

**Zeitschrift:** Ingénieurs et architectes suisses

**Band:** 107 (1981)

**Heft:** 19

**Artikel:** Corps creux (fin)

**Autor:** Paschoud, Jacques / Wieser, Philippe

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-74358>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

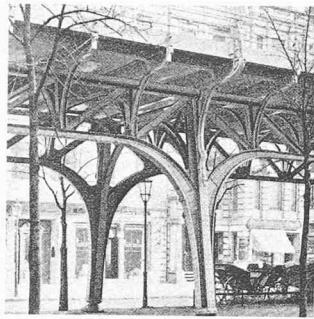
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



Métro aérien: viaduc (Bühlstrasse).

de la planification, l'architecte et l'urbaniste jouent un rôle prépondérant dans tous les do-

maines du système de transports: tracé à travers l'agglomération urbaine, implantation des bâtiments, image donnée à l'extérieur et à l'intérieur des stations, aménagement des véhicules, conception industrielle et esthétique des nombreux bâtiments de services allant jusqu'à l'usine électrique, pour ne citer que les points les plus importants. Cette tâche exigeante suppose la maîtrise des techniques de construction les plus avancées et une capacité de dialogue exceptionnelle avec tous les spécialistes participant à une œuvre aussi complexe.

Cet ouvrage illustre à merveille les possibilités de recherche et d'expression offertes par les transports publics. On y re-

trouve, toujours avec le même souci de présenter une documentation complète sur les plans technique, historique et social, l'extraordinaire richesse créative de grands architectes, tels qu'Alfred Grenander, Bruno Möhring ou, plus près de nous, Gerhard Rainer Rümmler. C'est une démonstration éclatante du rôle capital joué par une architecture a priori plutôt utilitaire dans l'image d'une grande métropole. Cette importance est aujourd'hui mieux perçue, d'une façon générale, et l'on s'efforce enfin de préserver les éléments d'une création qui appartient à notre patrimoine architectural au même titre que des bâtiments de prestige. Une station de métro n'est-elle pas un élément essen-

tiel du cadre de vie, quotidiennement perçu par des dizaines de milliers d'usagers?

Ce volume offre certainement un intérêt particulier, au moment où les transports urbains vont connaître des développements spectaculaires dans notre pays: à Zurich, où le S-Bahn entrera bientôt dans une phase concrète, ou à Genève, qui attend avec impatience l'adaptation des transports urbains à des exigences criantes.

Signalons à tous ceux qui seraient intéressés à la somme unique de documentation que constitue « Berlin und seine Bauten » que l'ensemble des volumes peut être acquis à des conditions particulièrement favorables (renseignements en librairie).

## Corps creux (fin)

par Jacques Paschoud et Philippe Wieser, Lausanne

### 4. Remarques

#### 4.1 Angle circonférentiel $d\psi$

Il faut observer que toutes les relations définies jusqu'ici sont proportionnelles à l'angle élémentaire circonférentiel  $d\psi$ . Il est alors possible de le choisir arbitrairement et il est ainsi souvent commode de prendre la valeur fixée  $d\psi = 2\pi$ , indépendamment du fait que les équations ont été développées avec un  $\psi$  infiniment petit!

#### 4.2 Enveloppes fermées à une extrémité ( $r = 0$ )

A cette extrémité, la largeur  $rd\psi$  de la bande est nulle, les efforts totalisés sur cette largeur s'annulent également; les liaisons circulaires et longitudinales imposent que  $\vartheta$  et  $y$  soient nuls.

Considérons alors les efforts totalisés sur une longueur unité (efforts unitaires désignés par «une étoile») en divisant par  $rd\psi$  les forces et les moments considérés jusqu'ici.

Une transformation des écritures des équations permet d'éviter les difficultés de calcul provoquées par les singularités (termes infinis) en  $r = 0$ .

Nous ne le montrons que pour l'expression de  $M$ , les calculs étant similaires pour les autres variables.

L'équation (2.7) s'écrit en «efforts unitaires»:

$$M_P^* = \frac{r_0}{r_p} \left[ M_0^* - V_0^* x_p + H_0^* (r_p - r_0) \right] - M_{ext,p}^* - \frac{1}{r_p} \int_0^P N_c^* (x_p - x) ds + \frac{1}{r_p} \int_0^P M_c^* \sin \varphi ds \quad (4.1)$$

En  $r = 0$ ,  $M_P^*$  devant rester fini, dans le membre de droite, aux termes non situés sous un signe intégral et qui deviennent infiniment grands, doivent se soustraire des termes équivalents provenant des intégrales.

Pour que le calcul numérique devienne possible, faisons passer sous le signe intégral la partie devenant infinie des termes hors intégrales.

Observant que:

$$-\frac{1}{r_p} \int_0^P \sin \varphi ds = \frac{r_0}{r_p} - 1$$

La première partie de cet article a paru dans *Ingénieurs et architectes suisses* n° 18 du 3 septembre 1981, p. 292.

posons:  $M_{ext,p}^* = m_{ext,p} + C \left( \frac{r_0}{r_p} - 1 \right)$  où  $C$  sera choisi de façon que  $m_{ext,p}$  reste fini en  $r = 0$ .

Posons également:

$$M_{fini}^* = M_0^* - V_0^* x_p - M_{ext}^* + C \left( \frac{r_0}{r_p} - 1 \right) \quad (4.2)$$

(qui reste fini en  $r = 0$ )

$$M_\infty^* = M_0^* - V_0^* x_p - H_0^* r_0 - C$$

L'expression de  $M^*$  se met alors sous la forme:

$$M_P^* = M_{fini}^* - \frac{1}{r_p} \left[ \int_0^P N_c^* (x_p - x) ds - \int_0^P (M_c^* - M_\infty^*) \sin \varphi ds \right] \quad (4.3)$$

Pour que le premier membre reste fini en  $r = 0$ , il faut et suffit que la parenthèse [...] du second membre s'annule en  $r = 0$ : c'est la nouvelle condition aux limites à l'extrémité fermée de l'enveloppe.

### Annexe 1

Calcul des coefficients  $\Sigma$ , des équations (3.8), par la méthode des « $q$ ,  $t$ ,  $W$ ».

Dans le cas où les coefficients de l'équation différentielle respectent certaines limites, en particulier pour les cylindres et les cônes dont l'épaisseur varie linéairement en fonction de l'abscisse  $x$ , les calculs longs et fastidieux peuvent être effectués directement, éliminant ainsi la recherche de  $a$  et  $b$ . Nous obtenons alors:

$$\Sigma_{10} = -3,305 \frac{h^2}{r^\mu} (1+t)$$

$$\Sigma_{10}^* = \Sigma_{10} \left( \frac{2,571}{\sqrt{rh \cos \varphi}} \cdot q + 0,15 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} \right)$$

$$\Sigma_{20} = -2,571 \frac{h^2}{r^\mu} \sqrt{rh \cos \varphi} q (1+t)$$

$$\Sigma_{20}^* = \Sigma_{20} \left[ \frac{1,285}{\sqrt{rh \cos \varphi}} \cdot \frac{2q^2 - 1}{q} + 0,15 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} - 0,3535 \frac{\sqrt{rh \cos \varphi}}{q(1+t)} \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} \right)^2 \right] \quad (I.1)$$

$$\Sigma_{30} = \frac{rh \cos \varphi}{3,305} (1+t)$$

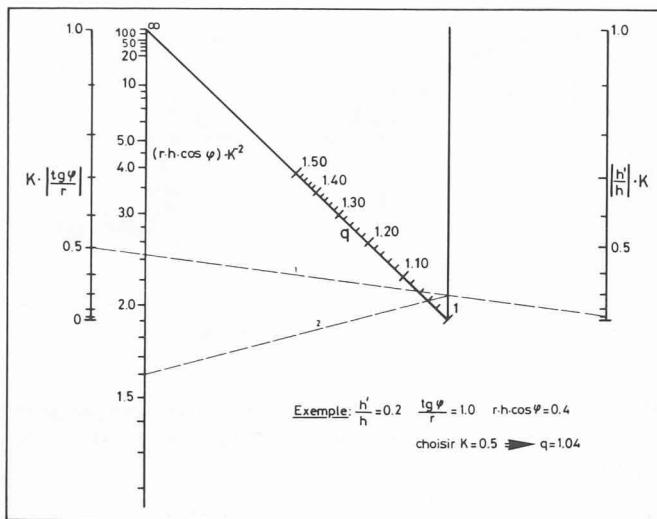


Fig. 12. — Méthode par amortissement: diagramme « q ».

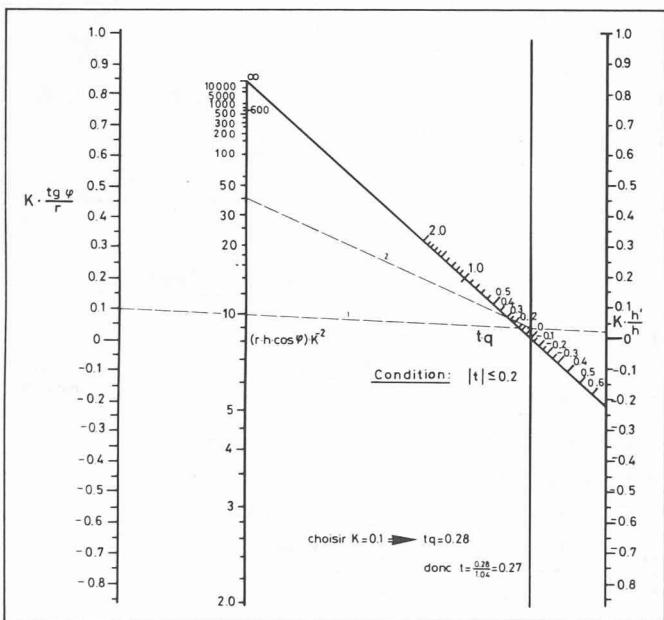


Fig. 13. — Méthode par amortissement: diagramme « t ».

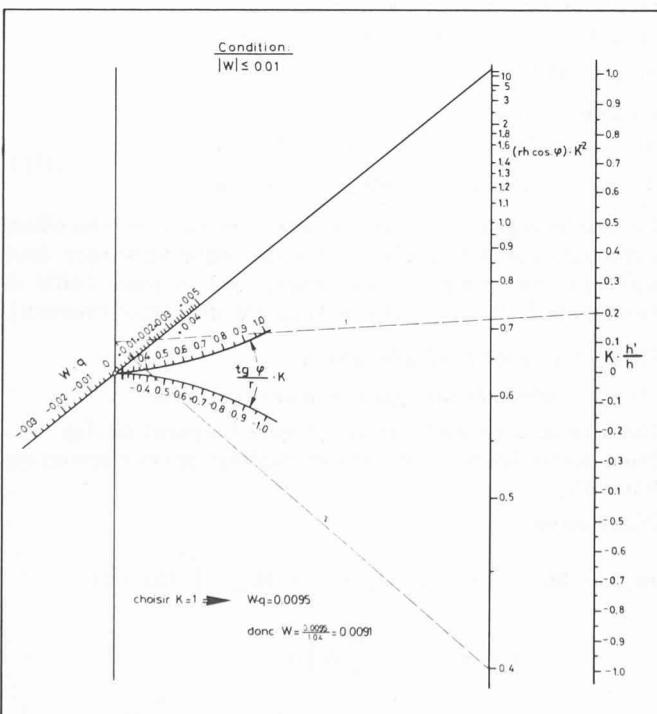


Fig. 14. — Méthode par amortissement: diagramme « W ».

$$\Sigma_{30}^* = \Sigma_{30} \cdot \frac{\Sigma_{10}^*}{\Sigma_{10}}$$

avec les coefficients  $q$ ,  $t$  et  $W$  définis comme suit pour la condition:  $r'' = h'' = 0$ :

$$(q^2 - 1) 4,958 = r h \cos \varphi \left[ \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} \right)^2 + 2,25 \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \right]$$

$$4,675 t q = \sqrt{r h \cos \varphi} \left[ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} + 5,45 \frac{h'}{h} \right] \quad (I.2)$$

$$14,36 W q = (r h \cos \varphi)^{3/2} \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} \right)^2 \times \left[ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} - 2,308 \frac{h'}{h} \right]$$

pour les autres cas, remplacer  $h'/h$  par:

$$\begin{aligned} \text{— pour } q: & \sqrt{\left( \frac{h'}{h} \right)^2 - \frac{h''}{h} - \frac{4}{30} \frac{r''}{r}} \\ & + \frac{1}{3} (r''^2 + r''' \operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi - \frac{2}{3} (r'' \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi) \\ \text{— pour } t: & \frac{h'}{h} - \frac{1}{3} r'' \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi \\ \text{— pour } W: & \frac{h'}{h} + \frac{1}{3} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot r'' \end{aligned}$$

Conditions sur  $t$  et  $W$ : pour tous les cas, il faut impérativement que:

$$|t| \leq 0,2 \quad \text{et} \quad |W| \leq 0,01 \quad (I.3)$$

Les coefficients  $q$ ,  $t$  et  $W$  peuvent être déterminés par la série d'abaques à « points alignés » des fig. 12, 13, 14.

Choisir tout d'abord, pour chaque abaque, les unités de  $r$  et  $h$  et la valeur arbitraire de  $K$ , afin de rester dans les échelles.

## Annexe 2

Calcul des  $M_{\text{ext}}$ ,  $M_{\text{stat}}$  et  $V_{\text{stat}}$  pour une pression uniforme et hydrostatique.

1) Pression uniforme:  $p_0$  ( $p_{\text{intérieur}} \geq 0$ ) (fig. 15)

$$dM_{\text{ext}} = -p_0 ds r d\psi [(x_p - x) \cos \varphi + (r_p - r) \sin \varphi]$$

donc:

$$M_{\text{ext}P} = -d\psi p_0 \left[ \frac{r_p^3}{6} + \frac{r_0^3}{6} \left( 2 - 3 \frac{r_p}{r_0} \right) + \int_0^{r_p} r (x_p - x) dx \right] \quad (\text{II.1})$$

Nous avions:

$$M_{\text{stat}P} = M_0 - V_0 x_p + H_0 (r_p - r_0) - M_{\text{ext}P}$$

d'où:

$$M''_{\text{stat}P} = H_0 r_p'' - M''_{\text{ext}P}$$

avec:  $H_0 = \frac{1}{2} d\psi r_0^2 p_0$  (équilibre statique du corps libre de se déformer axialement) et:

$$M''_{\text{ext}P} = -d\psi p_0 \left[ \frac{1}{2} (r_p^2 - r_0^2) r_p'' + \frac{r_p}{\cos^2 \varphi} \right] \quad (\text{II.2})$$

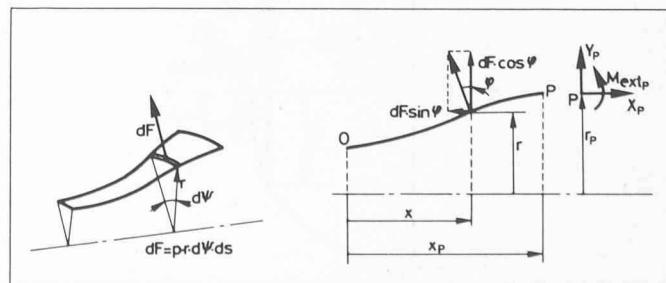


Fig. 15. — Action de la pression sur un élément de coque.

par (2.13):

$$m''_{\text{stat}P} = M''_{\text{stat}P} - \frac{A}{\cos \varphi_P} \int_0^P F N ds - \frac{\mu}{r_P \cos \varphi_P} \cdot N_P \quad (\text{II.3})$$

$$\Rightarrow m''_{\text{stat}0} = M''_{\text{stat}0} - \frac{\mu}{r_0 \cos \varphi_0} \cdot N_0$$

et finalement:

$$V_{\text{stat}P} = V_0 - Y_P = V_0 - d\psi p_0 \int_0^{x_P} r dx \quad (\text{II.4})$$

2) *Pression hydrostatique*:  $p = p_0 + p^* x$

La contribution de  $p_0$  est donnée sous le point 1), déterminons alors celle de  $p^* x$ . Nous obtenons ainsi:

$$M_{\text{ext}P} = -d\psi p^* \left[ \int_{r_0}^{r_P} r(r_P - r) x dr + \int_0^{x_P} r(x_P - x) x dx \right] \quad (\text{II.5})$$

$$M''_{\text{ext}P} = -d\psi p^* \left[ r_P x_P (1 + r_P^2) + r'_P \int_{r_0}^{r_P} x r dr \right]$$

$$V_{\text{stat}P} = V_0 - d\psi p^* \int_0^{x_P} r x dx$$

Nous aurons finalement:

$$M_{\text{stat}P} = M_0 - V_0 x_P + H_0 (r_P - r_0) - [M_{\text{ext}P}(p_0) + M_{\text{ext}P}(p^*)] \quad (\text{II.6})$$

$$V_{\text{stat}P} = V_0 - d\psi \left[ p_0 \int_0^{x_P} r dx + p^* \int_0^{x_P} r x dx \right]$$

### Annexe 3

#### Exemple, applications numériques

Nous désirons connaître les efforts hyperstatiques<sup>4)</sup> au raccord des coques ① ②, ainsi que l'évolution du moment longitudinal au sein de ces deux corps (fig. 16).

Pour cela, séparons ces deux coques et remplaçons l'effet de l'une sur l'autre par le système d'efforts représenté en fig. 17, établi selon les conventions du § 1.3:

Nous considérerons le cylindre ③ comme suffisamment rigide pour pouvoir admettre comme nuls la rotation et le déplacement radial de la coque ① au point  $L_1$ .

#### Méthodes de calcul utilisées

##### 1) Sphère ②:

$$l = \sqrt{15^2 - 8^2} = 12,7 \text{ cm} > 5 \sqrt{(r h \cos \varphi)_m} \cong 8,5 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$  corps long  $\Rightarrow$  méthode par amortissement (§ 3.3).

2) Fond sphérique ①:  $l = \sqrt{30^2 - 3^2} - \sqrt{30^2 - 8^2} = 0,94 \text{ cm} < 2 \sqrt{(r h \cos \varphi)_m} \cong 1,6 \text{ cm} \Rightarrow$  corps court  $\Rightarrow$  méthode par approximations successives (§ 3.2).

<sup>4)</sup> Nous supposerons que les conditions d'appui permettent au corps de se déformer librement dans la direction axiale.

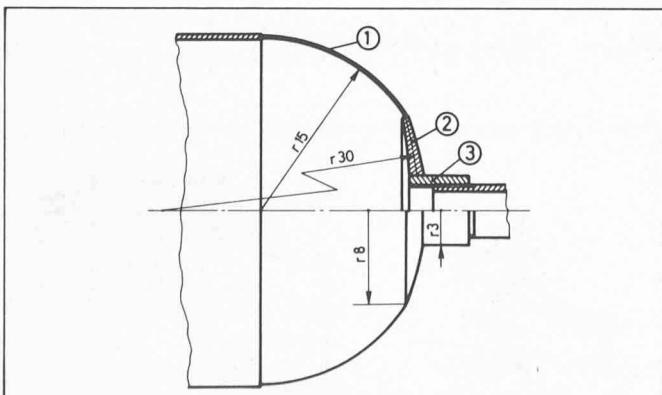


Fig. 16. — Exemple numérique: dessin d'ensemble.

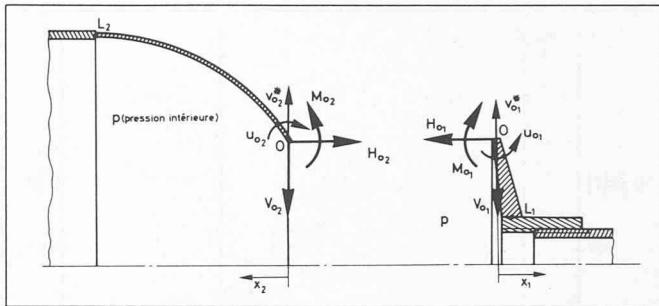


Fig. 17. — Efforts et déplacements au raccord (point 0).

Nous calculerons également la coque ① par la méthode générale, et comparerons les résultats obtenus par ces deux méthodes.

##### III.1 Calcul de la sphère ②

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{R_2^2 - (l - x_2)^2} \\ \cos \varphi = \frac{r}{R_2} \\ r' = \frac{l - x_2}{r} \\ r'' = -\frac{1}{r}(1 + r'^2) \end{array} \right.$$

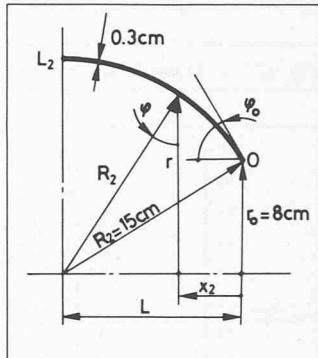


Fig. 18. — Sphère.

Les équations (3.2) donnent:

$$\alpha_0 = 0,3073; \quad \beta_0 = -7,415 \cdot 10^{-2}; \quad \gamma_0 = 2,195 \cdot 10^{-2};$$

$$\eta_0 = 6,665$$

et par (3.6) et (3.7):  $a = 2,626 \quad b = 2,944$

donc par (3.9):

$$\begin{array}{ll} \Sigma_{10} = -0,1818 & \Sigma_{20}^* = -0,1968 \\ \Sigma_{10}^* = -0,4269 & \Sigma_{30} = 0,4418 \\ \Sigma_{20} = -0,1621 & \Sigma_{30}^* = 1,037 \end{array}$$

avec les équations de l'annexe II:

$$M''_{\text{stat}0} = 88,36 p \quad \text{et} \quad H_{02} = 201,1 p$$

en prenant en première approximation:

$$N_0 \equiv N_{0\text{membrane}} = H_0 / \cos \varphi_0 = 377,0 p; \\ m''_{\text{stat}0} = 61,85 p$$

Finalement (3.8):

$$M_{02} = -0,1818 v_{02} - 0,1621 u_{02} + 27,32 p \quad (\text{III.1})$$

$$V_{02} = -0,4269 v_{02} - 0,1968 u_{02} + 383,1 p$$

Ce sont les équations générales liant au point  $x_2 = 0$  les efforts hyperstatiques aux déplacements (la coque sphérique étant suffisamment «longue» pour négliger en ce point l'effet de l'extrémité  $L_2$ , ce qui résulte de la condition d'amortissement).

##### III.2 Calcul du fond sphérique ①

###### III.2.1 Méthode par approximations successives

Divisons ce corps en 5 éléments d'égale longueur  $\Delta s$  (fig. 19). Numérotions les points milieux et extrêmes de ces éléments (tableau IV):

Nous avons:

$$m_{\text{stat}} = M_0 - V_0 x_P + H_0 (r_P - r_0) - M_{\text{ext}} - \int_0^P (x_P - x) \times \left( A \int_0^P F N ds + \frac{\mu}{r} N \right) ds$$

$M_0$  et  $V_0$  étant les hyperstatiques à déterminer et  $H_0 = \pi p r_0^2 \Rightarrow$

$$m_{\text{stat}} = m_{\text{stat}} (M_0, V_0, p)$$

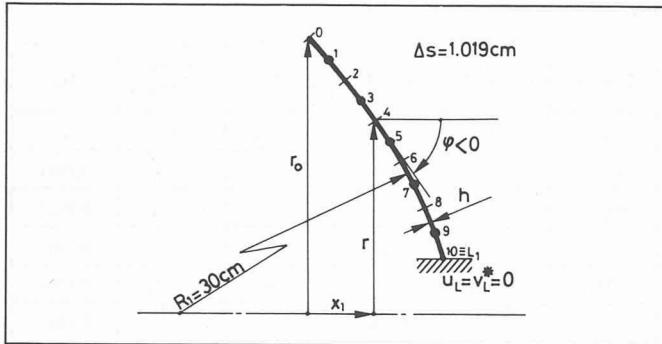


Fig. 19. — Fond sphérique.

TABLEAU IV

Pts	$r$ [cm]	$\varphi$ [°]	$x$ [cm]	$h$ [cm]
0	8	-74,53	0	0,40
1	7,508	-75,51	0,1316	0,48
2	7,014	-76,48	0,2549	0,56
3	6,518	-77,45	0,3698	0,64
4	6,020	-78,42	0,4762	0,72
5	5,520	-79,40	0,5741	0,80
6	5,019	-80,37	0,6636	0,88
7	4,516	-81,34	0,7445	0,96
8	4,012	-82,32	0,8169	1,04
9	3,506	-83,29	0,8807	1,12
10	3	-84,26	0,9360	1,20

3 cas doivent être étudiés:

- 1)  $M_0 = 1, V_0 = 0, p = 0$
- 2)  $M_0 = 0, V_0 = 1, p = 0$
- 3)  $M_0 = 0, V_0 = 0, p = 1$

d'où par le principe de superposition:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = u_0(M_0 = 1) M_0 + u_0(V_0 = 1) V_0 \\ \quad + u_0(p = 1) p \\ v_0 = v_0(M_0 = 1) M_0 + v_0(V_0 = 1) V_0 \\ \quad + v_0(p = 1) p \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

Nous prendrons en première approximation

$$N \equiv N_{\text{membrane}} = H/\cos\varphi = \pi p r^2/\cos\varphi$$

Conditions aux limites:

$$\text{cas: 1) } M_0 = 1 \Rightarrow N(M_0) = 0 \Rightarrow v_L(M_0) \equiv v_L^* = 0$$

$$2) \quad V_0 = 1 \Rightarrow N(V_0) = 0$$

$$[\text{car en 1<sup>re</sup> approx. } N \equiv N_{\text{memb.}} = N(p = 1)] \\ \Rightarrow v_L(V_0) \equiv v_L^* = 0$$

$$3) \quad p = 1 \Rightarrow N(p) = N_{\text{membrane}} \Rightarrow v_L(p = 1)$$

$$= v_L^* - \int_0^L F N ds = - \int_0^L F N ds$$

Les coefficients  $A, B, C, D$  et  $F$  se calculent par l'application directe des équations (2.12) (tableau V).

En effectuant les intégrales par la méthode numérique simple du trapèze (décrite en détail ci-après), nous obtenons les valeurs de départ des approximations successives, soit

TABLEAU V

Pts	$A$	$B$	$C$	$D$	$F$
1	0,3813	$6,863 \cdot 10^{-3}$	2,205	$-3,869 \cdot 10^{-2}$	$-4,099 \cdot 10^{-2}$
3	0,6111	$1,987 \cdot 10^{-2}$	1,027	$-4,493 \cdot 10^{-2}$	$-3,422 \cdot 10^{-2}$
5	0,9480	$4,885 \cdot 10^{-2}$	0,5907	$-5,342 \cdot 10^{-2}$	$-3,097 \cdot 10^{-2}$
7	1,477	0,1109	0,3934	$-6,568 \cdot 10^{-2}$	$-2,987 \cdot 10^{-2}$
9	2,394	0,2468	0,2958	$-8,497 \cdot 10^{-2}$	$-3,071 \cdot 10^{-2}$

$M_I \equiv m_{\text{stat}}$ , pour les 3 différents cas exposés ci-dessus, référencés par les indices 1), 2) et 3) (tableau VI), ( $M_{\text{ext}} \rightarrow$  éq. (II.1)).

Indiquons la marche à suivre de la méthode en effectuant deux approximations successives pour le cas 1) ( $M_0 = 1, V_0 = 0, p = 0$ ).

Tout est ainsi préparé pour remplir le tableau de calculs (tableau VII)<sup>5)</sup>

Nous avons alors 3 séries de valeurs pour  $M$ ; appliquons la relation écrite à la fin du § 3.2:

TABLEAU VIII

Pts	$M(M_0 = 1)$	$M(V_0 = 1)$	$M(p = 1)$
0	1	0	0
2	0,9112	-0,2233	-159,0
4	0,7688	-0,3661	-254,5
6	0,6078	-0,4460	-301,6
8	0,4515	-0,4802	-314,1
10	0,3191	-0,4883	-307,2

et les coefficients  $u_0(M_0 = 1, V_0 = 1, p = 1)$  et  $v_0(M_0 = 1, V_0 = 1, p = 1)$  de l'équation (III.2):

$$u_0 = -3,762 M_0 + 1,135 V_0 + 779,5 p$$

$$v_0 = 1,090 M_0 - 0,5494 V_0 - 280,0 p \quad (\text{III.3})$$

Les équations (III.1) et (III.3) représentent 4 équations pour 8 inconnues. Les 4 autres équations seront obtenues par les conditions d'équilibre des efforts et de compatibilité des déplacements au point  $O$ .

Avant d'établir ces équations, comparons la méthode par approximations successives à la méthode générale.

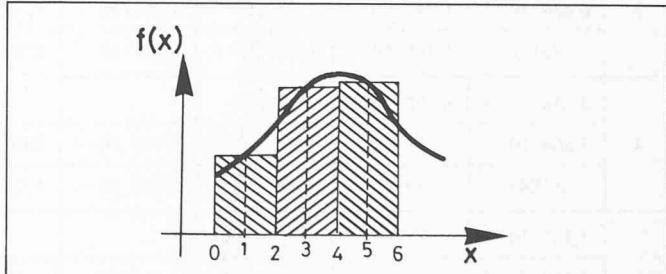
### III.2.2 Méthode générale

En se référant à la systématique de la méthode (§ 3.4), décomposons le corps en 5 éléments  $\Delta s$  égaux cf. § III.2.1.

<sup>5)</sup> Méthode d'intégration utilisée: méthode du «trapèze», soit la fonction  $f = f(x)$ :

$$\int_0^6 f(x) dx \approx \sum f(x) \Delta x \\ = f(x_1)(x_2 - x_0) + f(x_3)(x_4 - x_2) + f(x_5)(x_6 - x_4).$$

Les valeurs ainsi obtenues correspondent à l'extrémité des intervalles  $\Delta x$ ; pour les valeurs aux points milieux, c.f. note<sup>6)</sup>.



<sup>6)</sup> Les valeurs aux points milieux, spécialement pour les cas 2) et 3), sont obtenues par simple moyenne arithmétique des valeurs des points extrémités.

TABLEAU VI

Pts	$M_1(1)$	$M_1(2)$	$M_1(3)$
2	1	-0,2549	-176,2
4	1	-0,4762	-310,9
6	1	-0,6636	-405,0
8	1	-0,8169	-459,0
10	1	-0,9360	-474,4
$v_L$	0	0	90,69

TABLEAU VII

Pts	$M_I^{(6)}$	$CM\Delta s$	$u$	$u\Delta s$	$v$	$Av\Delta s$	$\sum Av\Delta s$	$x \sum Av\Delta s$	$xAv\Delta s$	$\sum xAv\Delta s$	$\sum (Bu + DM)\Delta s$	$M_{II}$
0	1		-4,598		1,573		0	0		0	0	1
1	1	2,247	-3,474	-0,8856	1,130	0,4391			5,779 · 10 <sup>-2</sup>			0,9411
2	1		-2,351		0,6873		0,4391	0,1119		5,779 · 10 <sup>-2</sup>	-6,372 · 10 <sup>-2</sup>	0,8822
3	1	1,047	-1,827	-0,4044	0,4851	0,3021			0,1117			0,7761
4	1		-1,304		0,2829		0,7411	0,3529		0,1695	-0,1465	0,6701
5	1	0,6019	-1,003	-0,1880	0,1889	0,1825			0,1048			0,5403
6	1		-0,7023		9,486 · 10 <sup>-2</sup>		0,9236	0,6129		0,2743	-0,2509	0,4105
7	1	0,4009	-0,5019	-7,693 · 10 <sup>-2</sup>	5,640 · 10 <sup>-2</sup>	8,489 · 10 <sup>-2</sup>			6,320 · 10 <sup>-2</sup>			0,2751
8	1		-0,3014		1,793 · 10 <sup>-2</sup>		1,008	0,8234		0,3375	-0,3745	0,1396
9	1	0,3014	-0,1507	-1,793 · 10 <sup>-2</sup>	8,965 · 10 <sup>-3</sup>	2,187 · 10 <sup>-2</sup>			1,926 · 10 <sup>-2</sup>			1,660 · 10 <sup>-2</sup>
10	1		0		0		1,030	0,9641		0,3567	-0,4990	-0,1064

0		-3,367		0,8378		0	0		0	0	1
1	2,115	-2,310	-0,5888	0,5434	0,211			2,778 · 10 <sup>-2</sup>			
2		-1,253		0,2489		0,2111	5,381 · 10 <sup>-2</sup>		2,778 · 10 <sup>-2</sup>	-5,326 · 10 <sup>-2</sup>	0,9207
3	0,8122	-0,8466	-0,1874	0,1553	9,671 · 10 <sup>-2</sup>			3,576 · 10 <sup>-2</sup>			
4		-0,4405		6,160 · 10 <sup>-2</sup>		0,3078	0,1466		6,354 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1059	0,8110
5	0,3252	-0,2779	-5,208 · 10 <sup>-2</sup>	3,556 · 10 <sup>-2</sup>	3,435 · 10 <sup>-2</sup>			1,972 · 10 <sup>-2</sup>			
6		-0,1153		9,517 · 10 <sup>-3</sup>		0,3422	0,2271		8,326 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1492	0,7070
7	0,1103	-6,014 · 10 <sup>-2</sup>	-9,219 · 10 <sup>-3</sup>	4,907 · 10 <sup>-3</sup>	7,385 · 10 <sup>-3</sup>			5,498 · 10 <sup>-3</sup>			
8		-5,004 · 10 <sup>-3</sup>		2,977 · 10 <sup>-4</sup>		0,3496	0,2856		8,876 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1744	0,6288
9	5,004 · 10 <sup>-3</sup>	-2,502 · 10 <sup>-3</sup>	-2,977 · 10 <sup>-4</sup>	1,489 · 10 <sup>-4</sup>	3,632 · 10 <sup>-4</sup>			3,199 · 10 <sup>-4</sup>			
10		0		0		0,3499	0,3275		8,908 · 10 <sup>-2</sup>	-0,1765	0,5851
Pts											$M_{III}$

TABLEAU X

$P$	$Q$	2	4	6	8	10	$J_7 (M_0=1) = 1$	$J_7 (V_0=1) = -X_P$	$J_7 (p=1) = m_{\text{stat}} - J_4 v_L$
2		1,587 · 10 <sup>-2</sup>							
		6,469 · 10 <sup>-2</sup>	1,940 · 10 <sup>-2</sup>	1,592 · 10 <sup>-2</sup>	1,351 · 10 <sup>-2</sup>	1,216 · 10 <sup>-2</sup>			
		1,086	1,716 · 10 <sup>-2</sup>	1,407 · 10 <sup>-2</sup>	1,792 · 10 <sup>-2</sup>	4,086 · 10 <sup>-3</sup>			
4		2,544 · 10 <sup>-2</sup>	8,352 · 10 <sup>-2</sup>						
		7,864 · 10 <sup>-2</sup>	0,1125	5,677 · 10 <sup>-2</sup>	5,018 · 10 <sup>-2</sup>	4,619 · 10 <sup>-2</sup>			
		0,1043	1,099	5,020 · 10 <sup>-2</sup>	6,654 · 10 <sup>-2</sup>	1,552 · 10 <sup>-2</sup>			
6		3,355 · 10 <sup>-2</sup>	0,1197	0,2527					
		9,044 · 10 <sup>-2</sup>	0,1401	0,1788	0,1090	0,1018			
		0,1199	0,1239	1,158	0,1445	3,420 · 10 <sup>-2</sup>			
8		4,019 · 10 <sup>-2</sup>	0,1493	0,3241	0,5682				
		0,1001	0,1626	0,2127	0,2651	0,1803			
		0,1327	0,1438	0,1881	1,352	6,059 · 10 <sup>-2</sup>			
10		4,534 · 10 <sup>-2</sup>	0,1722	0,3795	0,6724	1,096			
		0,1076	0,1802	0,2390	0,3002	0,3933			
		0,1427	0,1593	0,2113	0,3980	1,132			

 $A_n$ 

1,326

0,8842

0,8842

1,326

0,3360

 $v_L = 0$  $v_L = 0$ 

$$v_L = - \int_0^L F N ds = 91,23$$

TABLEAU IX

Pts	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$
2	0,3926	$5,680 \cdot 10^{-2}$	$1,166 \cdot 10^{-2}$	$7,665 \cdot 10^{-3}$	$4,327 \cdot 10^{-2}$
4	1,019	0,2923	0,1024	$2,843 \cdot 10^{-2}$	0,1929
6	1,993	0,8569	0,4327	$7,962 \cdot 10^{-2}$	0,4657
8	3,512	1,994	1,287	0,1953	0,8750
10	5,991	4,187	3,230	0,4550	1,421

Nous obtenons ainsi les tableaux de valeurs suivants (tableaux IX, X et XI)<sup>7)</sup>.

Le calcul de l'intégrale  $J_6$  est inutile car  $u_L = 0$ .

La résolution de ces trois systèmes d'équations donne les résultats du tableau XI.

Les équations (3.10) permettent de calculer les coefficients des équations (III.2.2):

$$\begin{aligned} u_{01} &= -3,964 M_{01} + 1,090 V_{01} + 749,2 p \\ v_{01} &= 1,090 M_{01} - 0,5425 V_{01} - 274,9 p \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients ainsi obtenus par les méthodes générale et d'approximations successives diffèrent entre eux de 5% au plus.

Déterminons alors les équations correspondant aux conditions d'équilibre et de compatibilité entre les coques ① et ② (fig. 16).

### III.3 Equations d'équilibre et de compatibilité

Selon la figure 17:

$$\begin{aligned} M_{01} &= M_{02} & v_{01}^* &= v_{02}^* \Rightarrow v_{01} = v_{02} \text{ (éq. 2.13)} \\ V_{01} &= -V_{02} & u_{01} &= -u_{02} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

(et par simple équilibre statique des coques:

$$H_{01} = H_{02} = \pi p r_0^2.$$

Les équations (III.5, III.1, III.3) ou (III.5, III.1, III.4) permettent de déterminer l'ensemble des hyperstatiques et des déplacements au raccord des coques ① et ②.

### III.4 Calcul des hyperstatiques et des déplacements au raccord des coques ① et ②

Tous calculs effectués (tableau XII).

### III.5 Evolution du moment longitudinal dans les coques ① et ②

a) coque ①: selon les tableaux VIII § III.2.1 et XI § III.2.2.

$$M = M(M_0 = 1) M_0 + M(V_0 = 1) V_0 + M(p = 1) p$$

Il suffit de remplacer  $M_0$  et  $V_0$  par leurs valeurs pour obtenir en chaque point extrémité des intervalles la valeur du moment longitudinal  $M$  (fig. 20).

b) coque ②: (éq. 3.3):

$$v = v_1 + e^{-p_1 x} (C_1 \cos p_2 x + C_2 \sin p_2 x)$$

avec  $v_1 \rightarrow$  éq. (3.4);  $p_1, p_2 \rightarrow$  éq. (3.5)

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v(x_2 = 0) \\ u_0 &= v'(x_2 = 0) \end{aligned} \right\} C_1, C_2$$

$$\text{d'autre part: } M = \frac{v''}{C} \cos \varphi \text{ avec } C = \frac{1}{r^{1-\mu} h^3}$$

TABLEAU XI

Pts	$M(M_0 = 1)$	$M(V_0 = 1)$	$M(p = 1)$
0	1	0	0
2	0,8916	-0,2138	-152,2
4	0,7633	-0,3578	-248,4
6	0,6199	-0,4401	-297,2
8	0,4675	-0,4613	-301,6
10	0,3835	-0,5052	-318,0

donc:

$$M = \frac{\cos \varphi}{C} [(p_1^2 - p_2^2) e^{-p_1 x} (C_1 \cos p_2 x + C_2 \sin p_2 x) + 2 p_1 p_2 e^{-p_1 x} (C_1 \sin p_2 x - C_2 \cos p_2 x)]$$

Les résultats numériques obtenus sont représentés à la figure 20.

Avant de tracer ces courbes, effectuons une deuxième itération sur l'effort normal  $N$ .

### III.5 2<sup>e</sup> itération sur $N: N_{II}$

1) coque ①: à ce stade nous avons:

$$v^*(M_0) = v(M_0); \quad v^*(V_0) = v(V_0)$$

et

$$v^*(p) = v(p) + \int_0^P F N ds$$

donc:  $v^* = v^*(M_0) + v^*(V_0) + v^*(p)$

nous pouvons alors calculer:

$$N_{II} = N_{\text{stat}} + \sin \varphi_P \cdot \left( \int_0^P A v^* ds + \mu \int_0^P \frac{N_I}{r} ds \right)$$

et ainsi:  $m_{\text{stat}_{II}}(p = 1)$ <sup>9)</sup> et  $v_L(p = 1)$ , nous obtenons:

Pts	$m_{\text{stat}}(p = 1)$	après 50 itérations d'approximations successives:	Pts	$M(p = 1)$
0	0		0	0
2	-175,1		2	-157,3
4	-307,8		4	-248,3
6	-401,1		6	-289,6
8	-457,7		8	-296,7
10	-480,7		10	-285,2

$$v_L(p = 1) = 61,48 p$$

<sup>9)</sup> De la même façon qu'auparavant (§ III.2.1):

$$N_{II}(M_0) = 0, \quad N_{II}(V_0) = 0$$

et

$$N_{II}(p) = N_{\text{stat}} + \sin \varphi_P \left( \int_0^P A v^* ds + \mu \int_0^P \frac{N_I}{r} ds \right)$$

mais notons que dans ce cas:

$$N_{II}(p) = f(V_{01}, M_{01}) \text{ car } N_{\text{stat}} = f(H_{01}, V_{01}, p) \text{ et } v = f(M_{01})$$

TABLEAU XII

Méthode par amortissement + méthode par approximations successives:			Méthode par amortissement + méthode générale:		
$M_{01} = 48,85 p$	$u_{01} = 130,8 p$		$M_{01} = 47,02 p$	$u_{01} = 118,6 p$	
$M_{02} = 48,85 p$	$u_{02} = -130,8 p$		$M_{02} = 47,02 p$	$u_{02} = -118,6 p$	
$V_{01} = -409,6 p$	$v_{01} = -1,729 p$		$V_{01} = -407,5 p$	$v_{01} = -2,606 p$	
$V_{02} = 409,6 p$	$v_{02} = -1,729 p$		$V_{02} = 407,5 p$	$v_{02} = -2,606 p$	
$H_{01} = H_{02} = 201,1 p$			$H_{01} = H_{02} = 201,1 p$		

<sup>7)</sup> Intégrations par polynômes de Newton, c'est-à-dire par interpolation de l'ensemble des points.

<sup>8)</sup> Tous calculs faits, nous avons:

1) amortissement + approximations successives:  $C_1 = -152,0$ ;  $C_2 = -299,1$

2) amortissement + générale:  $C_1 = -152,9$ ;  $C_2 = -289,0$ ; et  $p_1 = 1,313$ ;  $p_2 = 1,105$ .

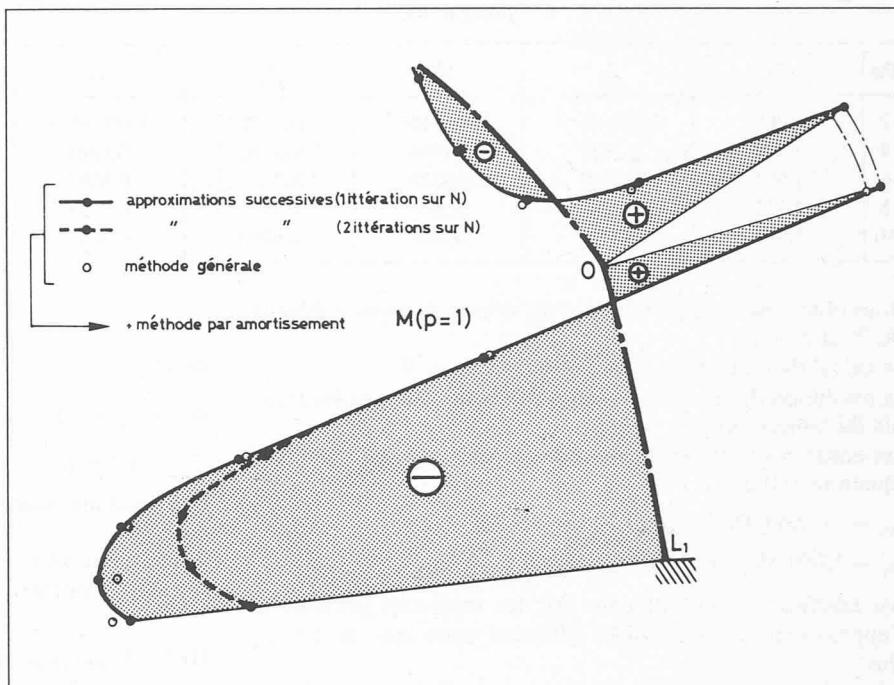


Fig. 20. — Evolution graphique du moment longitudinal.

et les coefficients de l'équation (III.2)

$$\begin{aligned} u_{01} &= -3,762 M_{01} + 1,135 V_{01} + 756,0 p \\ v_{01} &= 1,090 M_{01} - 0,5494 V_{01} - 294,7 p \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

2) coque ②:  $N_{02II} = H_0 \cos \varphi_{02} + V_{02} \sin \varphi_{02} = 453,7 p$   
en introduisant cette valeur dans  $m''_{\text{stat0}}$  puis dans l'équation (III.1):

$$\begin{aligned} M_{02} &= -0,1818 v_{02} - 0,1621 u_{02} + 24,94 p \\ V_{02} &= -0,4269 v_{02} - 0,1968 u_{02} + 377,5 p \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Tous calculs effectués:

$$\begin{aligned} M_{01} &= 47,11 p & u_{01} &= 115,4 p \\ M_{02} &= 47,11 p & u_{02} &= -115,4 p \\ V_{01} &= -408,3 p & v_{01} &= -19,05 p \\ V_{02} &= 408,3 p & v_{02} &= -19,05 p \\ H_{01} &= H_{02} = 201,1 p \end{aligned}$$

et l'évolution de  $M$  dans le fond:

Pts	$M/p$
0	47,11
2	-23,33
4	-62,87
6	-79,03
8	-79,08
10	-69,95

**Remarques:** Nous constatons qu'une deuxième itération sur  $N$  n'affecte pratiquement pas les efforts hyperstatiques au point  $O$ ; par contre, on note une différence importante du déplacement radial:  $v_0 = v_0^*$ . Remarquons cependant que cette différence doit être considérée en valeur absolue et non relative car  $v_0^* \ll$  (par exemple  $v_{02\text{membrane}}^* = v_{10} = 150,3 p$ ).

Si le moment longitudinal au point  $O$  demeure inchangé, il n'en est pas de même au point  $L_1$ . Toutefois cet effet est particulièrement sensible dans cet exemple<sup>10)</sup> (où  $N_I = N_{\text{membrane}} \neq N_{II} \cong N_{III} = \dots = N_{\text{réel}} \Rightarrow M(N_I) \neq M(N_{II}) \cong \dots = M(N_{\text{réel}})$ ). Dans la plupart des cas, une seule itération sur  $N$  sera suffisante ( $N_I = N_{\text{membrane}} \Rightarrow M(N_I) \cong M(N_{II}) \cong \dots = M(N_{\text{réel}})$ ).

### III.6 Evolution graphique du moment longitudinal au sein des coques ① et ② (fig. 20)

<sup>10)</sup> La fibre moyenne de la coque ① étant très proche de la « verticalité » par rapport à l'axe de révolution du corps, l'effet de  $N$  sur  $v^*$  est important par rapport à celui de  $M$  (éq. 2.9).

#### Adresse des auteurs:

Jacques Paschoud, professeur  
Philippe Wieser  
Section métallurgie mécanique  
Département des matériaux de l'EPFL  
Chemin de Bellerive 34, 1007 Lausanne

## Actualité

### Nouvelles mesures anti-pollution en Norvège

La chambre basse du Parlement norvégien, appelée Odelsting, a adopté de nouvelles lois qui remplaceront celles actuellement en vigueur. Le principe de base de cette nouvelle législation est que toute pollution, quelle qu'en soit la forme, est interdite à moins qu'une permission ait été préalablement obtenue.

Cette nouvelle loi concerne la pollution de l'air, de la terre et de l'eau et contient des paragraphes sur les déchets et ce que l'on appelle pollution sonore. Tous les partis politiques étaient d'accord sur le besoin d'avoir des règles globales sur la pollution, mais un certain désaccord concernait surtout les pouvoirs accordés aux autorités concernées par ces questions et, en particulier, un paragraphe disant que les autorités peuvent exiger

que les responsables de la pollution développent de nouvelles méthodes de production ou se procurent un nouveau type de matériel pour prévenir la pollution. Il fut signalé que ce point pourrait poser des problèmes aux petites et moyennes entreprises.

Parmi les autres mesures de lutte contre la pollution, on peut relever que le Service national du contrôle de la pollution vient d'acheter un matériel radar perfectionné pour surveiller les fuites d'huile en mer. Cet équipement sera prochainement monté à bord d'un avion dont dispose le Ministère de l'environnement.

La Norvège a dernièrement signé un accord avec les pays de la CEE sur la protection de la nature. Le but principal en est d'obtenir une plus grande collaboration dans les questions de pollution, en particulier pour lutter contre la pollution de l'air causée par les usines et contre les effets des fuites de mazout dans les ports.

*Quelle que soit la sympathie qu'inspire l'essence de cette loi, elle fait peur: toute pollution! Une autorisation préalable sera nécessaire pour allumer une cigarette (d'aucuns jugeront que ce n'est pas un mal...).*

(Réd.)