

<b>Zeitschrift:</b>	Ingénieurs et architectes suisses
<b>Band:</b>	111 (1985)
<b>Heft:</b>	1-2
<b>Artikel:</b>	Une approche mixte - statique et cinématique - de la largeur efficace de traînage de cisaillement
<b>Autor:</b>	Massonet, Charles / Maquoi, René / Jetteur, Philippe
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-75602">https://doi.org/10.5169/seals-75602</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Une approche mixte — statique et cinématique — de la largeur efficace de traînage de cisaillement

par Charles Massonet, René Maquoi et Philippe Jetteur, Liège

## 1. Introduction

A la suite d'une recherche de l'auteur senior sur les simplifications obtenues en mécanique des matériaux, en conclusion de l'hypothèse d'un corps élastique transversalement rigide [1]<sup>1</sup>, Maquoi et Massonet ont établi une formule simple permettant d'évaluer la largeur efficace due au traînage de cisaillement [2]. Cette formule n'était valable rigoureusement que dans le cas d'une poutre sur deux appuis simples d'extrémité, chargée d'une force transversale uniformément répartie.

Récemment, les auteurs ont montré que, par des modifications simples on pouvait, tout en maintenant l'hypothèse du corps transversalement rigide, généraliser l'applicabilité de ladite formule à tous les modes d'appui et de chargement [3]. Les résultats étaient déduits du principe du minimum de l'énergie complémentaire ; en toute rigueur, il s'agissait d'un principe de type hybride — puisqu'on se donnait simultanément un champ de déformation  $\varepsilon_y (=0)$  et un champ de contrainte  $\sigma_y$  — qui ne permettait donc pas de conférer un quelconque caractère de borne à l'énergie associée.

Des résultats presque identiques à ceux obtenus dans [3] ont été retrouvés par Sedlacek et Bild [4] selon une démarche différente.

Dans le présent mémoire, on présente des approches statique et cinématique. En raison de propriétés bien connues [5], [6], elles fourniront respectivement des bornes inférieure et supérieure de l'énergie associée ; l'écart entre lesdites bornes permettra d'apprécier la divergence entre les solutions. Si le caractère des bornes s'applique bien à l'énergie, il ne s'étend pas à la largeur effective proprement dite.

## 2. Position du problème

On considère une poutre à section en caisson doublement symétrique et faite d'un matériau élastique. Les dimensions sont : longeur  $2L$ , largeur  $B = 2b$  et hauteur  $h$  (fig. 1). On suppose que la poutre est fléchie par une charge uniformément répartie d'intensité  $p$  et par une force concentrée  $P$  appliquée à mi-portée. Ces charges agissent par moitiés au droit de chacune des âmes, de manière à éliminer

### Résumé

On développe deux approches, respectivement cinématique et statique, pour l'évaluation de la largeur efficace de traînage de cisaillement. Les résultats sont comparés à ceux obtenus dans une publication antérieure, où l'on faisait l'hypothèse du matériau transversalement rigide.

toute flexion propre des semelles. Un système d'axes orthogonaux,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  est lié au centre de gravité de la section transversale à mi-portée.

## 3. Considérations énergétiques préliminaires

Considérons un matériau élastique obéissant à la loi :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & E' & 0 \\ E' & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

où  $E_x$ ,  $E_y$  et  $G$  sont des caractéristiques élastiques du matériau, ayant le même ordre de grandeur.

L'énergie potentielle interne  $W$  s'écrit, en négligeant les forces de volume :

$$W = \frac{1}{2} \iint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (2.a.)$$

ou encore :

$$W = \frac{1}{2} \iint (E_x \varepsilon_x^2 + E_y \varepsilon_y^2 + 2 E' \varepsilon_x \varepsilon_y + G \gamma_{xy}^2) dx dy \quad (2.b.)$$

où les déformations sont liées au champ de déplacement ( $u$ ,  $v$ ), cinématiquement admissible, selon les relations bien connues :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \end{aligned} \quad (3.a.b.c.)$$

Un matériau transversalement rigide est caractérisé par le fait que  $\varepsilon_y = 0$ ; pour un tel matériau, l'expression de l'énergie potentielle interne s'écrirait :

$$W = \frac{1}{2} \iint (E_x \varepsilon_x^2 + G \gamma_{xy}^2) dx dy \quad (4)$$

Il est dès lors facile de remarquer qu'un champ de déplacement cinématiquement admissible pour le matériau élas-

tique transversalement rigide restera cinématiquement admissible pour le matériau élastique obéissant à (1). Il permettra donc de trouver une borne énergétique inférieure de la solution exacte. L'énergie interne complémentaire  $W^*$  s'écrit :

$$\begin{aligned} W^* = \frac{1}{2} \iint & \left\{ \frac{E_x E_y}{E_x E_y - E'^2} \right. \\ & \left[ \frac{\sigma_x^2}{E_x} + \frac{\sigma_y^2}{E_y} - 2 \frac{E'}{E_x E_y} \sigma_x \sigma_y \right] + \\ & \left. + \frac{\tau^2}{G} \right\} dx dy \quad (5) \end{aligned}$$

où le champ de contrainte  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  est statiquement admissible, c'est-à-dire satisfait aux équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{,y} &= 0 \\ \tau_{,x} + \sigma_{y,y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.a.b.)$$

Ici, on ne peut imposer a priori  $\sigma_y = 0$ , car du choix de  $\sigma_x$  et  $\tau$ , résulte généralement une valeur non nulle de  $\sigma_y$ , indispensable pour assurer l'équilibre. Dès lors, un champ statiquement admissible pour le matériau élastique transversalement rigide — ayant seulement à satisfaire la première équation d'équilibre — ne reste en général pas statiquement admissible pour le matériau élastique obéissant à (1); il ne peut donc garantir une borne énergétique supérieure de la solution exacte.

On notera au passage que la solution statiquement admissible donnée par Maquoi et Massonet pour le cas de la charge uniformément répartie [2] est la solution exacte pour le matériau ; en effet le champ de contrainte choisi satisfait les équations de compatibilité et d'équilibre en tout point.

## 4. Approche cinématique

Sur base des conclusions obtenues au paragraphe précédent, on peut ici adopter la simplification du corps transversale-

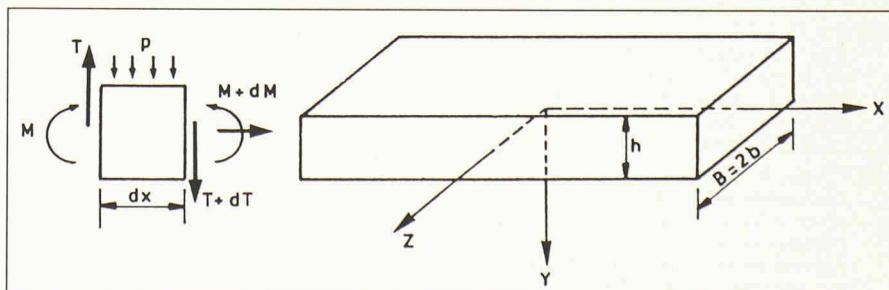


Fig. 1. — Poutre étudiée.

<sup>1</sup>Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

ment rigide sans altérer le caractère de borne énergétique. On aura donc:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (7)$$

On admet aussi que la contribution des âmes à l'inertie de la poutre est négligeable.

La recherche de la solution variationnelle cinématique repose sur le principe du minimum de l'énergie potentielle interne, exprimée comme fonction quadratique des seuls déplacements. Cette énergie prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \pi = & 2 t_s \int_{\Omega_s} \left( \frac{E}{2} u_{s,x}^2 + \frac{G}{2} u_{s,z}^2 \right) \\ & dx dz + 2 t_a \int_{\Omega_a} \left[ \frac{E}{2} u_{a,x}^2 + \frac{G}{2} (u_{a,y} + v_{,x})^2 \right] \\ & dx dy - 2 \int_0^L \frac{p}{2} v dx - \\ & - 2 \frac{P}{2} \Big|_{v_{,x}=0} \end{aligned} \quad (8)$$

avec les notations suivantes:  $t_s$ : épaisseur de semelle;  $t_a$ : épaisseur d'âme;  $u_s$ : déplacement selon  $x$  dans la semelle inférieure;  $u_a$ : déplacement selon  $x$  dans l'âme;  $v$ : déplacement selon  $y$  dans l'âme.

La notation  $(,x)$  (resp.  $,z$ ) placée en indice d'une fonction sert à désigner la dérivée première de ladite fonction par rapport à  $x$  (resp.  $z$ ).

#### 4.1 Choix du champ de déplacement

Le champ de déplacement est défini par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{h}{2} \left[ u_0 + \frac{u_1}{2 b^2} (3 z^2 - b^2) \right] \\ u_a &= y (u_0 + u_1) \quad (9. a. b. c.) \\ v &= v_0 \end{aligned}$$

La distribution des déplacements longitudinaux  $u_s$  dans la semelle est celle de la figure 2.

Les paramètres  $u_0$ ,  $u_1$  et  $v_0$  ne dépendent que de la coordonnée  $x$ ; ils se déterminent à partir des conditions  $\delta \pi = 0$  exprimant le fait qu'elles rendent minimum l'énergie potentielle totale  $\pi$ .

En introduisant (9. a. b. c.) dans (2), il vient:

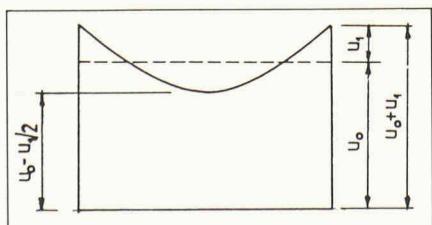


Fig. 2. — Distribution des déplacements axiaux dans la semelle.

$$\begin{aligned} \pi = & \int \left\{ \frac{E}{2} \left[ I u_{0,x}^2 + \frac{\Omega_s}{10} h^2 u_{1,x}^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \frac{G h^2 \Omega_s}{b^2} u_1^2 + 2 \frac{G}{2} \Omega_a (u_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + u_1 + v_{,x})^2 - Pv \right\} dx - Pv \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (10)$$

avec:

- $\Omega_s = 2 b t_s$ : aire de la section transversale d'une semelle;
- $\Omega_a = h t_a$ : aire de la section transversale d'une âme;
- $I = \Omega_s h^2 / 2$ : inertie de la poutre réduite à ses seules semelles.

#### 4.2 Détermination des paramètres $u_0$ , $u_1$ , $v$

Les variations de  $\pi$  par rapport aux paramètres  $u_0$ ,  $u_1$  et  $v$  fournissent les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \delta u_0 \rightarrow & \int [EI u_{0,x} \delta u_{0,x} + 2 G \Omega_a (u_0 + \\ & + u_1 + v_{,x}) \delta u_0] dx = 0 \\ \delta u_1 \rightarrow & \int \left[ \frac{E \Omega_s h^2}{10} u_{1,x} \delta u_{1,x} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \frac{G h^2 \Omega_s}{b^2} u_1 \delta u_1 + 2 G \Omega_a (u_0 + \right. \\ & \left. + u_1 + v_{,x}) \delta u_1 \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (11. a. b. c.)$$

$$\begin{aligned} \delta v \rightarrow & \int [2 G \Omega_a (u_0 + u_1 + v_{,x}) \delta v_{,x} - \\ & - p \delta v] dx - P \delta v \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

De la relation (11.c.), on tire après intégrations par parties:

$$-p - 2 G \Omega_a (u_0 + u_1 + v_{,x})_{,x} = 0 \quad (12. a.)$$

$$[2 G \Omega_a (u_0 + u_1 + v_{,x}) - P] \delta_v \Big|_{0-}^{0+} = 0 \quad (12. b.)$$

d'où on déduit immédiatement,  $T$  désignant l'effort tranchant total:

$$2 G \Omega_a (u_0 + u_1 + v_{,x}) = T \quad (13)$$

Cet effort tranchant est discontinu sous la charge concentrée; ailleurs, on a:

$$T_{,x} = -p \quad (x \neq 0).$$

En intégrant par parties les relations (11.a.) et (11.b.), on obtient les équations différentielles suivantes:

$$EI u_{0,xx} - T = 0 \quad (14)$$

$$-\frac{E \Omega_s h^2}{10} u_{1,xx} + \frac{3}{2} \frac{G \Omega_s h^2}{b^2} u_1 + T = 0 \quad (15)$$

L'équation (14) permet de retrouver la solution élémentaire de la mécanique des matériaux:

$$u_{0,x} = \int \frac{T dx}{EI} = \frac{M}{EI} \quad (16)$$

qui traduit simplement la loi de Navier; les contraintes dues à  $u_0$  sont données par:

$$\sigma = E u_{0,x} \frac{h}{2} = Mh/2I.$$

Quant à l'équation (15), elle permet de déterminer la correction à apporter à la Mécanique des Matériaux; dans le cas de la figure 1, l'effort tranchant varie linéairement le long d'un demi-axe  $0x$  et présente une discontinuité en  $x = 0$ . On trouve d'emblée la solution particulière:

$$u_1^0 = -\frac{2 T b^2}{3 G \Omega_s h^2} \quad (17)$$

tandis que la solution générale de l'équation (15) rendue homogène s'écrit:

$$u_1^{00} = A e^{-\omega x} + B e^{\omega x} \quad (18)$$

$$\text{où: } \omega^2 = 15 \frac{G}{Eb^2} \quad (19)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  se déterminent par les conditions aux limites suivantes, pour le domaine des  $x$  positifs:

$$\begin{array}{ll} \text{en } x = 0 & u_1 = 0 \\ \text{en } x \rightarrow \infty & u_1 = \text{constante finie.} \end{array}$$

On en tire aisément:

$$A = \frac{T_0 + b^2}{3 GI} \quad B = 0$$

En désignant par  $T_{0+}$  et  $T_{0-}$  les valeurs respectives de l'effort tranchant  $T$  à droite et à gauche de la charge concentrée, on a donc, compte tenu de  $I = \Omega_s h^2 / 2$ :

$$u_1 = u_1^0 + u_1^{00} = -\frac{b^2}{3 GI} \quad (20. a.)$$

$(T - T_{0+} e^{-\omega x})$  pour  $x > 0$

$$\begin{array}{l} \text{et tenant compte que } u_1(-x) = -u_1(x), \\ \text{on obtient par analogie:} \end{array}$$

$$u_1 = -\frac{b^2}{3 GI} (T - T_{0-} e^{-\omega x}) \quad (20. b.)$$

Dans le cas de charge symétrique envisagé ici (fig. 1), on a:  $T_{0+} = -T_{0-}$ , d'où:

$$\Delta T = T_{0+} - T_{0-} = -P$$

$$T(x > 0) = -\left( px + \frac{P}{2} \right)$$

$$T(x < 0) = -\left( px - \frac{P}{2} \right)$$

Les contraintes additionnelles dans la semelle, associées au déplacement  $u_1$ , valent:

$$\Delta \sigma_x \equiv Eu_{1,x} \frac{h}{4 b^2} (3 z^2 - b^2) \quad (21)$$

et sont auto-équilibrées pour toute expression de  $u_{1,x}$ . Il est en effet facile de voir que  $\int_{-b}^b \Delta \sigma dz = 0$ . Compte tenu des expressions (20) de  $u_1$ , les contraintes (21) sont maximales en  $x = 0$  et valent à la jonction âme-semelle ( $z = \pm b$ ):

$$\begin{aligned} (\Delta \sigma)_{\max} &= \left( Eu_{1,x} \frac{h}{2} \right)_{x=0} = \\ &= -\frac{Eh}{2} \frac{b^2}{3 GI} \left( -p + \frac{\omega \Delta T}{2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

### 4.3 Largeur efficace

La largeur efficace réduite de la semelle est définie par :

$$\psi = \frac{\text{contrainte moyenne } \bar{\sigma}_x}{\text{contrainte maximale } \sigma_{x,\max}} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\sigma_x dy}{\sigma_{x,\max}} \quad (23.a.)$$

où  $\sigma_x$  n'est rien d'autre que la somme de la contrainte  $\sigma_{MM}$ , donnée par la théorie classique de Mécanique des Matériaux, et de la contrainte additionnelle  $\Delta\sigma$  obtenue plus haut. Comme les  $\Delta\sigma$  constituent un état d'autocontrainte, la définition de  $\psi$  ci-dessus se réduit donc, dans la section  $x = 0$ , à :

$$\psi = \frac{\sigma_{MM}}{\sigma_{MM} + (\Delta\sigma_x)_{\max}} \quad (23.b.)$$

$$\text{avec : } \sigma_{MM} = \frac{Mh}{2I}. \quad (24)$$

Tenant compte de (22), (23.b.) et de l'expression (19) de  $\omega^2$ , remplaçant  $b$  par  $B/2$  et, pour plus de généralité, le rapport  $E/G$  par le coefficient d'orthotropie  $k_s$  (voir [2]), on obtient finalement :

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{1}{12} k_s \frac{pB^2}{M} - 0,323 \sqrt{k_s} \frac{\Delta T}{M} B} \quad (25)$$

Dans le cas particulier d'un caisson à semelles non raidies ( $k_s = 2,3$ ), continu sur trois appuis ( $M = -pL^2/8$  et  $\Delta T = 1,25 pL$ ), la valeur de  $\psi$  s'écrit :

$$\psi = \frac{1}{1 + 5,208 \frac{B}{L} - 1,733 \frac{B^2}{L^2}} \quad (26)$$

Le tableau numérique 1 ci-après permet de comparer les valeurs de  $\psi$  obtenues par l'approche statique pour matériau transversalement rigide (voir [3], formule (29')) et cinématique (présent mémoire). On constate que les deux approches fournissent des résultats fort proches.

### 5. Approche statique

#### 5.1 Choix du champ de contrainte

On considère un matériau où  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont simultanément présents en négligeant toutefois l'influence du coefficient de Poisson de manière à aboutir à une formulation aussi simple que possible ; cela revient donc à poser  $E' = 0$  dans (1). Seul le cas de la charge concentrée à mi-portée est analysé ici.

TABLEAU 1: Valeurs de  $\psi$ .

$B/L$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
cinémat.	0,793	0,665	0,507	0,357	0,286	0,247	0,224
statique	0,824	0,705	0,555	0,406	0,330	0,285	0,255

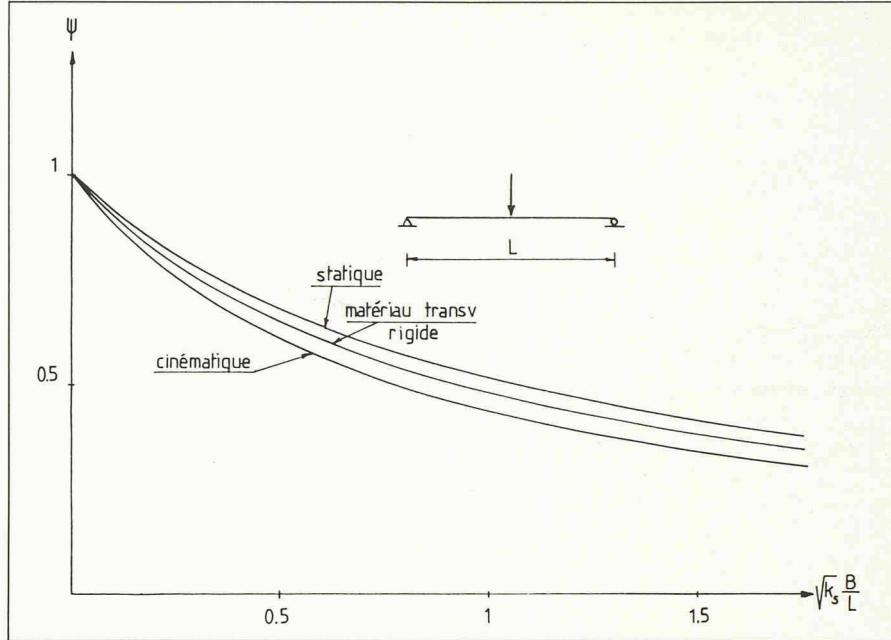


Fig. 3. — Poutre isostatique avec charge concentrée à mi-portée.

$$\text{On a donc: } M = \frac{P}{2}(1-x) \quad (x \geq 0)$$

$$T = -\frac{P}{2} \quad (27.a.b.)$$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on peut se borner à n'étudier qu'une demi-poutre, tant en largeur qu'en longueur.

L'énergie interne complémentaire de la semelle située dans le plan  $xz$  s'écrit :

$$W^* = \frac{1}{2} \iint \left( \frac{\sigma_x^2}{E_x} + \frac{\sigma_y^2}{E_y} + \frac{T^2}{G} \right) dx dz \quad (28)$$

et le principe du minimum de l'énergie interne complémentaire entraîne  $\delta W^* = 0$ . On choisit a priori le champ de contrainte statiquement admissible suivant, dépendant des paramètres  $\sigma_1$  et  $\omega$ .

$$\sigma_x = \frac{Mh}{2I} + \sigma_1 e^{-\omega x/b} \quad \left( z^2 - \frac{b^2}{3} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{\omega^2}{3b^2} \sigma_1 e^{-\omega x/b}$$

$$\left( \frac{z^4}{4} - \frac{b^2 z^2}{2} + \frac{b^4}{4} \right) \quad (29.a.b.c.)$$

$$\tau = -\frac{T h z}{2I} + \frac{\omega}{3b} \sigma_1 e^{-\omega x/b} (z^3 - b^2 z)$$

En se laissant guider par les résultats déjà acquis dans [3].  $\sigma_z$  est choisi tel qu'il s'anule au droit des âmes, celles-ci étant supposées dépourvues de toute raideur flexionnelle pour la flexion hors de leur plan.

#### 5.2 Détermination des paramètres $\sigma_1$ et $\omega$

Comme on ne s'intéresse qu'à la largeur efficace au voisinage immédiat de la charge concentrée, on peut considérer qu'aux extrémités de la poutre, les termes en  $e^{-\omega x/b}$  fournissent une contribution négligeable. En introduisant les relations (29) dans (28) et en effectuant respectivement les variations sur  $\omega$  et  $\sigma_1$  de manière à minimiser  $W^*$ , on obtient :

$$\delta \omega \rightarrow -\frac{1}{E_x \omega^2} + \frac{2}{21} \frac{\omega^2}{E_y} + \frac{2}{21} \frac{\omega^4}{G} = 0$$

$$\delta \sigma_1 \rightarrow \left( \frac{2}{E_x} + \frac{4}{21} \frac{\omega^2}{G} + \frac{4}{63} \frac{\omega^4}{E_y} \right) \sigma_1 = \frac{P h \omega}{2 I b G} \quad (30.a.b.)$$

Éliminant  $\omega$  entre les deux dernières relations, on tire :

$$\sigma_1 = \frac{P h \omega}{2 I b} \cdot \frac{3}{8 \left( \frac{G}{E_x} + \frac{\omega^2}{21} \right)} \quad (31)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{E_y}{G} + \sqrt{\frac{E_y^2}{G^2} + 42 \frac{E_y}{E_x}} \right] \quad (32)$$

#### 5.3 Largeur efficace

A la jonction âme-semelle de la section médiane  $x = 0$ , on a une contrainte longitudinale valant :

$$\sigma_{x,\max} = \frac{Mh}{2I} + \frac{2}{3} b^2 \sigma_1. \quad (33)$$

Puisque la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}_x$  dans la même section est simplement donnée par  $\bar{\sigma}_x = Mh/2I$ , la largeur effective réduite  $\psi$ , définie par (23.a.), s'écrit donc explicitement :

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{P \omega b}{4 M \left( \frac{G}{E_x} + \frac{\omega^2}{21} \right)}} \quad (34)$$

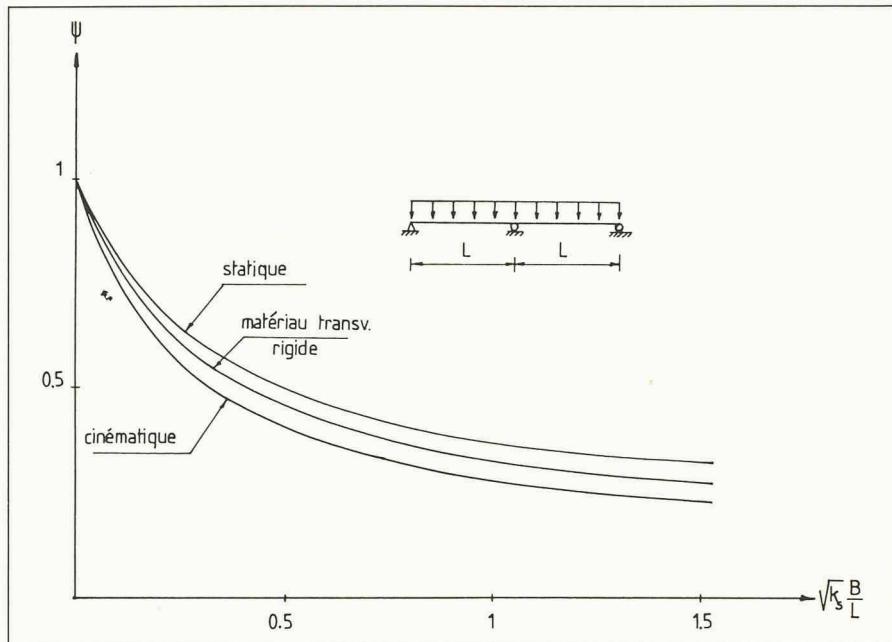


Fig. 4. — Poutre continue à deux travées égales chargées uniformément.

Dans le cas d'une semelle isotrope, on a :  $E_x = E_y$  et en admettant  $E/G = 2,6$  pour les matériaux métalliques,  $\omega^2$  vaut 2,191. La largeur effective vaut alors :

$$\psi = \frac{1}{1 + 0,757 \frac{Pb}{M}} \quad (35)$$

On peut généraliser au cas d'une charge supplémentaire uniformément répartie, on trouve aisément :

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{E pb^2}{G M} + \frac{P \omega b}{4 M \left( \frac{G}{E_x} + \frac{\omega^2}{21} \right)}} \quad (36)$$

Il n'y a plus de relation simple entre  $\omega$  et  $k_s$  et il n'est plus possible d'obtenir une formule générale équivalente à (25). Dans le cas d'un matériau isotrope, pour lequel  $k_s = 2,6$ , on a :

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{1}{12} k_s \frac{pB^2}{M} - 0,235 \sqrt{k_s} \frac{\Delta T \cdot B}{M}} \quad (37)$$

puisque  $B = 2 b$  et  $\Delta T = -P$ .

##### 5. Conclusions générales

L'expression de la largeur efficace réduite s'écrit, en toute généralité, sous la forme simple suivante :

$$\psi = \frac{1}{1 - \alpha \sqrt{k_s} \frac{BAT}{M} + \frac{k_s}{12} \frac{pB^2}{M}} \quad (38)$$

où  $k_s$  est un coefficient d'orthotropie (pour plus de détails, consulter [2], [3]), qui dans le cas d'une semelle isotrope se réduit au rapport  $E/G$ .

En développant successivement l'approche «exacte» ( $r$ ) pour le matériau transversalement rigide [3], puis l'approche cinématique ( $c$ ) et l'approche sta-

tique ( $s$ ), on trouve que le coefficient  $\alpha$  correspondant prend les valeurs ci-après :

$$\alpha_r = 0,270 \quad \alpha_c = 0,323 \quad \alpha_{st} = 0,235$$

Cette dernière valeur  $\alpha_{st}$  n'est valable que pour un matériau isotrope; si la valeur de  $k_s$  augmente, elle se rapproche de  $\alpha_r$ .

Les figures 3 et 4 fournissent respectivement les résultats obtenus pour la largeur efficace d'une part, à mi-portée d'une poutre sur deux appuis, chargée d'une force concentrée dans cette même section, et d'autre part, sur l'appui intérieur d'une poutre continue à deux travées égales, chargée uniformément. On observera que l'approche basée sur l'hypothèse du matériau transversalement rigide est sensiblement la moyenne des deux autres.

Tout en gardant à l'esprit que, en toute rigueur, les solutions proposées ne don-

##### Bibliographie

- [1] MASSONNET Ch.: *A New Approach (Including Shear Lag) to Elementary Mechanics of Materials*. International Journal of Solids and Structures, vol. 15, n° 1, 1983, pp. 33-54.
- [2] MAQUOI R. et MASSONNET Ch.: *Une évaluation simple de la largeur efficace de traînage de cisaillement*. Construction métallique, n° 2, 1982, pp. 17-24.
- [3] JETTEUR Ph., MAQUOI R. et MASSONNET Ch.: *A Simple General Solution of the Shear Lag Phenomenon*. Fest-schrift Roik, Mitteilung nr. 84-3, Technisch-Wissenschaftliche Mitteilungen, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Sept. 1984, pp. 74-90.
- [4] SEDLACEK G. et BILD S.: *Simplified Rules for the Determination of the Effective Width of Bridge Decks caused by Shear Lag*. Verba volant, scripta manent. Volume d'hommage au professeur Massonet, Liège, 1984, pp. 333-348.
- [5] FRAEIJIS DE VEUBEKE F.: *Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis*. AGARDograph, 72, 165, Pergamon Press, 1964.
- [6] FRAEIJIS DE VEUBEKE F.: *Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method*. Stress Analysis,

ment des bornes que pour l'énergie, le faible écart entre les courbes obtenues donne à penser que l'approche préconisée fournit des résultats fort voisins de la solution exacte.

##### Auteurs :

Charles Massonet,  
professeur honoraire  
René Maquoi,  
chargé de cours associé  
Philippe Jetteur,  
ancien chercheur IRSIA  
Université de Liège  
Institut du génie civil  
Quai Banning 6, 4000 Liège (Belgique)

## Ultimate Load Behaviour of Longitudinally and Transversally Web Plates Loaded in Shear

by. Michele Mele, Rome and Roberto Puhalo, Trieste

### 1. Introduction

In more recent years a lot of experimental and theoretical work has been devoted to the study of stiffened web panels loaded beyond the critical load until the point of collapse. Among the design methods which have been developed as a result of these research works the one by Rockey, Evans and Porter [1]<sup>1</sup> named Cardiff Method, is well known and has already been introduced into some codes. Ano-

### Summary

The paper briefly reports a general method for designing stiffened webs loaded in shear, which allows for any kind of stiffening. The cases of compact and stiffened flanges are separately dealt with. The theoretical procedures, the experimental and numerical research programmes carried out during the last ten years, as well as the comparison with other design methods are described.

ther design method, named Trieste Method [2], was proposed by the authors [3], [4] and was introduced into the Italian Code in 1973. Its main features are to

<sup>1</sup> See references at the end,