

**Zeitschrift:** Ingénieurs et architectes suisses  
**Band:** 106 (1980)  
**Heft:** 14

**Artikel:** Les critères de rupture en analyse des contraintes, 3e partie:  
solllicitations variables  
**Autor:** Xenophontidis, Nicolas  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-73965>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Les critères de rupture en analyse des contraintes

## 3<sup>e</sup> partie: Sollicitations variables

par Nicolas Xenophontidis, Lausanne

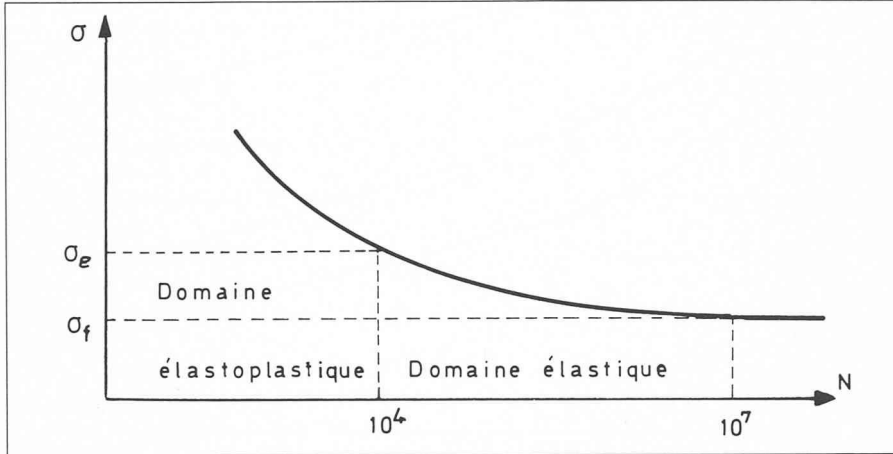


Fig. 7.1. — Domaine élastique et élastoplastique de la courbe de fatigue.  
 $\sigma_e$ : limite d'élasticité  
 $\sigma_f$ : limite de fatigue  
 $N$ : nombre de cycles

### 7. Fatigue oligocyclique

#### 7.1 Généralités

On a représenté à la figure 7.1 la courbe de fatigue donnant les amplitudes admissibles des contraintes alternées; dans le cas où le nombre de cycles est élevé, les déformations admissibles restent en général dans le domaine élastique et les contraintes sont donc proportionnelles aux déformations.

Lorsque le nombre de cycles est faible, l'amplitude des déformations nécessaire pour provoquer la rupture est beaucoup plus élevée et entre largement dans le domaine plastique; les contraintes ne sont donc plus proportionnelles aux déformations. Le paramètre qui intervient dans le tracé d'une courbe expérimentale à faible nombre de cycles devient ainsi l'amplitude de déformation et c'est celle-ci qui devrait être portée en ordonnée. Cependant, pour rendre les résultats obtenus ainsi que les déterminations effectuées sur la courbe directement comparables aux contraintes calculées, on utilise une contrainte fictive égale au produit de l'amplitude de déformation par le module d'élasticité, conformément à la figure 7.2.

#### 7.2 Critère de Coffin

La fatigue à faible nombre de cycles, dite encore fatigue oligocyclique, est un phénomène d'aspect très différent de la fatigue classique. Par exemple, les aciers se comportant bien vis-à-vis d'un des deux types se comportent souvent mal vis-à-vis de l'autre. Ainsi, pour la fatigue oligocyclique, les aciers à faible limite

d'élasticité, mais à fort exposant d'écroûissage (voir relation (6.11)), sont préférables aux autres aciers, étant donné que la limite d'endurance ne peut intervenir et que la tenue dépend du nombre de sollicitations subi durant la vie de la structure.

De façon générale, pour les métaux utilisés dans les constructions, il n'apparaît de fissuration par fatigue qu'aux endroits où le métal est déformé plastiquement à chaque cycle. D'importantes conséquences découlent de cette constatation: Les contraintes moyennes existant dans la structure ne pourront intervenir, car le premier cycle entraînera leur relaxation. D'autre part, en plasticité cyclique, c'est la déformation cyclique qui caractérise l'action locale entraînant la fissuration par fatigue, la notion de contrainte devenant donc fictive.

A partir d'essais sur éprouvettes, Coffin [13] a trouvé en 1954 la relation suivante pour une grande variété de métaux ductiles à une température inférieure à la température critique de fluage pour la durée de l'essai:

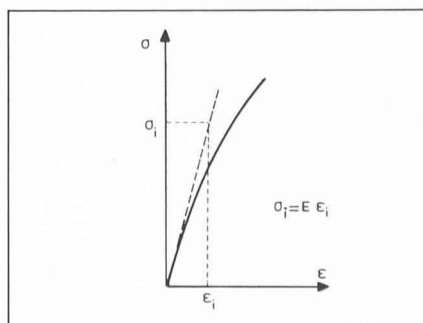


Fig. 7.2. — Détermination de la contrainte fictive.

$$\sqrt{N} \epsilon_p = C \quad (7.1)$$

avec

$N$ : nombre de cycles à la rupture  
 $\epsilon_p$ : déformation plastique par cycle  
 $C$ : constante du matériau

Plus récemment Coffin [14], a trouvé que

$$C = \frac{1}{2} l_n \frac{100}{100 - \epsilon} \quad (7.2)$$

où  $\epsilon$  représente la striction lors de la rupture statique. A partir de la relation (7.1), Langer [15] a obtenu l'équation (7.3), exprimant la courbe de fatigue:

$$\epsilon_p = \frac{C}{\sqrt{N}} \quad (7.3)$$

$$\epsilon_p + \frac{2\sigma_f}{E} = \epsilon_t = \frac{C}{\sqrt{N}} + \frac{2\sigma_f}{E} \quad (7.4)$$

La relation (7.4) peut également s'écrire

$$\frac{\epsilon_t}{2} E = \frac{EC}{2\sqrt{N}} + \sigma_f \quad (7.5)$$

Finalement, on trouve donc

$$\sigma = \frac{EC}{2\sqrt{N}} + \sigma_f \quad (7.6)$$

$\sigma_f$ : contrainte d'endurance

$\sigma$ : amplitude de la contrainte alternée fictive conduisant à la rupture

$\epsilon_t$ : déformation totale

L'expression (7.6) montre que, pour  $N$  infini, la contrainte alternée admissible tend vers la limite d'endurance  $\sigma_f$ .

Par contre, pour  $N$  fini, la comparaison avec les courbes expérimentales correspondant à un grand nombre de matériaux indique que la courbe déduite de l'équation est plus conservatrice en tout point et que l'écart maximum entre les deux courbes se situe aux environs de  $N = 1000$  tout en ne dépassant pas 16%. Lors de concentrations de contraintes dans la fatigue oligocyclique, il est habituel d'utiliser de faibles facteurs de concentration lorsque le nombre de cycles n'est pas élevé et des valeurs plus importantes quand le nombre de cycles augmente. Selon Langer [15], nous devons utiliser un facteur de concentration indépendant du nombre de cycles.

### 8. Critères de rupture en fatigue classique

#### 8.1 Généralités

Les critères exposés ci-après sont basés sur les hypothèses suivantes:

- Les directions des contraintes principales ne varient pas pendant la sollicitation.
- Les contraintes principales atteignent leurs valeurs extrêmes au même moment.

- c) Les valeurs extrema des contraintes principales ne varient pas en fonction du temps.
- d) Pour l'état monoaxial, la relation de Goodman est valable.
- e) La condition limite définissant la rupture est soit la contrainte normale maximum, soit la contrainte de cisaillement maximum, soit encore la contrainte de cisaillement octaédrale.
- f) Le matériau est isotrope et homogène. Cette dernière hypothèse indique que dans l'exposé qui suit nous ne traiterons pas de ce que l'on appelle la mécanique de rupture.

8.2 Critère de la contrainte normale maximum

Nous adoptons les symboles suivants :

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : contraintes principales
- $\sigma_{1max}, \sigma_{2max}, \sigma_{3max}$  : valeurs maxima des  $\sigma_i$
- $\sigma_{1m}, \sigma_{2m}, \sigma_{3m}$  : valeurs moyennes des  $\sigma_i$
- $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$  : valeurs alternées des  $\sigma_i$

La condition de Goodman est exprimée par la relation

$$\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_u} = 1 \quad (8.1)$$

avec

- $\sigma_f$  : contrainte d'endurance
- $\sigma_u$  : contrainte de rupture

En remplaçant  $\sigma_{1a}$  par  $\sigma_{1max} - \sigma_{1m}$  et  $\frac{\sigma_f}{\sigma_u}$  par  $p$ , nous obtenons :

$$\sigma_{1max} = (1-p) \sigma_{1m} + \sigma_f \quad (8.2)$$

La relation (8.2) donne la contrainte de rupture en supposant que  $\sigma_1$  est la contrainte principale critique.

De même, au cas où  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes critiques, il vient :

$$\sigma_{2max} = (1-p) \sigma_{2m} + \sigma_f \quad (8.3)$$

$$\sigma_{3max} = (1-p) \sigma_{3m} + \sigma_f \quad (8.4)$$

Souvent, nous ne disposons pas des résultats expérimentaux pour définir la contrainte d'endurance  $\sigma_f$ . Juvinall [9] propose alors l'utilisation de la relation suivante :

$$\sigma_f = \frac{\sigma_u}{2} C_S \cdot C_L \cdot C_D \quad (8.5)$$

avec

- $C_S$  : coefficient de l'état de surface
- $C_L$  : coefficient de charge
- $C_D$  : coefficient de dimension

Les coefficients  $C_S$  et  $C_D$  peuvent être obtenus par les figures 8.1 et 8.2, tandis que le coefficient  $C_L$  dépend du mode de sollicitations selon le tableau I.

TABEAU I

Coefficient	Sollicitations			
	Flexion	Torsion	Traction	Traction + flexion
$C_L$	1,0	0,58	0,9	0,6 à 0,85

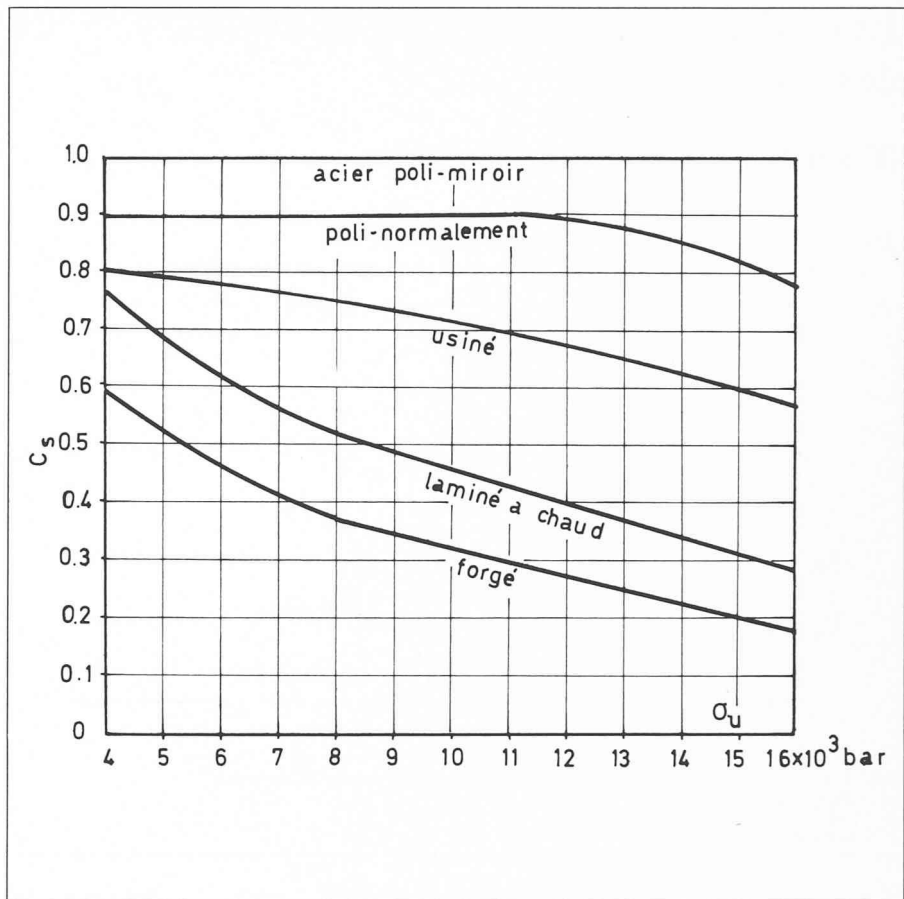


Fig. 8.1. — Coefficient  $C_S$  en fonction de la contrainte de traction.

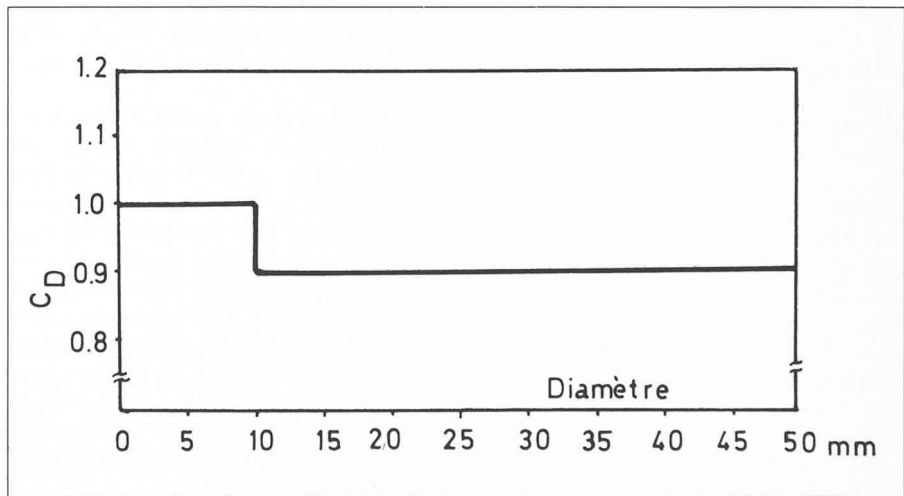


Fig. 8.2. — Coefficient  $C_D$  en fonction du diamètre.

8.3 Critère du cisaillement maximum

Ce critère, proposé par Soderberg, est basé sur la relation (8.2) avec

$$p = \frac{\sigma_f}{\sigma_{yp}} \quad (\sigma_{yp} : \text{contrainte d'écoulement}).$$

Selon cette théorie, la contrainte définissant la rupture est la contrainte de cisaillement maximum.

Exprimons les contraintes maximales et moyennes de cisaillement.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1max} &= \frac{\sigma_{1max} - \sigma_{2max}}{2} \\ \tau_{2max} &= \frac{\sigma_{2max} - \sigma_{3max}}{2} \\ \tau_{3max} &= \frac{\sigma_{3max} - \sigma_{1max}}{2} \\ \tau_{1m} &= \frac{\sigma_{1m} - \sigma_{2m}}{2} \\ \tau_{2m} &= \frac{\sigma_{2m} - \sigma_{3m}}{2} \\ \tau_{3m} &= \frac{\sigma_{3m} - \sigma_{1m}}{2} \end{aligned} \right\} (8.6)$$

Dans le cas où

$$\sigma_{2\max} = \sigma_{3\max} = \sigma_{2m} = \sigma_{3m} = 0,$$

nous obtenons

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2} \quad \tau_m = \frac{\sigma_m}{2}$$

L'équation (8.2) devient donc

$$\tau_{\max} = (1-p) \tau_m + \sigma_{f/2} \quad (8.7)$$

A l'aide des expressions (8.6), on obtient les relations qui définissent la rupture selon cette théorie.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1\max} &= \sigma_{2\max} + (1-p) \\ & \quad (\sigma_{1m} - \sigma_{2m}) + \sigma_f \\ \sigma_{2\max} &= \sigma_{3\max} + (1-p) \\ & \quad (\sigma_{2m} - \sigma_{3m}) + \sigma_f \\ \sigma_{3\max} &= \sigma_{2\max} + (1-p) \\ & \quad (\sigma_{3m} - \sigma_{1m}) + \sigma_f \end{aligned} \right\} (8.8)$$

L'équation qui définit la rupture dépend des valeurs relatives des six contraintes principales, de sorte que nous sommes obligés de considérer les trois équations lors de notre investigation.

8.4 Critère du cisaillement octaédral

Selon cette théorie, la rupture par fatigue survient quand la contrainte octaédrale du cisaillement maximum sous une sollicitation variable combinée est égale, au moment de la rupture, à la contrainte de cisaillement octaédral maximale lors d'une sollicitation monoaxiale variable. On suppose d'autre part que la contrainte octaédrale moyenne de cisaillement pour les cas de contraintes combinées est la même pour les cas de contraintes monoaxiales.

Nous remarquons qu'en utilisant le critère de la contrainte octaédrale plutôt que le critère du travail maximum de distorsion la théorie n'est plus limitée au domaine élastique, mais est encore applicable lorsque la limite d'écoulement est dépassée.

Pour l'application de cette théorie, il est nécessaire de déterminer les valeurs maximale et moyenne de la contrainte de cisaillement octaédrale.

Nous avons vu (voir relation (2.27)) que la contrainte de cisaillement est donnée par la relation :

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Il vient ainsi

$$\left. \begin{aligned} (\tau_0)_{\max} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(\sigma_{1\max} - \sigma_{2\max})^2 + (\sigma_{2\max} - \sigma_{3\max})^2 + (\sigma_{3\max} - \sigma_{1\max})^2}{3}} \\ (\tau_0)_m &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sigma_{1m} - \sigma_{2m})^2 + (\sigma_{2m} - \sigma_{3m})^2 + (\sigma_{3m} - \sigma_{1m})^2}{3}} \end{aligned} \right\} (8.9)$$

Pour une sollicitation monoaxiale, nous obtenons

$$(\tau_0)_{\max}' = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\max}$$

$$(\tau_0)'_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_m$$

et la relation (8.1) devient

$$(\tau_0)'_{\max} = (1-p) (\tau_0)'_m + \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad (8.10)$$

avec  $p = \frac{\sigma_f}{\sigma_u}$

Dans l'hypothèse plus conservatrice de Soderberg, on avait

$$p = \frac{\sigma_f}{\sigma_{yt}}$$

La rupture par fatigue lors d'une sollicitation combinée ayant lieu quand :

$$(\tau_0)'_{\max} = (\tau_0)_{\max}$$

avec la supposition que

$$(\tau_0)'_{\text{moy}} = (\tau_0)_{\text{moy}},$$

les relations (8.9) et (8.10) deviennent

$$\sqrt{\frac{(\sigma_{1\max} - \sigma_{2\max})^2 + (\sigma_{2\max} - \sigma_{3\max})^2 + (\sigma_{3\max} - \sigma_{1\max})^2}{3}} - (1-p) \sqrt{\frac{(\sigma_{1m} - \sigma_{2m})^2 + (\sigma_{2m} - \sigma_{3m})^2 + (\sigma_{3m} - \sigma_{1m})^2}{3}} = \sqrt{2} \sigma_f \quad (8.11)$$

8.5 Influence des concentrations de contraintes

Le facteur de concentration en fatigue est défini par la relation de Peterson :

$$k_f = q (k_t - 1) + 1 \quad (8.12)$$

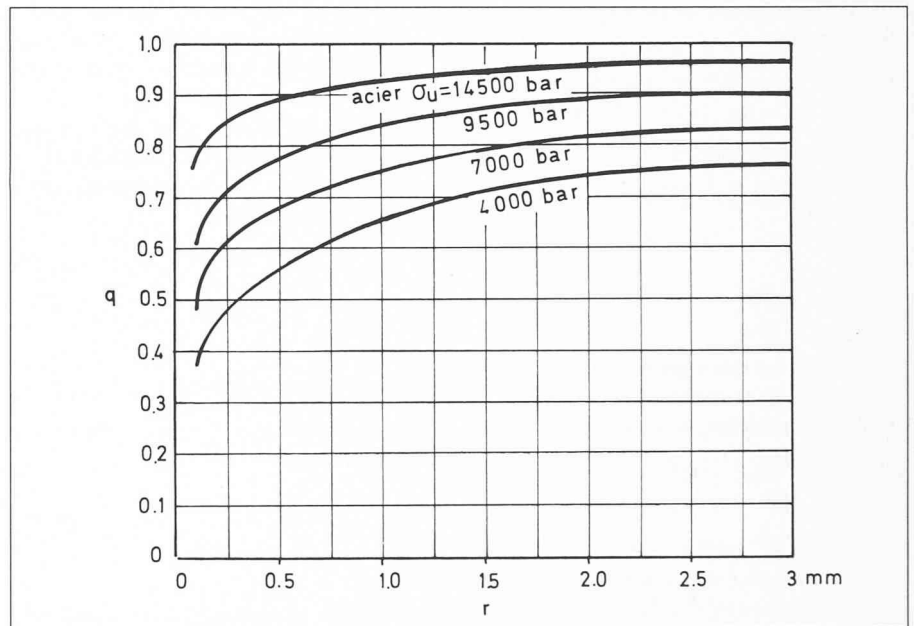


Fig. 8.3. — Coefficient q en fonction du rayon de l'entaille r.

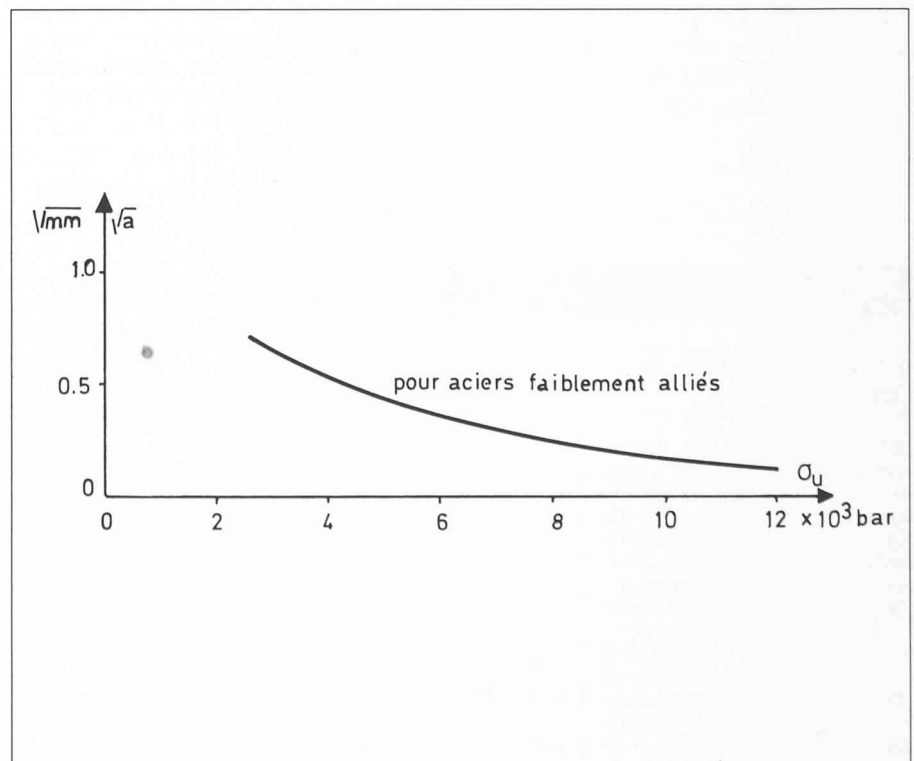


Fig. 8.4. — Valeurs du coefficient a en fonction de la contrainte de traction.

avec

 $q$  : facteur de sensibilité à l'entaille $k_t$  : facteur théorique de concentrationLe coefficient  $q$  est obtenu soit par la figure 8.3, soit par la relation

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{r}}}$$

où le coefficient  $a$  est donné par la figure 8.4. Dans la relation (8.12), le facteur  $k_t$  est défini pour un état de contrainte monoaxial. Quant au facteur  $k'_t$  correspondant à une sollicitation combinée, il peut être défini au moyen de la théorie du cisaillement octaédrale en fatigue.

Considérons le cas de contraintes alternées suivant :

$$\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a} - \sigma_{2a}\sigma_{3a} - \sigma_{3a}\sigma_{1a} - \sigma_{3a}\sigma_{1a} = \sigma_f^2$$

Après transformations, nous trouvons :

$$\sigma_{1a} \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \alpha\beta - \beta} = \sigma_f \quad (8.13)$$

avec

$$\alpha = \frac{\sigma_{2a}}{\sigma_{1a}} \quad \beta = \frac{\sigma_{3a}}{\sigma_{1a}}$$

En divisant les deux membres de l'équation (8.13) par la contrainte nominale  $\sigma_N$  de la pièce entaillée, il vient :

$$k'_t = k_t \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \alpha\beta - \beta} \quad (8.14)$$

Le facteur  $k'_t$ , défini par (8.14), tient compte de l'effet de concentration sous l'influence des sollicitations combinées. La relation (8.12) devient alors

$$k'_f = q(k'_t - 1) + 1 \quad (8.15)$$

### 8.5.1 Critère de rupture pour des pièces entaillées soumises à des sollicitations monoaxiales alternées

Dans ce cas, nous avons

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_f}{k_f}$$

ou

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_f}{q(k_t - 1) + 1} \quad (8.16)$$

La relation ci-dessus est utilisée pour les matériaux ductiles soumis à des sollicitations monoaxiales alternées lorsque les sollicitations dans la section de l'entaille sont monoaxiales. Dans le cas où les pièces sont sollicitées biaxialement dans la section de l'entaille, le facteur  $k_f$  est remplacé par  $k'_f$  (8.15). Pour les matériaux fragiles, Peterson recommande l'utilisation de la relation (8.16) sans modification du facteur  $k_f$ . Timoshenko [3] propose l'utilisation de facteur  $k_t$  à la place de  $k_f$ .

### 8.5.2 Critère de rupture pour des pièces entaillées soumises à des sollicitations monoaxiales (composantes statique et dynamique)

Pour ce cas de charge, Peterson propose de modifier la relation de Goodman (8.1) par multiplication de la contrainte alternée par le facteur  $k_f$  :

$$k_f \frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = 1 \quad (8.17)$$

avec

 $\sigma_a$  : contrainte alternée $\sigma_m$  : contrainte moyenne

Pour les matériaux fragiles, Marin [6] propose la relation :

$$\frac{k_f \sigma_a}{\sigma_f} + \frac{k_p \sigma_m}{\sigma_n} = 1 \quad (8.18)$$

avec

 $k_p$  : facteur de concentration plastique.

Si le régime dans la section de l'entaille était triaxial, nous devrions remplacer  $k_f$  par  $k'_f$  dans les relations (8.17) et (8.18). Toujours pour les matériaux fragiles, Timoshenko [3], par manque de données expérimentales, propose la relation :

$$k_t \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right) = 1$$

### 8.5.3 Critère de rupture pour des pièces entaillées soumises à des sollicitations combinées (composantes statique et dynamique)

Pour ce cas de charge, Marin [6] propose l'utilisation de la théorie du cisaillement octaédral. Dans l'hypothèse où les contraintes moyennes sont nulles et pour une sollicitation biaxiale, nous obtenons :

$$(k_{1f} \cdot \sigma_{1a})^2 - k_{1f} \cdot k_{2f} \cdot \sigma_{1a} \cdot \sigma_{2a} + (k_{2f} \cdot \sigma_{2a})^2 = \sigma_f^2 \quad (8.19)$$

avec

$k_{1f}$ ,  $k_{2f}$  facteurs de concentration définis par (8.12) et (8.15).

En admettant la présence de contraintes moyennes, Marin [6], pour un état biaxial, propose la relation

$$\left\{ (k_{1a} \cdot \sigma_{1a} + k_{1m} \cdot \sigma_{1m})^2 - (k_{1a} \sigma_{1a} + k_{1m} \cdot \sigma_{1m})(k_{2a} \cdot \sigma_{2a} + k_{2m} \cdot \sigma_{2m}) + (k_{2a} \cdot \sigma_{2a} + k_{2m} \cdot \sigma_{2m})^2 \right\}^{1/2}$$

$$- (1-p) \left\{ k_{1m}^2 \cdot \sigma_{1m}^2 - k_{1m} k_{2m} \cdot \sigma_{1m} \cdot \sigma_{2m} + k_{2m}^2 \cdot \sigma_{2m}^2 \right\}^{1/2} = \sigma_f \quad (8.20)$$

Quant à Timoshenko [3], il propose l'utilisation de la relation (8.17) avec

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2 \right\}^{1/2}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sigma_{1m} - \sigma_{2m})^2 + (\sigma_{2m} - \sigma_{3m})^2 + (\sigma_{3m} - \sigma_{1m})^2 \right\}^{1/2}$$

(à suivre)

Adresse de l'auteur :

Nicolas Xenophontidis  
Ingénieur EPFL  
Institut des métaux et des machines  
de l'Ecole polytechnique fédérale  
de Lausanne,  
Chemin de Bellerive 34  
1007 Lausanne

## Bibliographie

### Le pilotage économique de l'entreprise

par Paul Jubin. — Un volume broché, 16×24 cm, 237 pages, 54 figures. Editions Entreprise moderne d'édition, Paris, 1972. Après avoir occupé plusieurs postes de cadre dans des entreprises industrielles importantes, l'auteur est maintenant ingénieur conseil et anime de nombreux séminaires et journées d'étude sur les problèmes de management : plans de développement à cinq ans, structures, gestion financière, tableau de bord et contrôle de gestion. Le schéma du processus de pilotage économique décrit dans ce livre

est une tentative pour mettre les notions de management modernes à la portée des chefs d'entreprises et en permettre l'application pratique. L'ouvrage se termine par un exemple de pilotage économique d'une entreprise de la banlieue de Nancy occupant une centaine de personnes.

PH

### Procédés de fondations et d'infrastructure

Cette Note d'information technique a pour objet la description des procédés de fondations profondes et d'infrastructure :

- par pieux ou puits ;
- par soutènement ;
- par traitement du sol en profondeur.

Si la Note est volontairement limitée à la description des procédés mis en œuvre par les entreprises de construction spécialisées établies en Belgique et qui agissent habituellement au titre de sous-traitant d'entreprises générales, elle n'en présente pas moins un grand intérêt pour toutes les entreprises de fondations profondes et d'infrastructure d'autres pays.

Les textes de synthèse (introduction, tableaux, intercalaires) ont été rédigés par les membres d'un groupe de travail dont le rapporteur est M. C. Legrand, ingénieur au C.S.T.C.

Afin de rendre la consultation des 100 fiches plus claire et de

mieux la structurer, chaque subdivision principale (il y en a 23) est précédée d'une synthèse intitulée « intercalaire » qui présente les caractéristiques communes essentielles des procédés décrits dans la subdivision correspondante ainsi que des remarques ou des notes communes à ces mêmes procédés.

On trouve encore dans la Note quatre tableaux synoptiques et récapitulatifs, la liste des entreprises de fondations spéciales consultées ainsi qu'une importante bibliographie.

La N.I.T. 129 (390 p. + 4 dépliants sous encartage, édition française ou édition néerlandaise) est vendue au prix de 400 FB. Les commandes sont à adresser à Documentation-Publications, C.S.T.C., rue du Lombard 41, B 1000 Bruxelles.