sur l'élancement équivalent

Les trois variables principales ( $\varrho, v, f_c$ ) ont été prises en considération différemment dans les expressions proposées (1) et (3).

#### Acier d'armature

L'expression (1) introduit l'élancement (2):

$$\lambda^{s+c}$$

d'un élément non fissuré équivalent, où le coefficient d'homogénéisation est  $n = 20$ . Cette valeur de  $n$ , qui est bien plus importante, du rapport  $E_s/E_c$  entre les modules l'élasticité de l'acier et du béton, tient compte de deux facteurs qui augmentent l'effet raidisseur de l'acier:

- le fluage du béton,
- la fissuration de la colonne.

L'effet de cette dernière est montré dans la figure 1 où l'augmentation de l'inertie  $J_{c+s}$  est mise en fonction du pourcentage  $\varrho$  pour une section à double armature symétrique non fissurée ( $x \geq a$ ) et fissurée ( $x = 0,5a$ ).

L'adoption de  $n = 20$  est fondée sur un critère semblable à celui de Code ACI [11]; dans ce Code le moment d'inertie de la colonne est en effet calculé suivant l'expression:

$$J = \frac{J_c + \frac{E_s}{E_c} J_s}{1 + R_m}$$

où le rapport  $R_m$  entre la charge permanente et la charge totale tient compte de l'effet du fluage.

Toutefois, la valeur  $n = 20$ , comme la figure 1 le montre, peut fort bien être insuffisante pour tenir compte de la fissuration (pour valeurs élevées de  $\varrho$ ); et, suivant l'opinion des auteurs, cette valeur devrait être encore augmentée pour tenir compte du fluage.

A ce propos, il est utile de transformer l'expression (2) en fonction du pourcentage  $\varrho$  et l'élancement  $\lambda$ ; pour simplifier, on fera la transformation pour le cas courant d'une section rectangulaire à armature symétrique (fig. 2):

$$\begin{aligned} \lambda^{s+c} &= \ell_0 \left( \frac{J_c}{A_c} \right)^{-1/2} \left( \frac{1 + n J_s / J_c}{1 + n A_s / A_c} \right)^{-1/2} = \\ &= \lambda \left( \frac{1 + n J_s / J_c}{1 + n \varrho} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$J_c = \frac{ba^3}{12}; A_s = ab \varrho; a' = 0,9a$$

$$J_s = A_s \frac{a'^2}{4} = \frac{\varrho ba^3}{5}$$

$$\frac{J_s}{J_c} = \frac{\varrho ba^3/5}{ba^3/12} = 2,4 \varrho$$

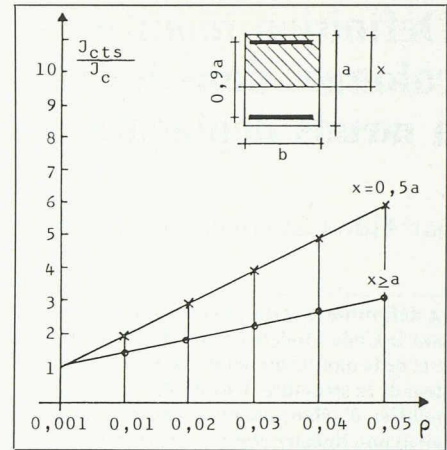


Fig. 1. Influence de l'effet raidisseur de l'acier dans les éléments fissurés et non fissurés

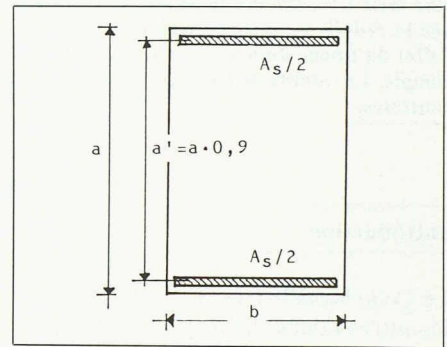


Fig. 2. Section symétrique en béton armé

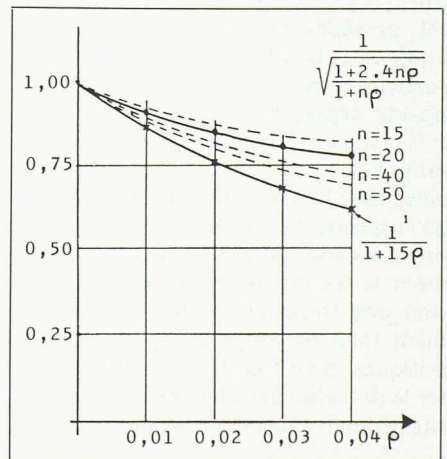


Fig. 3. Facteur de correction de  $\lambda$  pour l'influence du pourcentage d'armature  $\varrho$

$$(2 \text{ bis}) \lambda^{s+c} = \lambda \left( \frac{1 + 2,4n \varrho}{1 + n \varrho} \right)^{-1/2}$$

Le facteur de correction de  $\lambda$  dans cette expression est mis en fonction de  $\varrho$  dans la Fig. 3. En alternative, le facteur de correction proposé par les auteurs est

$$\frac{1}{1 + 15 \varrho}$$

On voit dans la figure 3 que cette dernière correction donne beaucoup plus d'importance à l'acier, pour les effets de fissuration de la section et du fluage; ce



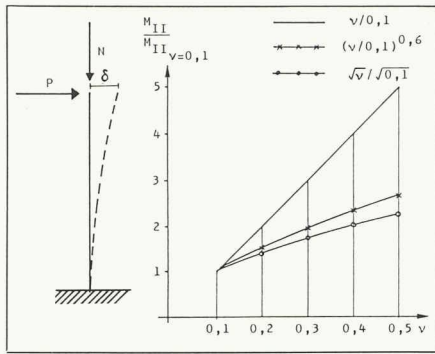


Fig. 4a (gauche). Schéma d'un modèle de colonne  
Fig. 4b (droite). Variation du moment de second ordre  $M_{II}$  en fonction de l'effort normal réduit  $v$  (trois hypothèses différentes)

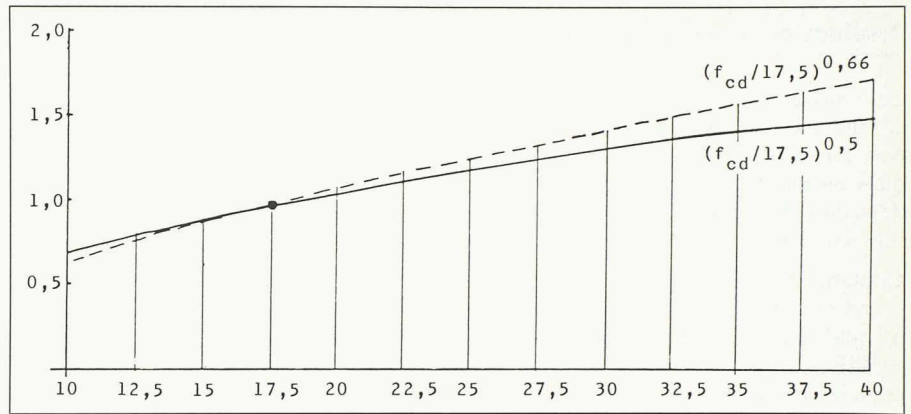


Fig. 5. Influence de la résistance  $f_{cd}$  du béton sur les moments de second ordre (deux lois différentes)

choix sera discuté au chapitre suivant «Résultats des essais numériques».

**Effort axial**

Dans l'expression (1) l'influence de l'effort normal réduit  $v$  est considérée par le facteur de correction

$$v^{1/2}$$

Cette correction correspond à évaluer le moment du second ordre par la formule «sécante» selon les critères proposés par Menegotto [8, 3]. Si l'on considère au contraire le schéma CEB de la «colonne modèle» comme à la figure 4a, et que le déplacement latéral  $\delta$  est calculé sur la colonne considérée élastique et à raideur constante, la relation entre  $v$  et le moment du second ordre  $M_{II}$  est presque linéaire (Annexe 1).

La fonction proposée en (2) a été déduite pour mieux suivre les résultats de l'étude paramétrique:

$$v^{0,6}$$

Les trois lois de variation de  $M_{II}$  suivant  $v$  sont comparées dans la figure 4b.

**Effet de la qualité du béton**

La résistance du béton influence le comportement non linéaire en deux manières opposées:

- une valeur plus élevée de  $f_{cd}$  correspond à une résistance à la traction  $f_{ct}$  plus élevée, donc à une fissuration mineure; elle correspond aussi à un module d'élasticité  $E_c$  plus élevé; ces facteurs tendent à diminuer les effets du second ordre;
- d'autre part, pour une valeur donnée de  $v$ , l'augmentation de  $f_{cd}$  correspond à des valeurs plus élevées de l'effort axial  $N$  à l'état-limite ultime, donc à des effets du second ordre plus importants.

Le module  $E_c$  du béton est en effet donné en fonction de  $f_{ck}$  suivant expressions un peu différentes:

$$E_{cm} = 4809 \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{ACI}) \quad [\text{MPa}]$$

$$E_{cm} = 5700 \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{Code Italien}) \quad [\text{MPa}]$$

$$E_{cm} = 9,5 (f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (\text{CEB}) \quad [\text{GPa}]$$

Si l'on adopte l'expression ACI (ou celle du Code Italien), le moment du second ordre peut être donné comme suit:

$$M_{II} = k \frac{f_{cd}}{E_{cm}} = k' \frac{f_{cd}}{\sqrt{f_{cd}}} = k' f_{cd}^{0,5}$$

En effet,  $v$  étant donné,  $M_{II}$  est proportionnel à  $f_{cd}$  et inversement à  $E_{cm}$ .

Comme valeur de référence on a adopté  $f_{cd} = 17,5$  MPa; cette convention in-

fluence la valeur numérique de  $\lambda^*$ , non la loi de variation. Le facteur de correction proposé est donc

$$\left(\frac{f_{cd}}{17,5}\right)^{0,5}$$

Cette loi de variation est montrée à la fig. 5: entre les résistances de 10 et 40 MPa le facteur de correction est doublé.

L'adaptation de l'expression CEB pour  $E_{cm}$  donnerait lieu à la relation suivante (approchée):

$$M_{II} = k \frac{f_{cd}}{\left(f_{cd} + \frac{1}{1,5}\right)^{1/3}} \approx k \cdot \frac{f_{cd}}{(f_{cd})^{1/3}} = k \cdot f_{cd}^{0,66}$$

Le facteur de correction à introduire en  $\lambda^*$  serait donc

$$\left(\frac{f_{cd}}{17,5}\right)^{0,66}$$

Cette dernière loi de variation est comparée à la première dans la figure 5: on peut contrôler que la différence est minime.

Fig. 6. Portique typique (d'après réf. [4])

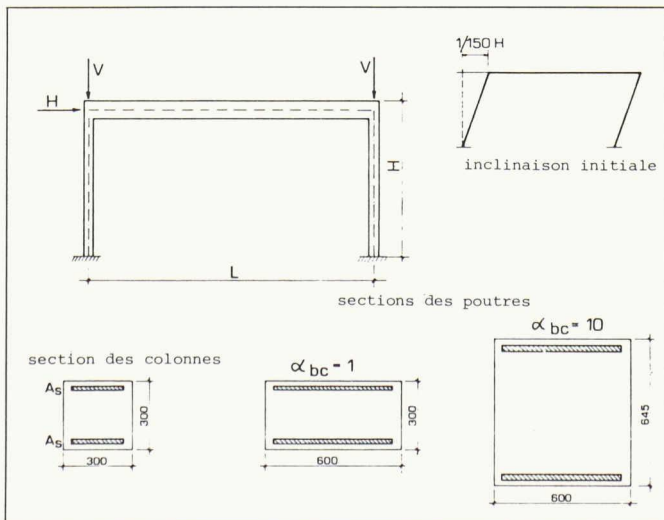
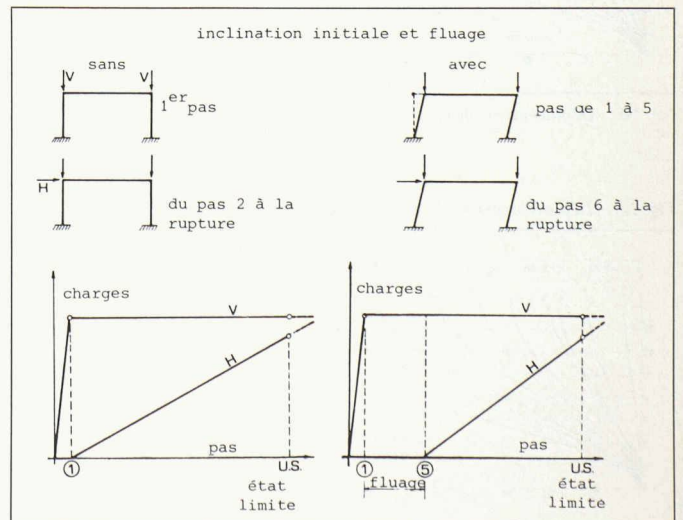


Fig. 7. Histoires de chargement (d'après réf. [4])





Résultats des essais numériques

Les considérations qui précèdent sont à comparer avec les résultats des calculs non linéaires effectués sur 420 portiques encastrés, dont les détails ont été déjà donnés [4]. Les variables considérées sont les suivantes:

- a) élancement «eulerien»  $\lambda$  variable entre 25 et 100;
- b) qualité du béton ( $f_{cd}$  entre 17,5 et 35 MPa);
- c) acier (pourcentage géométrique variable entre  $\rho = 0,01$  et  $\rho = 0,04$ );
- d) effort axial sur les colonnes (effort axial réduit  $\nu$  variable entre 0,1 et 0,5).

Les calculs ont été faits en suivant 2 histoires différentes de chargement (fig. 7):

- suivant la première histoire, des charges concentrées verticales ont été appliquées dans le premier pas de charge; après, une force horizontale a été proportionnellement appliquée jusqu'à rupture du portique;
- suivant la deuxième histoire, les charges verticales (considérées comme permanentes) ont été appliquées

au portique avec une inclinaison non intentionnelle de  $H/150$ ; après, le fluage dû à ces forces a été simulé; enfin, la force horizontale a été augmentée jusqu'à rupture.

Les deux ensembles de résultats obtenus présentent donc des différences substantielles:

- dans la première série le fluage n'a aucune influence;
- dans la deuxième série les effets combinés de l'inclinaison non intentionnelle et du fluage sont mis en évidence.

L'influence de l'inclinaison non intentionnelle n'est pas strictement un effet non linéaire; l'inclusion dans la valeur de  $M_{II}$  paraît toutefois raisonnable. En effet, le Code Modèle du CEB exige le calcul de cette influence seulement pour les structures élancées; l'inclinaison initiale contribue donc à la définition d'ossature élancée, ce qui est l'objet de la présente étude; si son effet est sensible, l'ossature doit être considérée élancée.

Dans les figures de 8 à 13 les déplacements des nœuds de la colonne de

gauche sont donnés pour la première histoire des charges et pour quelques cas intéressants; les lignes à traits indiquent les déplacements obtenus sans tenir compte du raidissement dû au béton en traction («tension stiffening effect») suivant le procédé donné en [7].

Ce raidissement a une influence considérable sur les déplacements, beaucoup moins sur les sollicitations, dans les cas considérés.

On montre dans la figure 14 les déplacements pour la deuxième histoire de chargement. On a aussi indiqué dans tous les diagrammes la diffusion graduelle des zones fissurées.

La figure 15 montre l'histoire du déplacement du nœud supérieur pour les deux cas de charge.

On compare enfin dans les figures 16 et 17 les deux formulations d'«élancement équivalent»  $\lambda^*$  (Cauvin-Macchi) et  $\lambda^{**}$  (Menegotto-Via) avec les valeurs numériques obtenues, pour les deux histoires de charge; en ordonnée on trouve le facteur d'amplification («moment magnification factor»)

$$\mu = \frac{M_I + M_{II}}{M_I}$$

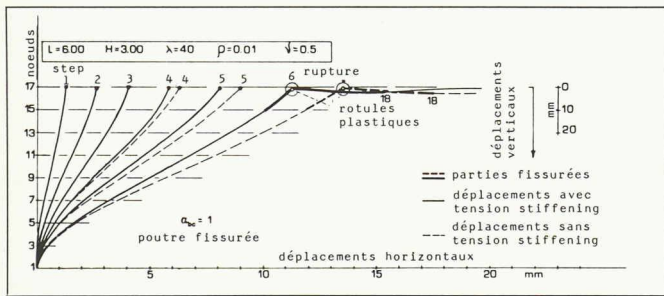


Fig. 8. Déplacements de la colonne de gauche

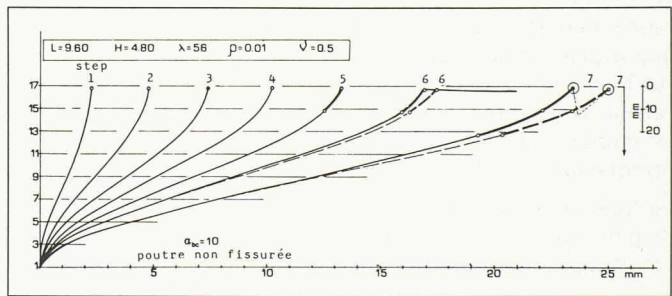


Fig. 9. Déplacements de la colonne de gauche

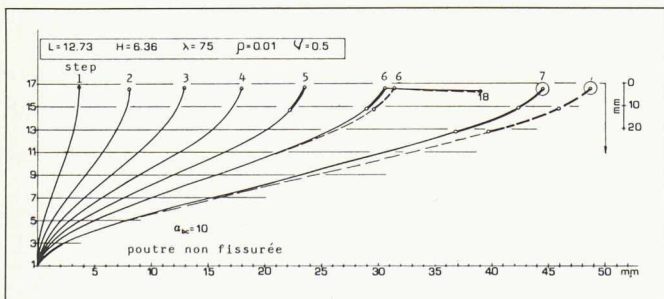


Fig. 10. Déplacements de la colonne de gauche

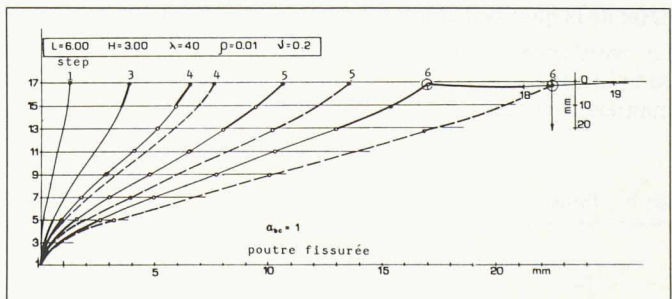


Fig. 11. Déplacements de la colonne de gauche

Fig. 12. Déplacements de la colonne de gauche

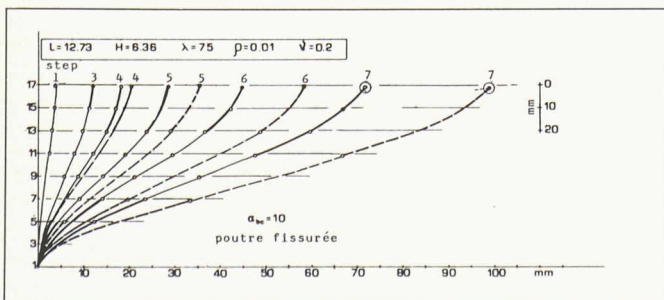
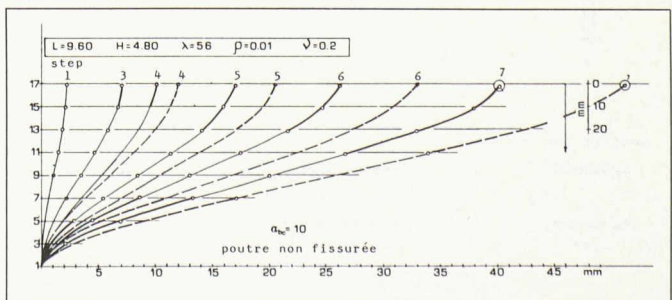


Fig. 13. Déplacements de la colonne de gauche





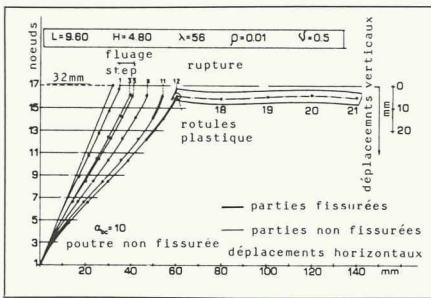


Fig. 14. Déplacements de la colonne de gauche et de la poutre dans la deuxième histoire de charge (avec fluage et imperfection initiale)

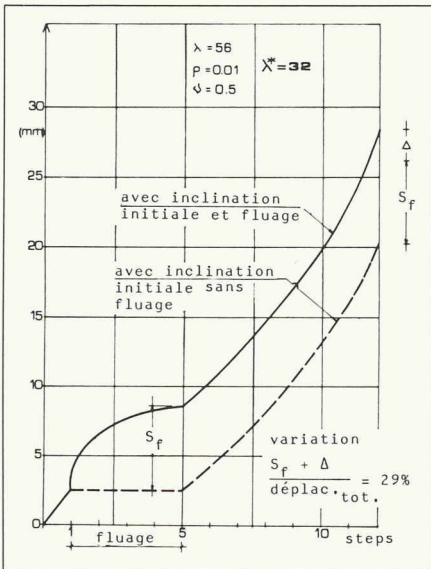


Fig. 15. Déplacements du nœud supérieur de la colonne pour les deux histoires de chargement

$M_I$  et  $M_{II}$  étant les moments du premier et du second ordre pour l'état-limite ultime dans la section de base de la colonne de gauche. On a considéré atteint l'état-limite ultime à la formation de la première rotule plastique dans la colonne.

### Conclusions

Un «élancement équivalent»

$$\lambda^* = \lambda \frac{\nu^{0.6}}{1 + 15 \rho} \left( \frac{f_{cd}}{17,5} \right)^{0.5} \text{ [MPa]}$$

a été proposé par les auteurs comme un paramètre capable de donner une mesure approchée du degré de non-linéarité du comportement des colonnes dans les ossatures élancées à nœuds déplaçables.

Ce nouvel «élancement» doit tenir compte des variables qui plus conditionnent le comportement non linéaire, et représenter le facteur d'amplification sans trop de dispersion. Ce but est atteint avec approximation acceptable par les deux formulations (1) et (3) (voir fig. 16 et 17).

On peut noter que l'expression ci-dessus de  $\lambda^*$  (formule 3) semble mieux suivre les résultats lorsque le fluage et l'inclinaison non intentionnelle sont prises en compte (courbe supérieure de la fig. 16).

Des résultats compacts sont obtenus par l'expression  $\lambda^{**}$  (formule 1) seulement si ces facteurs sont négligés (courbe inférieure de la fig. 17): cette expression tend à sous-estimer la fonction raidisseuse de l'acier, effet qui est à sa fois amplifié par le fluage. Les deux formulations semblent toutefois adéquates pour individuer une limite inférieure d'élancement au-dessous de laquelle les effets du second ordre peuvent être négligés.

Dans le cas de la formulation en  $\lambda^*$ , cette limite pratique peut être prise comme  $\lambda^* \leq 15$ , ce qui correspond à un facteur d'amplification inférieur à 1,1, comme déjà proposé en [4]. Cette limite paraît rester valide aussi pour des ossatures plus complexes, d'après les études paramétriques faites sur des ossatures à plusieurs étages [11].

### Annexe

Le moment du second ordre  $M_{II}$  dans la colonne de la fig. 4 a peut être obtenu par la théorie élastique [8], ou bien avec l'hypothèse simplifiée que le déplacement au sommet est une fonction de la courbure à la base. Les expressions que l'on obtient dans les deux cas sont complexes, mais on peut montrer que  $M_{II}$  est une fonction presque linéaire de  $\nu$  pour des élancements modérés ( $\lambda < 70$ ),

Fig. 16. Résultats de essais numériques en fonction de  $\lambda^*$  (Cauvin-Macchi, réf. [4])

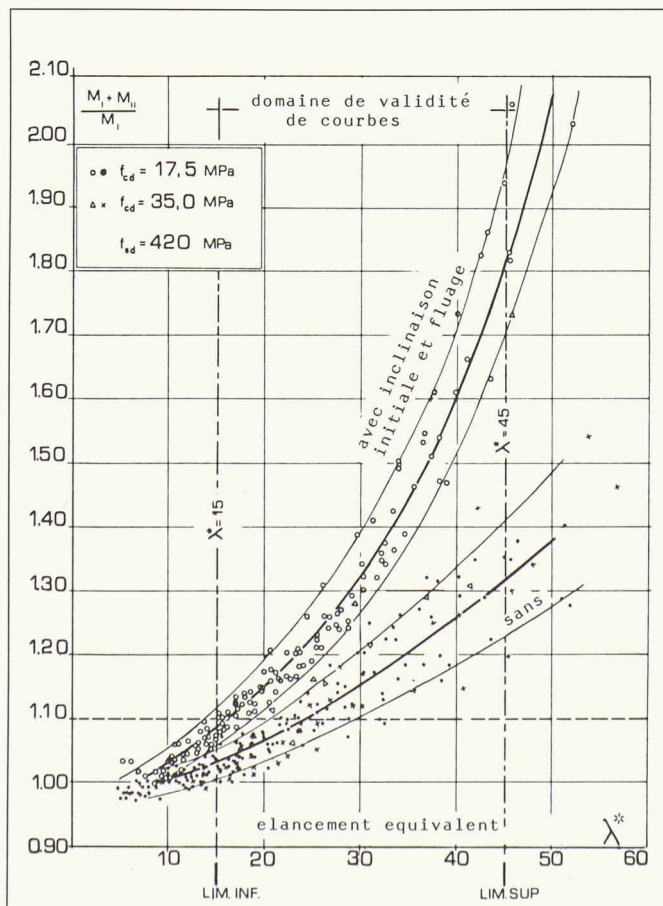
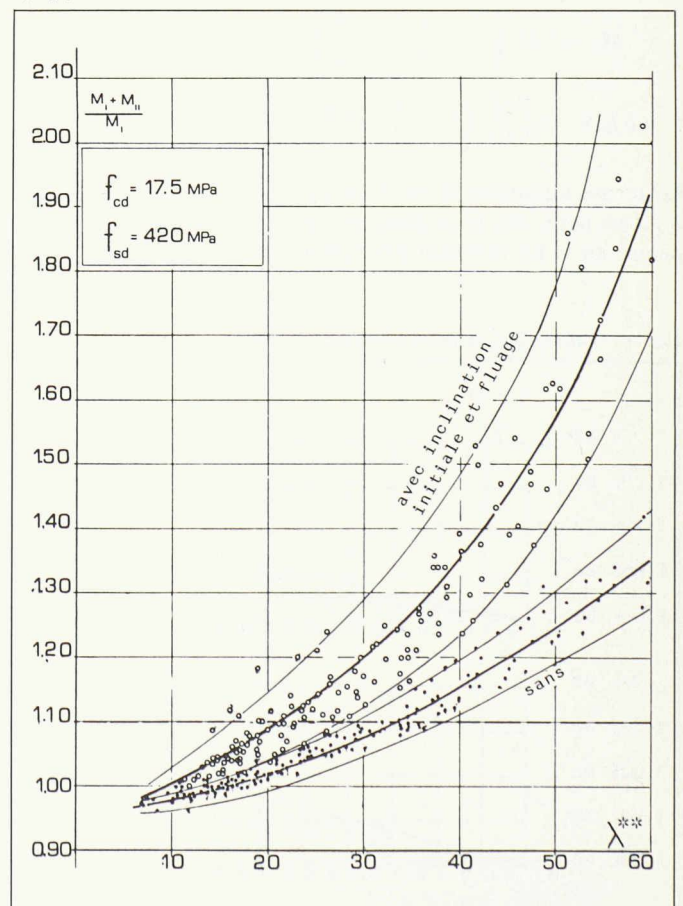


Fig. 17. Résultats des essais numériques en fonction de  $\lambda^{**}$  (Menegotto-Via, réf. [3])





effort axial modéré ( $v < 0,5$ ) et dans le domaine usuel de résistance du béton ( $10 \text{ MPa} < f_{cd} < 30 \text{ MPa}$ ).

Malgré cette linéarité théorique, comme expliqué dans le texte du mémoire,  $v$  est affecté par l'exposant 0,6 dans l'expression de  $\lambda^*$ , pour mieux suivre les résultats des analyses non linéaires plus soignées.

**Première méthode**

Cette méthode est utilisée par le Code ACI [2] dans la dérivation du coefficient d'amplification pour déterminer les moments  $M_{II}$  du second ordre. Le déplacement au sommet de la colonne peut être exprimé par

$$\delta = \frac{P \ell_0^3}{24 EJ} \chi(u)$$

avec

$$u = \frac{\ell_0}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

et

$$\chi(x) = \frac{3(\tan u - u)}{u^3}$$

Une expression approchée de  $\chi(u)$  est obtenue par développement en série de  $\tan u$ :

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \dots$$

$$\chi(u) \approx 1 + \frac{2u^2}{5} = 1 + \frac{1}{10} \ell_0^2 \frac{P}{EJ}$$

Le moment du second ordre est donc donné par:

$$M_{II} = N \left( 1 + \frac{1}{10} \ell_0^2 \frac{P}{EJ} \right) =$$

$$= ab f_{cd} v \frac{P \ell_0^3}{24 EJ} \left( 1 + \frac{1}{10} \ell_0^2 \frac{ab f_{cd} v}{EJ} \right)$$

Le terme quadratique en  $v$  est petit si  $\ell_0/J$  est petit.  $M_{II}$  reste donc presque linéaire en  $v$ . La fonction  $\chi(u)$  peut être

aussi approchée comme dans le Code ACI [2, 8]:

$$\chi(u) = \frac{1}{1 - N/N_{crit}} + \frac{1}{1 - \frac{v ab f_{cd}}{\pi^2 EJ/\ell^2}}$$

$$M_{II} = \frac{P \ell^3}{2 \pi^2 EJ} \frac{v ab f_{cd}}{1 - \frac{v ab f_{cd}}{\pi^2 EJ/\ell^2}} = \frac{k v}{\ell - k' v}$$

Si la charge est assez éloignée de la charge critique eulérienne, on trouve encore une variation linéaire de  $M_{II}$  avec  $v$ .

**Deuxième méthode**

Pour trouver toujours une expression de  $M_{II}$  pour un comportement linéaire et non fissuré des matériaux, on peut aussi utiliser l'hypothèse que le déplacement au sommet est fonction seulement de la courbure à la base (CEB, colonne modèle). Si  $(1/r)$  est la courbure à la base

$$\frac{1}{r} = \frac{P \ell_0}{2 EJ} + \frac{M_{II}}{EJ}$$

$$M_{II} = N \frac{\ell_0^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{N \ell_0^2 (P \ell_0 + 2 M_{II})}{20 EJ}$$

$$M_{II} = \frac{N_0 \ell_0^3 P}{20 EJ - 2 N \ell_0^2} = \frac{v \ell_0^3 P}{\frac{20 EJ}{ab f_{cd}} - 2 v \ell_0^2}$$

Encore, si l'effort axial est loin de la charge critique eulérienne, le deuxième terme au dénominateur peut être négligé, et  $M_{II}$  reste linéaire en  $v$ .

Dans la figure 18 on trouve les diagrammes obtenus pour le facteur d'amplification

$$\mu = \frac{M_I + M_{II}}{M_I}$$

soit au moyen de la première méthode, soit au moyen de la deuxième. L'effort normal réduit varie de 0,1 à 0,8 pour 3 valeurs de  $\lambda$  (35, 50, 70) et 4 valeurs de

**Références**

- [1] CEB-FIP - Model Code for Concrete Structures. CEB Bulletin d'Information, no 124-125 E, 1978
- [2] ACI COMMITTEE 318: Building Code Requirement for Reinforced Concrete (ACI 318-77). American Concrete Institute, Detroit, 1977
- [3] MENEGOTTO, M., VIA, G.: Limiti di snellezza delle colonne in C.A. Pubblicazione no 64, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Architettura, Università di Roma, 1977
- [4] CAUVIN A., MACCHI, G.: Geometric and Material Nonlinearities in R.C. Sway Frames. Proc. of ACI-ASCE Symposium on Nonlinear behaviour of Reinforced and Prestressed Concrete Structures, Houston, 1977
- [5] CEB Bulletin no 129, Paris, octobre 1978
- [6] CEB Bulletin no 134, Paris, avril 1979
- [7] CAUVIN, A.: Analisi non lineare di telai piani in cemento armato. Giornale del Genio Civile, no 1-2-3, 1978
- [8] TIMOSHENKO and GERE: Theory of Elastic Stability. McGraw Hill, New York, 1961
- [9] MAC GREGOR, J.G., OELHAFEN, U.H., HAGE, S.E.: A pre-Examination of the EI Value for Slender Columns. ACI Special Publication 50, nr 1
- [10] CAUVIN, A.: Verifica approssimata die telai snelli in C.A. appartenenti a telai a nodi spostabili. L'Industria Italiana del Cemento, septembre 1979
- [11] CAUVIN, A.: Check of Validity of an «Equivalent» Slenderness Expression, when Applied to R.C. Multistorey Sway Frames. Research Report Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Università di Pavia, Pavia, Italie, 1982

$f_{cd}$  (10, 20, 30, 40 MPa). Ce qui est affirmé au chapitre «Effort axial» reste donc confirmé.

**Adresse des auteurs:**

Aldo Cauvin, chargé de cours  
 Giorgio Macchi, professeur de structures,  
 Istituto di scienza e tecnica  
 della costruzione,  
 Università di Pavia,  
 Via Luino 12,  
 I-27100 Pavia

Fig. 18. Valeurs de  $\mu$  (comportement linéaire non fissuré des matériaux) - Méthode 2

