

**Zeitschrift:** Ingénieurs et architectes suisses  
**Band:** 109 (1983)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Calcul graphique des assises de machines  
**Autor:** Paschoud, Jacques / Wieser, Philippe  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-74916>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Calcul graphique des assises de machines

par Jacques Paschoud, Grandvaux, et Philippe Wieser, Romanel

**Le but du présent travail est de présenter une méthode graphique pour le calcul du mouvement plan des assises de machines dont la suspension et l'amortissement sont assurés par des matériaux visco-élastiques, tels les lièges, caoutchoucs naturels et artificiels, ainsi que les polymères. L'angle de frottement interne de ces matériaux peut être considéré comme pratiquement indépendant de la fréquence des oscillations.<sup>1</sup> Après avoir écrit les équations des petits mouvements dans le plan vertical, perpendiculaire à l'axe de rotation de la machine dans le cas des assises actives, on en développe une méthode de résolution graphique.**

## 1. Les assises actives

(isolation du sol contre les vibrations d'une machine rotative)

### 1.1 Les équations des petits mouvements

La figure 1 montre une coupe verticale de l'assise, et du système rotatif suspendu, par un plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation. Les suspensions sont *idéalisées* en séparant leurs actions horizontale et verticale sur un point quelconque  $I$  de l'assise.

Pour appliquer le principe de d'Alembert, les forces et moments appliqués à l'assise se composent de la manière suivante:

— Notations:

$M$  = Masse totale suspendue

$\rho$  = son rayon de giration en  $G$

$m$  = masse du balourd

$r$  = rayon du balourd

$P$  =  $Mg$

$P_i$  = partie de  $P$  réagissant en  $I$

$K$  = caractéristique élastique des suspensions

$f$  = coefficient de la vitesse dans la force de frottement.

— Pour le mouvement horizontal ( $x > 0$  vers la droite)

force horizontale perturbatrice<sup>2</sup>:

$-mr\omega^2 \sin \omega t$

force de rappel du «ressort» horizontal:

$-[K_1(x - b\phi) + f_1(\dot{x} - b\dot{\phi})]$

force d'inertie<sup>3</sup>:

$-M\ddot{x}$

En sommant à tous les points  $I$ :

$M\ddot{x} + \sum [K_1(x - b\phi) +$

$+f_1(\dot{x} - b\dot{\phi})] =$

$-mr\omega^2 \sin \omega t$

— Pour le mouvement vertical ( $y > 0$  vers le haut)

force verticale perturbatrice<sup>2</sup>:

$mr\omega^2 \cos \omega t$

force verticale due au poids:  $-P$

force de rappel du «ressort» vertical:

Nous signalons à nos lecteurs que les flèches indiquant des vecteurs sont difficiles à distinguer (p. ex.  $\overline{YK_2}$ ), étant à la limite des possibilités d'impression.

— Pour le mouvement de rotation autour de  $G'$  ( $\phi > 0$ , sens positif de rotation)

couple perturbateur:  $amr\omega^2 \sin \omega t$

couple de rappel des «ressorts»:

$$-l[K_2(y + l\phi) + f_2(\dot{y} + l\dot{\phi})] + \\ + b[K_1(x - b\phi) + \\ + f_1(\dot{x} - b\dot{\phi})] + P_i(l - b\phi)$$

couple d'inertie<sup>3</sup>:  $-M\rho^2 \ddot{\phi}$

d'où (car au centre de gravité  $\sum (IP_i) = 0$ )

$$M\rho^2 \ddot{\phi} + \sum \{ l[K_2(y + l\phi) + \\ + f_2(\dot{y} + l\dot{\phi})] - b[K_1(x - b\phi) + \\ + f_1(\dot{x} - b\dot{\phi})] \} + \sum (P_i b\phi) \\ = amr\omega^2 \sin \omega t$$

## Assises symétriques

Nous nous bornerons au cas des assises symétriques avec points de suspension  $I$  à même hauteur ( $b = Cte$ ).

En constatant alors que les  $\sum ly$  et  $\sum ly$  sont nuls et que  $b$  peut se mettre en

<sup>1</sup> Dans les matériaux visco-élastiques, à une sollicitation vibratoire  $\sigma = \sigma_0 e^{j\omega t}$ , correspond une déformation  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{(j\omega t - \phi_h)}$  déphasée en retard de  $\phi_h$ , angle de frottement interne. On définit alors le module d'élasticité complexe, complexe

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{j\phi_h}$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \phi_h + j \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \phi_h \equiv E_1 + j E_2$$

auquel correspond en cisaillement le module

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\mu)} = G_1 + j G_2. L'angle de frottement interne est donc défini par exemple par  $\tan \phi_h = G_2/G_1$ . Des mesures de  $G_1$  et  $G_2$  faites par Harris C. M., Crede C. E. [« Shock and Vibrations Handbook », McGraw-Hill,$$

New York, 1961], pour 15 matériaux visco-élastiques divers pour des fréquences comprises entre 0,001 Hz et 4000 Hz, donnent des valeurs de  $\phi_h$  pratiquement indépendantes de la fréquence, alors qu'elles devraient lui être proportionnelles si le coefficient  $f_1$  ou  $f_2$  de la vitesse était indépendant de la fréquence comme on l'admet pour les matériaux purement élastiques. Les valeurs mesurées de  $\phi_h$  vont par exemple de 1° pour le polystyrène à 59° pour le polyizobutylène en passant par 30° pour le nitrate de cellulose plastifié.

<sup>2</sup> En considérant 2 vecteurs de Fresnel  $e^{j\omega t}$  et  $e^{j(\omega t - \phi)}$ , on démontre qu'ils ne diffèrent, en module et direction, que d'un infiniment petit de l'ordre de  $\phi$ ; on peut ainsi assimiler  $\omega t - \phi$  à  $\omega t$ .

<sup>3</sup>  $\frac{m}{M}$  étant négligeable vis-à-vis de 1.

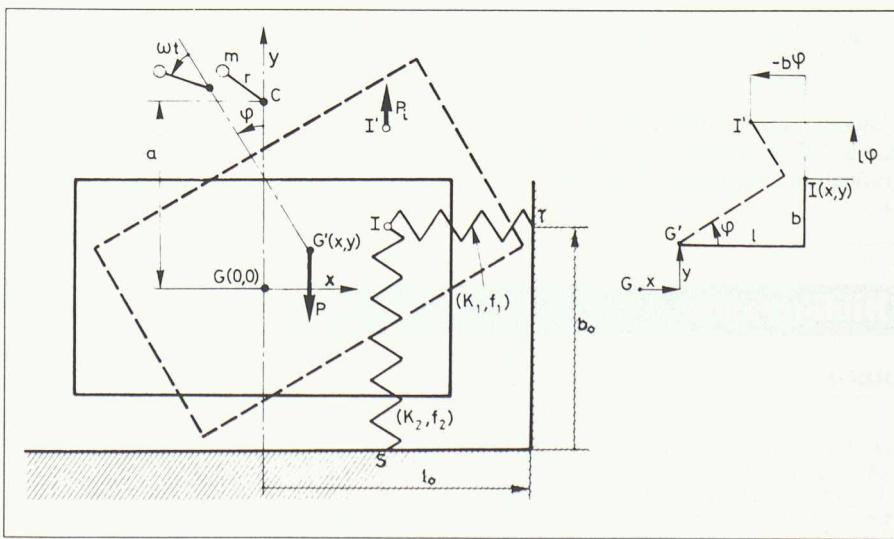


Fig. 1. — Petits mouvements:  $x$ ,  $y$  et  $\phi$  sont considérés comme des infiniment petits du premier ordre.

évidence, les 3 équations se mettent facilement sous la forme:

$$M\ddot{y} + \sum [K_2 y + f_2 \dot{y}] = mr\omega^2 \cos \omega t \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -M\ddot{x} - \sum [K_1(x - b\phi) + f_1(\dot{x} - b\dot{\phi})] \\ = M \frac{\rho^2}{a-b} \ddot{\phi} + M \frac{b}{a-b} \ddot{x} + \\ + \sum \frac{l^2}{a-b} [K_2 \phi + f_2 \dot{\phi}] + \\ + P \frac{b}{a-b} \phi = mr\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2, 3)$$

On constate ainsi que le mouvement en  $y$  est découpé des mouvements en  $x$  et  $\phi$ , couplés entre eux. Les mouvements permanents, qui seuls nous intéressent, seront bien évidemment traduits par des fonctions  $x$ ,  $y$  et  $\phi$  sinusoïdales en  $\omega t$  et représentables graphiquement, de manière bien connue, par des vecteurs de Fresnel.

### 1.2 Etude du mouvement permanent vertical ( $y$ )

Ce mouvement, découpé des deux autres, permet de définir l'assise et sa suspension. Chaque terme de l'équation (1) est représenté dans la figure 2 par le vecteur de Fresnel qui lui correspond. Ces vecteurs sont tracés au temps  $t = 0$  et tournent autour de l'origine 0 dans le sens  $\omega t$  positif indiqué, l'axe  $oy$  restant fixe; leurs projections sur l'axe  $oy$  donnent les valeurs correspondantes instantanées, par exemple  $y \sum K_2$  projection de  $\overrightarrow{Y \sum K_2}$ ,  $Y$  étant l'amplitude de  $y$  et l'angle  $\beta$ , la phase du mouvement vertical.

*On remarque*

—  $\overrightarrow{F_y}$  est le vecteur de Fresnel de module égal à l'amplitude de la force verticale transmise au sol;

—  $\operatorname{tg} \phi_b = \frac{\omega \sum f_2}{\sum K_2} = Cte$ , où  $\phi_b$  est l'angle constant de frottement interne du matériau visco-élastique des suspensions («constant» signifie ici «indépendant de  $\omega$ »).

### 1.3 Définition de l'assise

Le cahier des charges de l'assise fixe les amplitudes maximales  $F_y$ , de la force verticale transmise au sol et  $Y$ , de la vibration verticale de l'assise, pour une force centrifuge maximale  $mr\omega^2$  de ballourd (précision d'équilibrage) à vitesse donnée ( $\omega$ ). L'angle  $O1A$ , égal aussi à  $\phi_b$ , étant constant, en fonction de données variables  $M$  et  $\sum K_2$  de l'assise le point 1 se déplace sur un cercle de centre  $C$ , lieu des points sous lesquels le vecteur  $mr\omega^2$  est vu sous l'angle  $\phi_b$ , connu dès le choix fait du matériau de suspension. L'angle  $\beta$  est alors fixé de façon que l'amplitude  $F_y$  ait la valeur maximale imposée, et  $M$  de manière à réaliser  $Y_{max}$ , ce qui définit la rigidité verticale  $\sum K_2$  de la suspension. On observe que l'angle  $\beta$  doit être plus grand que  $\beta$  limite, correspondant au point 1' tel que  $\overline{O1} = \overline{OA} = mr\omega^2$ , lui-même plus grand que  $\frac{\pi}{2}$ , pour que l'amplitude  $F_y$  soit inférieure à  $mr\omega^2$  (force transmise au sol sans assise).

Dans ces conditions l'étude importante des variations de  $F_y$  et  $Y$  pendant le lancement de la machine, soit en fonction de  $\omega$ , peut se faire par la même figure 2, en divisant tous les modules des vecteurs par  $\omega^2$  de façon à garder  $OA = mr = Cte$ : ce sont les modules entre parenthèses. Lorsque  $\omega$  varie, pour une assise donnée ( $M$  et  $\sum K_2 = Ctes$ ), le point 1 extrémité de  $(F_y/\omega^2)$  se déplace sur le même cercle de centre  $C$ . On observe

que l'on passe par le point 1'' où l'amplitude  $Y$  (définie par  $1''A = MY =$  diamètre) est maximale: c'est la *résonance avec frottement* obtenue à la pulsation  $\omega = \frac{1}{\cos \phi_b} \sqrt{\frac{\sum K_2}{M}}$  qui résulte de la géométrie de la figure; comme  $\frac{\sum K_2 Y}{F_y} = \cos \phi_b = Cte$ ,  $F_y$  est également maximale.

### 1.4 Etude des mouvements couplés de translation horizontale ( $x$ ) et de rotation ( $\phi$ )

L'assise ayant été déterminée ( $M$  et  $\sum K_2$ ) par les conditions du mouvement vertical, le choix des formes des suspensions et du massif fixe  $\sum K_1$  et  $\rho$ ; il convient de vérifier ce choix par l'étude des mouvements couplés de translation horizontale ( $x$ ) et de rotation ( $\phi$ ) pour en connaître les amplitudes  $X$  et  $\Phi$  maximales, pendant le lancement, et en service.

Au temps  $t = 0$ , chaque terme des équations (2, 3) est représenté dans la figure 3 par le vecteur de Fresnel correspondant. L'axe  $t = 0$  restant fixe, toute la figure tourne dans le sens positif  $\omega t$ , les projections des vecteurs sur cet axe donnent également les valeurs instantanées.

Le tracé de l'équation (2) est déterminé par le polygone  $O1XB2R$  aboutissant à l'extrémité  $R$  de  $mr\omega^2$  perpendiculaire à l'axe  $t = 0$ ; le tracé de l'équation (3) est déterminé par le polygone  $O34567R$  aboutissant à la même extrémité  $R$ . On remarque immédiatement qu'en traçant le parallélogramme  $7RBA$ , on obtient ainsi, aboutissant au même point  $A$ , les deux polygones:  $O1XA$  ne contenant que des vecteurs en  $X$  et  $O34567A$  ne contenant que des vecteurs en  $\Phi$ . Ceci conduit directement à la solution graphique pour un  $\omega$  donné:

1) tracer un polygone  $O34567A$  (dit polygone  $\Phi$ ) pour une direction  $\overline{\Phi}$  choisie ( $\overline{O5}$  au temps  $t = 0$ ), par exemple verticale, pour une valeur  $\Phi$  choisie (par exemple 1 rad) et à une échelle convenable; on aboutit à un point  $A_\Phi$ ;

2) tracer, sur un calque, un polygone  $O1XA$  (dit polygone  $X$ ) également pour une direction  $\overline{X}$  choisie ( $\overline{1O}$  au temps  $t = 0$ ), par exemple également verticale, pour une valeur  $X$  choisie (par exemple 1 mm) et à la même échelle que le polygone  $\Phi$  (si l'échelle devait être différente, on en tiendrait compte ultérieurement dans la mesure du rapport  $OA_x/OA_\Phi$ ); on aboutit à un point  $A_x$ ;

3) le rapport  $n = \frac{\Phi/\text{rad}}{X/\text{mm}} = \frac{OA_x}{OA_\Phi}$ . La superposition des directions des vecteurs  $\overrightarrow{OA_x}$  et  $\overrightarrow{OA_\Phi}$  donne la position relative des deux polygones  $\Phi$  et  $X$ . Enfin, en traçant sur le polygone  $\Phi$ , et à partir du point 7, le vecteur  $\overline{7R} = \frac{\omega^2 M}{n}$

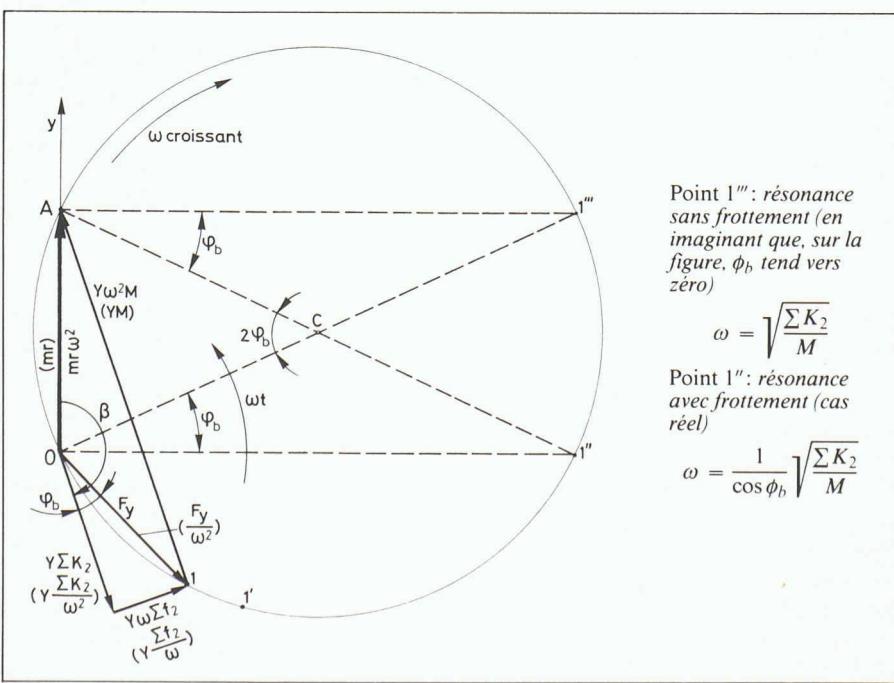
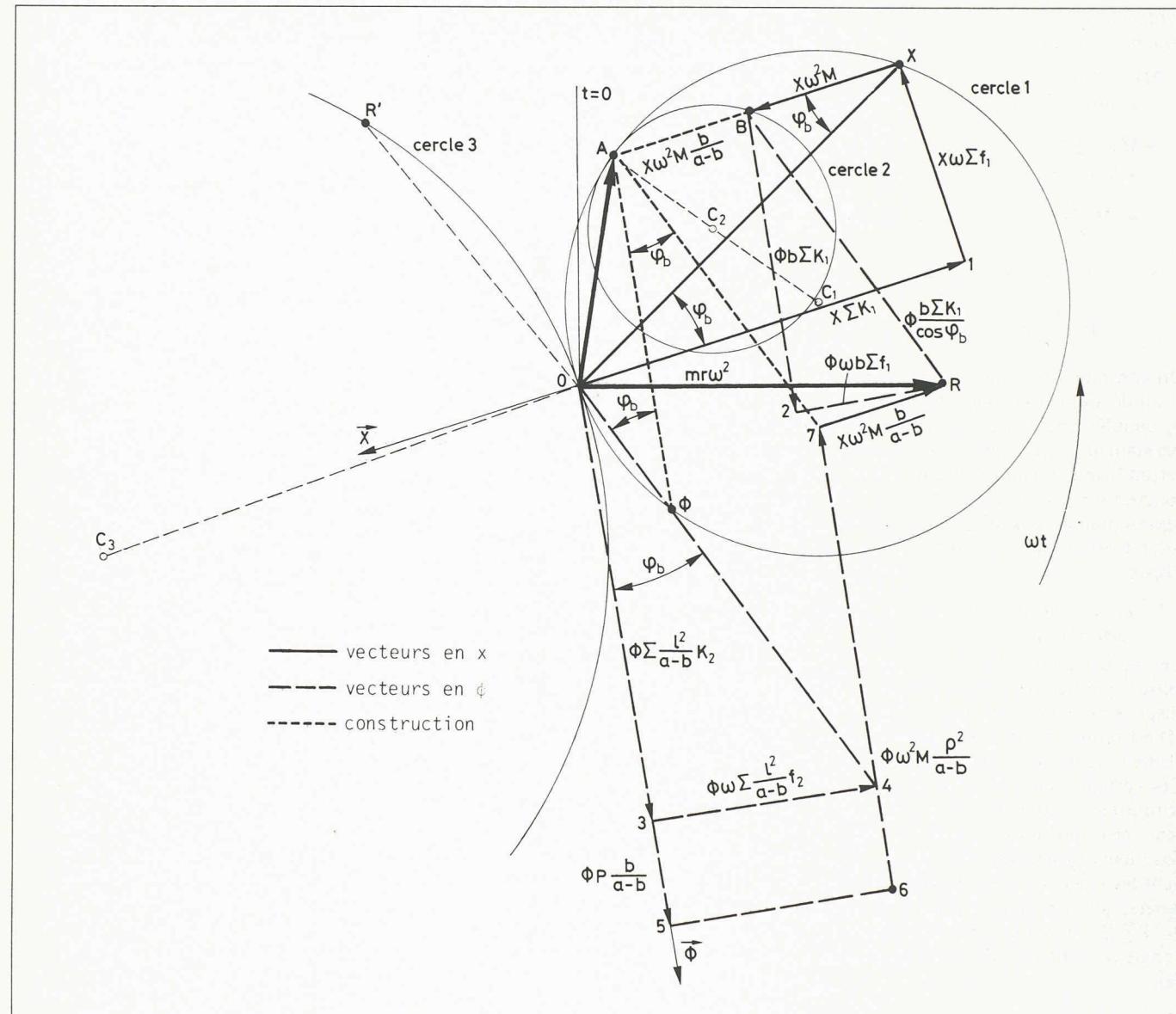


Fig. 2.

Fig. 3. — Figure tracée avec  $b > 0$ .

$$OX = X \frac{\Sigma K_1}{\cos \phi_b}$$

$$XA = X \omega^2 M \frac{a}{a-b}$$

$$O\Phi = \Phi \frac{\sum \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1}{\cos \phi_b}$$

$$\Phi A = \Phi \left[ \omega^2 M \frac{\rho^2}{a-b} - P \frac{b}{a-b} \right]$$

$\frac{b}{a-b}$ , le vecteur  $\overline{OR}$  ainsi formé, correspondant à  $m\overline{\omega}^2$ , fixe les échelles vraies des deux tracés en  $X$  et  $\Phi$  et détermine ainsi  $\bar{X}$  et  $\bar{\Phi}$  en direction et module pour cette valeur de  $\omega$ .

### 1.5 Etudes des mouvements $x$ et $\phi$ en fonction de $\omega$ (graphique des trois cercles)\*

La solution graphique précédente, répétée pour un assez grand nombre de valeurs de  $\omega$ , devient vite lassante. Des considérations géométriques permettent cependant de simplifier considérablement la répétition des opérations.

- Si l'on trace à partir du point  $A$  la parallèle  $A\Phi$  à  $O35$ , on voit du point  $\Phi$  le vecteur  $\overline{OA}$  sous l'angle constant  $\phi_b$ ; il en est de même du point  $X$ . Il est possible de considérer un tracé où le vecteur  $\overline{OA}$  reste fixe en grandeur et direction à condition de lui faire correspondre, à chaque instant, une échelle et une direction de l'axe  $t = 0$  à déterminer

par le vecteur  $\overline{mr\omega^2}$ , trouvé à partir du point  $B$  en traçant  $\overline{BR}$ . Les points  $X$  et  $\Phi$  de ce tracé décrivent donc un même cercle, noté cercle 1 sur la figure 3, en fonction de  $\omega$ .

- Le point  $B$ , étant sur  $XA$  à distance de  $A$  telle que  $\frac{\overline{BA}}{\overline{XA}} = \frac{b}{a} = Cte$ , décrit un cercle, noté cercle 2 sur la figure 3, passant par  $A$  et de centre  $C_2$  sur  $OC_1$  tel que  $\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{b}{a}$ . On notera que la figure 3 est tracée conventionnellement avec  $b > 0$ , alors que généralement  $b$  est  $< 0$  et que le cercle 2 serait donc extérieur au cercle 1.

- L'équation (2) montre que pour trouver le vecteur de Fresnel  $F_x$  correspondant à la force horizontale transmise au sol, on doit porter à partir de  $X$  un vecteur identique à  $\overline{BR}$ , tout comme on doit tracer ce même vecteur  $\overline{BR}$  pour trouver  $m\overline{\omega}^2$ . Au lieu de faire ces deux opérations parallèles, il est tout indiqué

de porter à partir de  $O$  un vecteur  $\overline{OR'}$  de sens opposé et de même module que  $\overline{BR}$ .  $\overline{R'B}$  est égal à  $m\overline{\omega}^2$  et  $\overline{R'X}$  est égal à  $\overline{F_x}$ . On notera que

$$\frac{\overline{OR'}}{\overline{O\Phi}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{O\Phi}} = \frac{b \sum K_1}{\sum \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1}$$

indépendant de  $\omega$ ;  $R'$  décrit donc un cercle, noté cercle 3 sur la figure 3, de centre  $C_3$  sur la droite  $C_1O$  et tel que

$$\frac{\overline{OC_3}}{\overline{C_1O}} = \frac{b \sum K_1}{\sum \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1}$$

Il reste à connaître la position des points  $\Phi$  et  $X$  sur le cercle 1 en fonction de  $\omega$ . Calculons:

$$\rho_x = \frac{\overline{OX}}{\overline{XA}} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\sum K_1}{M \frac{a}{a-b} \cos \phi_b}$$

\* Voir remarque en encadré à la page précédente.

$$\rho_\phi = \frac{\overline{O\Phi}}{\overline{\Phi A}}$$

$$= \frac{\Sigma \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1}{\omega^2 M \frac{\rho^2}{a-b} \cos \phi_b \left( 1 - \frac{Pb}{\omega^2 M \rho^2} \right)}$$

d'où

$$R' = \frac{\rho_x}{\rho_\phi}$$

$$= \frac{\rho^2}{a} \frac{\Sigma K_1}{\Sigma \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1} \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{Pb}{\omega^2 M \rho^2} \right)$$

et en remplaçant  $\frac{1}{\omega^2}$  par son expression en  $\rho_x$ , on peut écrire

$$R' = R (1 - C \rho_x)$$

avec

$$R = \frac{\rho^2}{a} \frac{\Sigma K_1}{\Sigma \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1}$$

$$C = \frac{P \frac{ab}{a-b} \cos \phi_b}{\rho^2 \sum K_1}$$

sans dimension et indépendants de  $\omega$ .

Cette relation permet, comme on va le montrer, de déterminer sur le cercle 1 un des deux points  $X$  ou  $\Phi$ , l'autre étant choisi.

Considérons le cercle 1, les points  $O$ ,  $A$ ,  $X$  et un point quelconque  $D$  également

sur le cercle. Effectuons la construction suivante (fig. 4):

parallèlement à  $DO$  traçons deux droites, l'une dite  $[\Phi]$  à distance  $l$  arbitraire, l'autre dite  $[X]$  à distance  $R'$ . De  $D$  projetons  $X$  sur  $[X]$ , d'où le point  $(X)'$ ; menons par  $(X)'$  une parallèle à  $DA$  qui coupe  $[\Phi]$  au point  $(\Phi)$  et projectons, de  $D$ , le point  $(\Phi)$  sur le cercle, en  $\Phi$ . Montrons que ce point est le point  $\Phi$  cherché. La droite  $DA$  coupe les droites  $[\Phi]$  et  $[X]$  respectivement en  $O_\phi$  et  $O'_x$ . Les triangles  $AXO$  et  $(X)'O'_x D$  sont semblables (deux angles égaux: en  $X$  et  $O'_x = \phi_b$  et en  $O$  et  $D$ : même arc  $\widehat{AX}$ ); les triangles  $A\Phi O$  et  $(\Phi)O_\phi D$  sont semblables (deux angles égaux: en  $\Phi$  et  $O_\phi = \phi_b$  et en  $O$  et  $D$ : même arc  $\widehat{A\Phi}$ ). Ainsi

$$\rho_x = \frac{\overline{OX}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{DO'_x}}{\overline{O'_x(X)'}}$$

et

$$\rho_x = \frac{\overline{O\Phi}}{\overline{\Phi A}} = \frac{\overline{DO_\phi}}{\overline{O_\phi(\Phi)}}$$

et par division membre à membre

$$R' = \frac{\rho_x}{\rho_\phi} = \frac{\overline{DO'_x}}{\overline{DO_\phi}} \cdot \frac{\overline{O_\phi(\Phi)}}{\overline{O'_x(X)'}}$$

or par construction  $\overline{O_\phi(\Phi)} = \overline{O'_x(X)'}$  et  $\frac{\overline{DO'_x}}{\overline{DO_\phi}} = R'$  c.q.f.d.

En soi, cette construction n'est guère intéressante puisque  $R'$  dépend de  $\omega$  par  $\rho_x$ . Mais supposons tout d'abord que la constante  $C$ , dans  $R'$ , est nulle. La construction faite avec  $R'$  doit être faite

avec  $R$  indépendant de  $\omega$ , avec la droite  $[X]$  au lieu de  $[X]'$ . Partant alors de  $\Phi$  choisi, nous trouverons comme précédemment un point  $(X)''$  sur  $[X]$  au lieu du vrai point  $(X)$  projection de  $X$  par  $D$  sur  $[X]$ . Si l'on connaissait la distance  $(X)''(X)$ , il serait alors possible de trouver le point  $X$  sur le cercle par une construction unique, quel que soit  $\omega$ . Calculons  $(X)''(X)$ :

par construction:  $\overline{O'_x(X)'} = \overline{O_x(X)''}$

par triangles semblables

$$\frac{\overline{O'_x(X)'}}{\overline{O_x(X)''}} = \frac{R'}{R}$$

d'où

$$\overline{O_x(X)''} = \frac{R'}{R} \overline{O_x(X)}$$

$$= (1 - C p_x) \cdot \overline{O_x(X)}$$

Or  $\rho_x = \frac{\overline{OX}}{\overline{XA}}$  par définition, et par triangles semblables:

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{DO'_x}}{\overline{O'_x(X)'}} = \frac{\overline{DO_x}}{\overline{O_x(X)}}$$

d'où

$$\overline{O_x(X)''} = \overline{O_x(X)} \cdot \left( 1 - C \frac{\overline{DO_x}}{\overline{O_x(X)}} \right)$$

$$= \overline{O_x(X)} - C \cdot \overline{DO_x}$$

et enfin:

$$\overline{O_x(X)} - \overline{O_x(X)''}$$

$$= (X)''(X) = C \cdot \overline{DO_x}$$

$$= Cte indépendante de \omega.$$

Si donc on porte, à partir de  $O_\phi$  et sur  $[\Phi]$ , le segment  $\overline{O'_\phi O_\phi} = C \cdot \overline{DO_x}$  les droites  $O'_\phi O_x$  et  $(\Phi)(X)$  sont parallèles. D'où la

*Construction finale* pour trouver, sur le cercle 1, un des deux points  $X$  ou  $\Phi$ , l'autre étant donné:

- 1) Choisir un point  $D$  judicieusement placé<sup>4</sup> sur le cercle 1.
- 2) Tracer les droites  $[\Phi]$  et  $[X]$  parallèlement à  $DO$  et à distance 1 et  $R'$  (échelle arbitraire) avec

$$R = \frac{\rho^2}{a} \frac{\Sigma K_1}{\Sigma \frac{l^2}{a-b} K_2 - b \sum K_1}$$

on trouve les points origines  $O_\phi$  et  $O'_x$  sur  $DA$ .

- 3) Sur la droite  $[\Phi]$ , porter le segment  $\overline{O'_\phi O_\phi} = C \cdot \overline{DO_x}$  avec

$$C = \frac{P \frac{b}{a-b} \cos \phi_b}{\rho^2 \sum K_1}$$

et  $\overline{DO_x}$  étant compté à l'échelle du segment 1 (si  $C > 0$ ,  $O'_\phi$  est à gauche de  $O_\phi$ ; si  $C < 0$ ,  $O'_\phi$  est à droite de  $O_\phi$ ).

<sup>4</sup> Pour les maxima des modules  $X$ ,  $\Phi$  et  $F_x$ , les points  $X$  et  $\Phi$  étant voisins de  $A$  sur le cercle 1,  $D$  sera voisin du point diamétralement opposé à  $A$ .

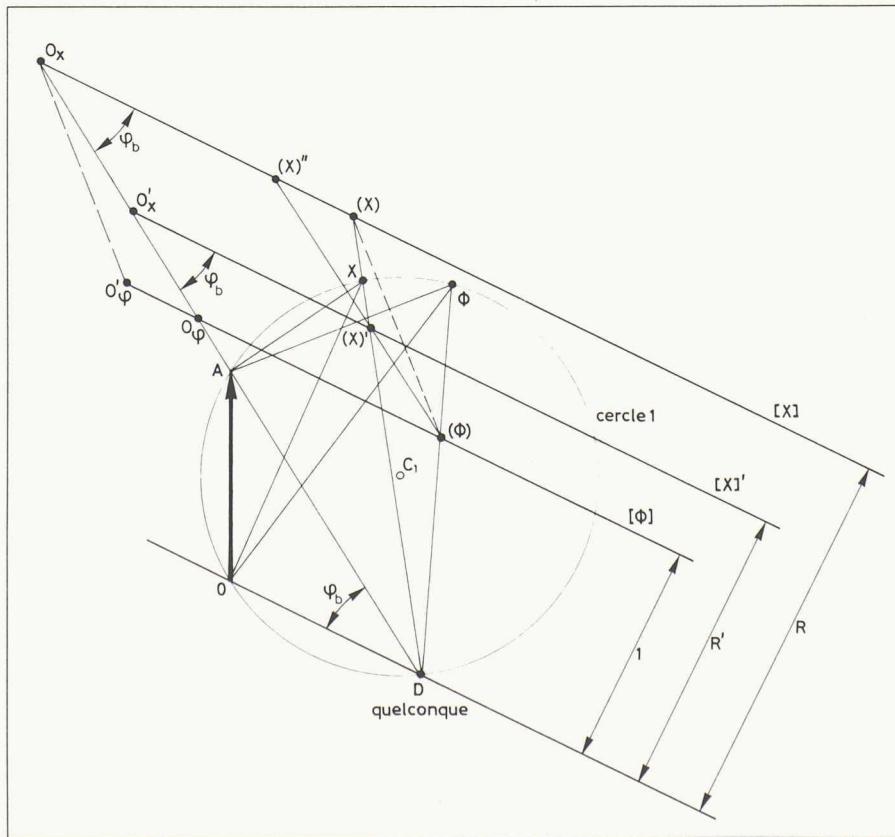


Fig. 4. — Figure faite pour  $a > b > 0$ , donc  $c > 0$ .

4) Sur les droites  $[X]$ , à partir de  $O_x$ , et  $[\Phi]$  à partir de  $O'_\phi$ , vers la droite, porter deux échelles millimétriques cotées.

5) Les projections par  $D$  des deux points de même cote sur  $[X]$  et  $[\Phi]$  donnent les points  $X$  et  $\Phi$  qui se correspondent sur le cercle 1.

— La construction des cercles 2 et 3 de la figure 3 donne, pour chaque point  $X$  ou  $\Phi$ , les points  $B$  et  $R'$  déterminant  $mr\omega^2$  par  $\overline{R'X}$  (donc l'échelle relative à  $mr\omega^2$  et les phases) ainsi que le vecteur de Fresnel  $\overline{F}_x$  par  $\overline{RX}$ .

— Si un point  $X$  ou  $\Phi$  correspond à des résultats particuliers, on pourra trouver la valeur de  $\omega$  par l'intermédiaire de

$$\rho_x = \frac{\overline{OX}}{\overline{XA}} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\sum K_1}{M \frac{a}{a-b} \cos \phi_b}$$

### 1.6 Composition des forces agissant sur le sol (fig. 5)

Par rapport aux forces considérées jusqu'ici, appliquées sur l'assise, les forces agissant sur le sol sont les réactions aux forces transmises à l'assise par les suspensions. L'action de la rotation rend opportun de décomposer la résultante des forces en une résultante à droite et une résultante à gauche du centre de gravité  $G$  de l'assise. En admettant, à titre d'exemple, que les figures 2 et 3 correspondent à une même assise, nous reprenons *en les inversant*, pour en avoir les réactions, les vecteurs de Fresnel  $\overline{F}_y = \overline{OI}$  de la figure 2 et  $\overline{F}_x = \overline{R'X}$  de la figure 3, en agrandissant  $\overline{F}_x$  pour que les vecteurs  $mr\omega^2$  des deux figures aient le même module. Construisons par exemple la force de droite (fig. 5 dont l'échelle est fixée par  $mr\omega^2$ ):  $\overline{F}_{xd}$  est évidemment égal à  $\frac{1}{2}\overline{F}_x = \overline{OF}$  et sa projection sur l'axe  $oy$  donne l'amplitude instantanée de la force horizontale de droite. Pour le vecteur de Fresnel  $\overline{F}_{yd}$ , il convient de partir des termes de l'équation (a) du § 1.1, car  $\sum I K_2$  et  $\sum I f_2$ , qui s'éliminaient par symétrie sur la totalité de l'assise, donnent ici  $\sum_d I K_2$  et  $\sum_d I f_2$ ; en outre  $\sum_d P_i = \frac{P}{2}$  agit évidemment sur

le sol,  $P$  n'agissant que sur l'assise. Les termes  $\sum K_2 y + \sum f_2 y$  étant représentés par le vecteur de Fresnel  $\frac{1}{2}\overline{F}_y = \overline{OG}$ , il faut ainsi y ajouter le vecteur

$$|\overline{GH}| = \phi \frac{\sum_d I K_2}{\cos \phi_b},$$

qui *ici* fait l'angle  $\phi_b$  avec la direction opposée à  $\overline{P}/2$ , et le vecteur  $\overline{P}/2$  dans la direction opposée à  $oy$ . Mais au lieu de porter ainsi  $\overline{P}/2$  vers le bas à partir de  $H$ , on peut le porter à partir de  $O$  vers le haut sur l'axe  $oy$ :  $\overline{OI}_0$ . Le vecteur de Fresnel  $\overline{F}_{yd}$  est alors  $\overline{I}_0 H$ . Si maintenant, au lieu de faire tourner les vecteurs de Fresnel autour de  $O$  dans le sens positif, nous les maintenons fixes, mais faisons

tourner l'axe  $oy$ , de l'angle  $\omega t$ , dans le sens négatif,  $\overline{P}/2$  tournant avec l'axe  $oy$  qui fixe toujours la verticale, les projections sur  $oy(t)$  de  $\overline{OF}$  et de  $\overline{I}(t)\overline{H}$  donnent les intensités instantanées des forces de droite, respectivement horizontale et verticale. Pour que ces deux projections représentent les vecteurs forces, il suffit de rabattre la projection de  $\overline{OF}$  sur l'axe perpendiculaire à  $y(t)$ ; ces deux vecteurs forces peuvent alors se composer. Au lieu de projeter  $\overline{OF}$ , de rabattre et composer, rabattons  $\overline{OF}$  sur sa perpendiculaire dans le sens négatif de rotation, en  $\overline{OF}_\perp$ . Pour obtenir la composition cherchée des forces, il suffit de prendre le point  $J$  d'intersection de la parallèle à  $y(t)$  par  $F_\perp$  et de sa perpendiculaire par  $H$ . Quand  $\omega t$  varie, le point  $I(t)$ , restant sur l'axe tournant  $Oy(t)$ , décrit un cercle de centre  $O$  et de rayon  $P/2$  et le point  $J$  décrit (deux fois) un cercle de diamètre  $\overline{F}_\perp H$  (de centre  $C$ ) car l'angle  $\widehat{F}_\perp JH$  est droit. Les deux parallèles  $OI(t)$  et  $\overline{F}_\perp J$  déterminent les points  $I(t)$  et  $J$ , donc la résultante des forces de droite  $\overline{F}_d = \overline{I}(t)\overline{J}$ , ainsi que la direction verticale instantanée  $Oy(t) = OI(t)$ .

La force de gauche se trouverait de la même manière.

On doit observer qu'en général  $P/2$  est beaucoup plus grand que la distance  $\overline{OJ}$  et qu'en conséquence,  $\overline{P}/2$  restant un

vecteur constant vertical dans l'espace, il suffit de considérer le vecteur  $\overline{OJ}$  variable, repéré par la verticale instantanée  $\overline{F}_\perp J$  parallèle à l'axe  $Oy(t)$ . On en trouve alors immédiatement les modules maximal  $\overline{OK}$  et minimal  $\overline{OL}$  selon  $OC$ , repérés par rapport aux verticales respectives  $\overline{F}_\perp K$  ou  $\overline{KF}_\perp$  et  $\overline{F}_\perp L$  ou  $\overline{LF}_\perp$ .

## 2. Les assises passives

(isolation d'un appareil contre les vibrations du sol)

### 2.1 Equations des petits mouvements

En se limitant à une assise symétrique à deux suspensions de même hauteur, il est possible de représenter le mouvement ondulatoire horizontal et vertical du sol comme un simple mouvement de translation  $(x_0, y_0)$  et de rotation  $\phi_0$  d'un sol rigide. Comme ces mouvements résultent du passage d'une onde, on peut admettre que  $x_0$ ,  $y_0$  et  $\phi_0$  ont la même pulsation  $\omega_0$ . Pour établir les équations des petits mouvements de l'assise, il faut dans les équations du § 1.1 éliminer la force centrifuge du balourd, et tenir compte maintenant des déplacements des points  $S$  et  $T$  d'attache des suspensions au sol (fig. 1).

Le déplacement horizontal  $(x_0 - b_0 \phi_0)$  du point  $T$  engendre sur l'assise un supplément de force horizontale:

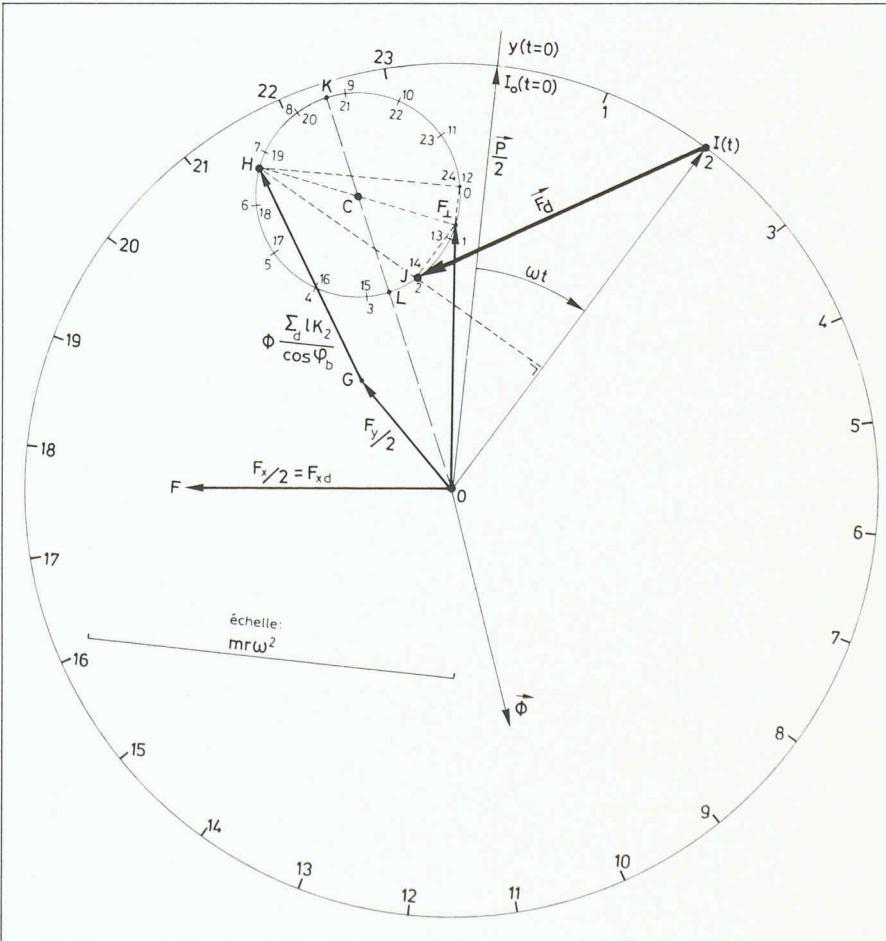


Fig. 5. — Intensité et direction de la force de droite. L'axe  $y(t)$  tourne. Les points numérotés sur les deux cercles sont les points  $I(t)$  et  $J$  qui se correspondent.

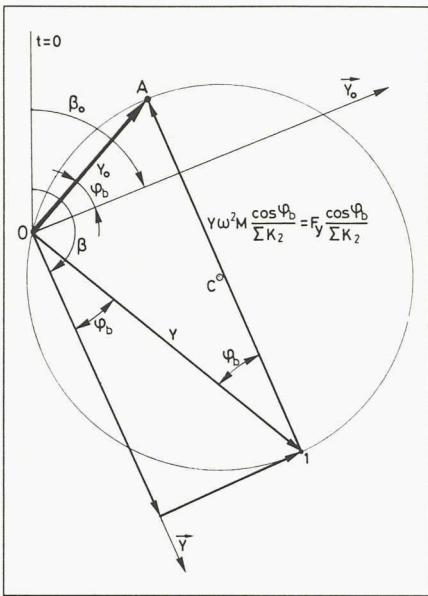


Fig. 6.

$$+ [K_1(x_0 - b_0 \phi_0) + f_1(\dot{x}_0 - b \dot{\phi}_0)]$$

de la suspension.

Le déplacement vertical ( $y_0 + l_0 \phi_0$ ) du point  $S$  engendre un supplément de force verticale:

$$+ [K_2(y_0 + l_0 \phi_0) + f_2(\dot{y}_0 + l_0 \dot{\phi}_0)]$$

de la suspension.

Les simplifications, rencontrées au § 1.1, intervenant également ici, les trois équations des petits mouvements s'écrivent ainsi:

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + \sum [K_2 y + f_2 \dot{y}] \\ = \sum [K_2 y_0 + f_2 \dot{y}_0] \\ = (\overrightarrow{OR_2}) \quad (1') \end{aligned}$$

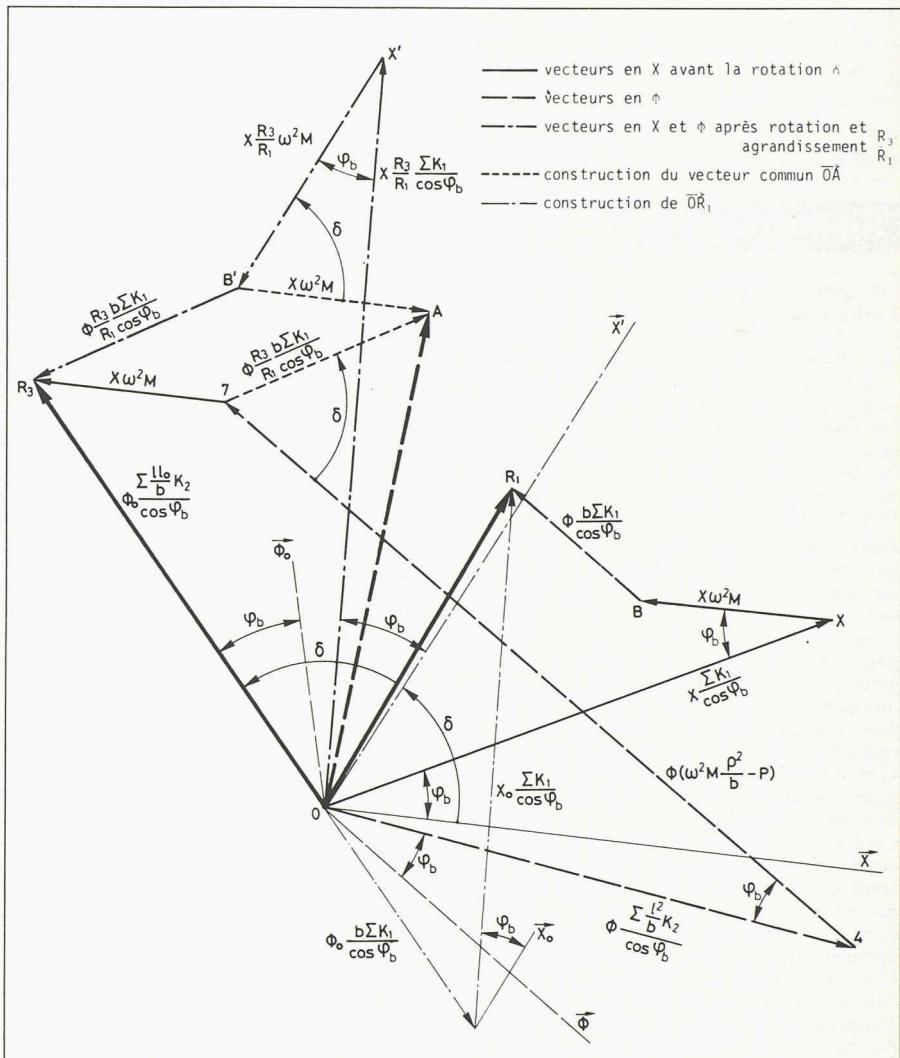
$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \sum [K_1(x - b\phi) + \\ + f_1(\dot{x} - b\dot{\phi})] \\ = \sum [K_1(x_0 - b_0 \phi_0) + \\ + f_1(\dot{x}_0 - b_0 \dot{\phi}_0)] \\ = (\overrightarrow{OR_1}) \quad (2') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \frac{\rho^2}{b} \ddot{\phi} + M\ddot{x} + \\ + \sum \frac{l^2}{b} [K_2 \phi + f_2 \dot{\phi}] + P\phi \\ = \sum \frac{l l_0}{b} [K_2 \phi_0 + f_2 \dot{\phi}_0] \\ = (\overrightarrow{OR_3}) \quad (3') \end{aligned}$$

les écritures  $(\overrightarrow{OR_2})$ ,  $(\overrightarrow{OR_1})$ ,  $(\overrightarrow{OR_3})$  signifiant qu'en mouvement permanent les seconds membres ont les valeurs instantanées données par les projections des vecteurs de Fresnel  $\overrightarrow{OR_2}$ ,  $\overrightarrow{OR_1}$ ,  $\overrightarrow{OR_3}$ . Les mouvements permanents imposant  $\omega \equiv \omega_0$ , les solutions graphiques des paragraphes 1.2, 1.3 et 1.4 restent valables en principe à condition de remplacer les vecteurs de Fresnel  $m\omega^2$  par les vecteurs  $\overrightarrow{OR_2}$ ,  $\overrightarrow{OR_1}$  et  $\overrightarrow{OR_3}$  considérés comme définis par l'étude des mouvements  $(x_0, y_0, \phi_0)$  du sol.

## 2.2 Le mouvement de translation vertical ( $y$ )

Ce mouvement détermine l'assise et donne lieu à la figure 6 où les vecteurs

Fig. 7. — Figure faite avec  $b$  et  $b_0 > 0$ .

de Fresnel, représentant directement les termes de l'équation (1'), ont tous été multiplié par  $\frac{\cos \phi_b}{\sum K_2}$ , de façon à faire apparaître le vecteur  $\overrightarrow{OA}$  de module  $Y_0$  connu et indépendant de l'assise ( $M$  et  $\sum K_2$ ) à la place du vecteur  $\overrightarrow{OR_2}$ . Le point 1 voit donc  $\overrightarrow{OA}$  sous l'angle constant  $\phi_b$  et, quand  $M$  et  $\sum K_2$  varient, décrit un cercle de centre  $C$  d'où l'on voit  $\overrightarrow{OA}$  symétriquement sous l'angle  $2\phi_b$ . La valeur imposée de  $Y$  fixe le point 1 sur le cercle et la longueur

$$\overline{AI} = \omega^2 Y \frac{M \cos \phi_b}{\sum K_2} = F_y \frac{\cos \phi_b}{\sum K_2}$$

fixe  $\sum K_2$  et  $M$  pour une valeur imposée de  $F_y$ . Comme  $\omega = \omega_0$  est fixé, l'étude en fonction de  $\omega$  est généralement sans intérêt.

## 2.3 Les mouvements de translation horizontale et de rotation ( $x, \phi$ )

Les constructions des deux diagrammes de Fresnel superposés sont les mêmes qu'au § 1.4, mais les polygones doivent aboutir respectivement aux deux vecteurs différents  $\overrightarrow{OR_1}$  et  $\overrightarrow{OR_3}$  sur la figure 7, parente de la figure 3, avec même numérotation. On a ainsi les polygones

$OXBR_1$  et  $O47R_3$ ,  $\overrightarrow{OR_1}$  et  $\overrightarrow{OR_3}$  étant les vecteurs de Fresnel seconds membres, connus et provoqués par le sol. En faisant tourner, de l'angle connu  $\delta = \widehat{R_1 OR_3}$ , le polygone  $OXBR_1$  de façon à amener  $\overrightarrow{OR_1}$  sur  $\overrightarrow{OR_3}$  et simultanément en amplifiant ce polygone dans le rapport  $\frac{\overrightarrow{OR_3}}{\overrightarrow{OR_1}}$ , on est ramené, par  $OX'B'R_3$ ,

au problème du § 1.4 et à la figure 3. Ainsi, et comme précédemment, il suffit de tracer  $\overline{7A}$  de même module mais opposé à  $\overline{B'R_3}$  et  $\overline{B'A}$  de même module mais opposé à  $\overline{R_3}$  pour avoir deux polygones aboutissant au même vecteur  $\overrightarrow{OA}$  inconnu, dont l'un,  $OX'B'A$ , ne dépend que de  $X$  et l'autre,  $O47A$ , ne dépend que de  $\phi$ . Avec des directions et des modules choisis arbitrairement pour  $X$  et  $\phi$ , on peut tracer ces deux polygones (dont l'un sur calque), puis par rotation et agrandissement faire en sorte que les deux vecteurs  $\overrightarrow{OA}$ , trouvés, se confondent. En rétablissant alors le tracé  $A7R_3$  ou  $AB'R_3$ , connu, on trouve  $\overrightarrow{OR_3}$  connu qui fixe l'échelle et les phases, puis par rotation de  $(-\delta)$  et réduction de  $OX'B'R_3$  dans le rapport  $\frac{\overrightarrow{OR_1}}{\overrightarrow{OR_3}}$  on retrouve enfin le polygone  $OXBR_1$ .

Comme pour le mouvement de translation vertical, la pulsation  $\omega$  étant imposée par le mouvement du sol, il n'y a pas lieu de faire l'étude des variations continues en fonction de  $\omega$ ; le problème est ainsi résolu.

Adresses des auteurs:  
Jacques Paschoud  
Professeur EPFL  
En Prahs  
1603 Grandvaux

Philippe Wieser  
Ingénieur dipl. EPFL  
Ch. Covatannaz 9  
1032 Romanel

## Bibliographie

### **Das grosse Buch der Furka-Oberalp-Bahn**

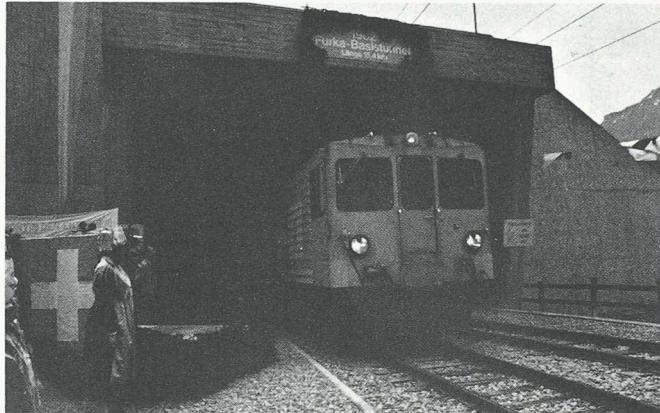
par Kurt Seidel. — Un vol. 27 x 33 cm, relié pleine toile, 374 pages avec 370 photographies, partiellement en couleurs, et 310 dessins, plans et reproductions de documents techniques. Édition Dumjahn, Mayence, 1982. Prix: Fr. 98.—.

Édité comme «livre officiel» du chemin de fer Furka-Oberalp, cet ouvrage pourrait porter en sous-titre «Une étude en rouge!». En effet, la reliure, les pages et les nombreuses photographies en couleurs accordent une prépondérance à cette couleur, qui est celle du matériel roulant. Cela nous donne des vues magnifiques avec les paysages valaisans, uranais et grissons en arrière-plan.

Ce livre a vu le jour dans le très large enthousiasme suscité par la construction et la mise en service du tunnel de base de la Furka, donc de la réalisation du vieux postulat d'une liaison hivernale entre le Valais et les Grisons. Il constitue une documentation très complète sur l'histoire et la vie du chemin de fer Furka-Oberalp, dont l'existence a connu jusqu'ici plus de difficultés que d'heures fastes (IAS n° 12/82, p. 168-171). Loin de se limiter aux aspects techniques, il examine longuement le rôle de la ligne dans la vie et l'économie des vallées qu'elle traverse.

L'amateur de chemin de fer y trouvera à peu près tous les renseignements qu'il peut souhaiter tant sur l'infrastructure, l'équipement et le matériel roulant que sur les ouvrages d'art. S'il désire approfondir ces sujets, une bibliographie imposante lui facilitera les recherches.

On sait que le projet du tunnel de base avait suscité d'acerbes critiques, mettant notamment en doute l'utilité de l'ouvrage. Trois mois seulement après la mise en service du transport d'automobiles



Le premier train officiel sort du tunnel de base à Realp, le 25 juin 1982.  
(Photo J.-P. Weibel)

biles par le tunnel, les pronostics les plus optimistes sont dépassés et il va falloir envisager prochainement l'augmentation prévue de la capacité de ces trains. C'est dire que se confirme pleinement la vocation de la ligne, qui est de permettre aux régions desservies l'accès à de nouvelles ressources économiques.

Au moment où le FO atteint enfin les objectifs de ses promoteurs, ce livre regroupe pour la première fois toute la documentation le concernant. Bien qu'il s'adresse au grand public — l'abondante illustration en facilite grandement l'accès — cet ouvrage est digne de figurer dans la bibliothèque de l'amateur de chemin de fer. Un grand regret cependant, c'est qu'il n'existe qu'en allemand (le fait qu'il soit imprimé à Genève ne contribue pas à consoler le lecteur romand). A ce sujet, on nous permettra un petit reproche à nos amis de la direction du FO: leurs efforts pour promouvoir la nouvelle liaison hivernale sont axés sur la Suisse alémanique avant tout; pourtant, nul doute que de nombreux Romands ne demandent pas mieux que de profiter des nouvelles possibilités qui leur sont offertes d'atteindre aisément les pistes de ski (fond et descente) du massif du Saint-Gothard et des Grisons, à condition de savoir en quoi les concernent ces innovations.

Notons que cet ouvrage peut être commandé contre facture à la direction du FO, case postale 97, 3900 Brigue. Jean-Pierre Weibel

### **Ausklang der modernen Architektur**

par Paolo Portoghesi. — Un volume de 240 pages, 233 photos, esquisses et plans; bibliographie et répertoire des noms. Paperback, éd.: les Editions d'Architecture Artemis, Zurich, 36 fr.

Bien que traduit en français sous le titre *Au-delà de l'architecture moderne*, nous avons reçu en allemand seulement cet ouvrage,

De par sa position et sa sensibilité, l'auteur est plus enclin à nous présenter des architectes méridionaux que des nordiques: on ne peut lui en vouloir, le fait est si rare!

Cet ouvrage, particulièrement bien documenté, et qui porte un œil critique sur l'ensemble de la production actuelle, ne devrait manquer dans aucune bibliothèque de lecteur intéressé par l'architecture post-moderne.

F. N.

### **Les pompes à chaleur**

par Roger Dumon et Gérard Chrysostome. — Un vol. 16 x 24 cm. 176 pages, Éditions Masson, Paris 1982, 2<sup>e</sup> édition, prix broché 110 ffr.

La deuxième édition de l'ouvrage donne les informations techniques et industrielles les plus récentes sur la pompe à chaleur, système important et efficace pour progresser dans la voie des économies d'énergie. L'auteur explique les principes de base des pompes à chaleur et ceux des machines frigorifiques qui ont de nombreux points communs.

Il décrit les différents types de pompes à chaleur: à compression, à absorption, à résorption, thermoélectriques et tubes de Ranque.

Il détaille la technologie des pompes à compression, les plus répandues: compresseur, échangeur, fluides utilisés, auxiliaires. Sont décrits également les organes essentiels des pompes à absorption, à résorption et thermoélectriques.

L'ouvrage compare les rendements et les avantages des différents types de pompes.

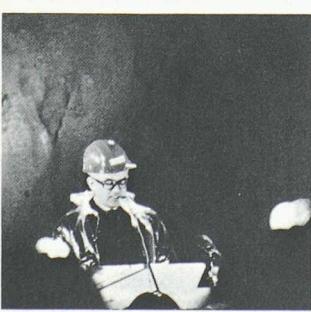
Il situe les applications domestiques pour les pavillons particuliers et les appartements. Il donne les résultats obtenus dans les immeubles de bureaux, les bâtiments à usage collectif.

L'ouvrage décrit les avantages obtenus dans ces différents cas d'application et en particulier dans la climatisation liée au chauffage, dans le développement du système PERCHE.

Il passe en revue les utilisations dans les divers secteurs industriels: ceux où la pompe à chaleur s'est déjà imposée comme ceux où elle est encore en période d'essai.

Un paragraphe nouveau traite de la recompression mécanique de vapeur, appelée parfois pompe à chaleur directe ou simplifiée, dont l'importance s'affirme dans différents domaines.

Enfin le livre brosse un tableau des améliorations à attendre des pompes à chaleur, de leurs développements futurs et de leur impact sur le bilan énergétique de la France.



La photographie qu'on ne trouvera pas dans le livre: le conseiller fédéral L. Schlumpf s'adressant aux invités lors du percement, le 30 avril 1981, au kilomètre 10.

(Photo J.-P. Weibel)