

**Zeitschrift:** Ingénieurs et architectes suisses  
**Band:** 106 (1980)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Les critères de rupture en analyse des contraintes, 2e partie: sollicitations statiques  
**Autor:** Xenophontidis, Nicolas  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-73950>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Les critères de rupture en analyse des contraintes

## 2<sup>e</sup> partie: Sollicitations statiques

par Nicolas Xenophontidis, Lausanne

### 3. Critères de rupture basés sur la limite d'écoulement

#### 3.1 Généralités

La condition d'écoulement dans l'état de contrainte tridimensionnelle est essentiellement la généralisation du concept d'écoulement lors d'une charge mono-axiale. En général, la condition d'écoulement peut être exprimée soit par l'équation

$$f(\sigma_{ij}) = C_e \quad (3.1)$$

où  $C_e$  représente une constante liée à la limite d'écoulement soit encore par l'équation

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.2)$$

où

$f_1(\sigma_{ij})$  s'appelle fonction d'écoulement.

Pour les matériaux isotropes, la condition d'écoulement doit être indépendante de la direction et peut par conséquent être exprimée comme une fonction des invariants de l'état de contrainte ou encore comme une fonction symétrique des contraintes principales. La relation (3.1) prendra ainsi la forme :

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C_e \quad (3.3)$$

L'expérience montre que l'écoulement n'est pas affecté par une pression hydrostatique modérée. Ceci permet d'exprimer la relation (3.2) au moyen des invariants du déviateur des contraintes  $I_{2D}$  et  $I_{3D}$  :

$$f_3(I_{2D}, I_{3D}) = 0 \quad (3.4)$$

Parmi les divers critères d'écoulement qui ont été proposés, nous citerons les critères de Tresca et de von Mises.

Lors du début de l'écoulement, ces critères correspondent assez bien aux résultats expérimentaux.

#### 3.2 Critère du plus grand cisaillement (Tresca)

Selon le critère de Tresca l'écoulement survient dès que la plus grande contrainte de cisaillement atteint la valeur limite  $C_e$ . Quand on utilise les contraintes principales, cette condition prend une forme simple. En effet, en supposant que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , le critère de Tresca est donné par l'expression

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = C_e \quad (3.5)$$

La contrainte maximum de cisaillement d'un essai de traction mono-axiale, au moment du début de l'écoulement, est égale à  $\frac{\sigma_e}{2}$

où  $\sigma_e$  représente la contrainte d'écoulement.

Ainsi, en se référant à la contrainte d'écoulement d'un essai de traction, le critère de Tresca devient (voir fig. 3.1).

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_e \quad (3.6)$$

Lors d'un essai de cisaillement pur le critère de Tresca prend la forme (voir fig. 3.1)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (3.7)$$

Dans l'hypothèse où l'on omet de définir l'ordre de grandeur des contraintes, les sollicitations  $\tau_{i\max}$  ( $= \sigma_{ij}$ ) sont données par une des trois relations (3.8) :

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_2 &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_3 &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

D'autre part, puisque  $\tau_e = \sigma_e/2$ , il vient

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_e \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_e \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm \sigma_e \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

En admettant que  $\sigma_3$  est nul, on trouve les deux cas suivants, étant donné que la condition d'écoulement dépend évidemment des signes de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

a) Pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de signes opposés

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_e \quad (3.10)$$

b) Pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de même signe

$$\sigma_1 = \pm \sigma_e, \quad \sigma_2 = \pm \sigma_e \quad (3.11)$$

La figure 3.2 représente graphiquement les relations (3.10) et (3.11).

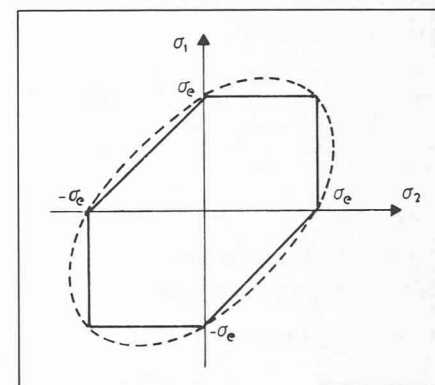


Fig. 3.2. — Théories de rupture basées sur la limite d'écoulement.

— Critère de Tresca  
- - Critère de von Mises

#### 3.3 Critère du plus grand travail de distorsion (Von Mises)

Les conditions d'écoulement de Tresca, appliquées aux problèmes tridimensionnels, présentent certaines difficultés mathématiques. Ce fait a conduit von Mises à l'idée de remplacer le prisme hexagonal des figures 3.2 et 3.6 par le cylindre circonscrit :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (3.12)$$

Cette relation montre que l'écoulement survient quand le second invariant du déviateur des contraintes  $I_{2D}$  (voir relation (2.18)) atteint la valeur spécifique

$$I_{2D} = C_e \quad (3.13)$$

Dans le cas où  $\sigma_3 = 0$ , la relation (3.12) devient

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_e^2 \quad (3.14)$$

L'expression (3.14) est celle d'une ellipse, représentée à la figure 3.2.

De l'avis de plusieurs auteurs, la démonstration de Novozhilov que nous donnons ci-après conduit à une bonne compréhension physique du critère de von Mises.

Les données expérimentales montrent que la déformation plastique des matériaux polycristallins est intimement liée aux contraintes de cisaillement. Ainsi, il est logique de rechercher un critère d'écoulement basé sur ces contraintes.

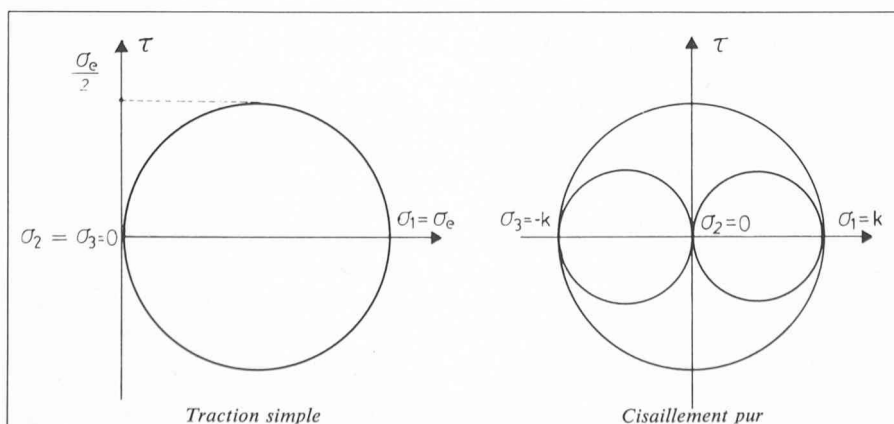


Fig. 3.1. — Cercles de Mohr dans le plan  $\sigma, \tau$ .

Prenons la moyenne des contraintes de cisaillement agissant sur tous les plans autour d'un point et examinons si cette valeur présente une signification physique. L'équation (2.22) donnant la contrainte de cisaillement en fonction de l'orientation du plan de référence; on peut écrire

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)$$

Etudions la valeur moyenne de cette expression et comparons le résultat aux données expérimentales.

Dans le développement qui suit, nous considérerons autour du point donné une sphère complètement couverte d'éléments plans de même surface. La valeur moyenne de  $\tau_n^2$  sur ces plans est donnée par les expressions :

$$(\tau_n^2)_{\text{moy}} = \frac{\sum_1^N \tau_n^2}{N} = \frac{\sum_1^N \tau_n^2 \Delta\Omega}{\sum_1^N \Delta\Omega}$$

avec

$N$  = nombre de facettes

$\Delta\Omega$  = surface de la facette

En supposant que  $\Delta\Omega$  tend vers  $d\Omega$ , on a

$$(\tau_n^2)_{\text{moy}} = \iint \frac{\tau_n^2 d\Omega}{\Omega} \quad (3.15)$$

En se référant à la figure 3.3, où les axes sont orientés selon les directions principales et en choisissant des coordonnées sphériques, les cosinus directeurs de l'élément de surface  $d\Omega$  s'écrivent

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin\theta \cos\phi \\ n_2 &= \sin\theta \sin\phi \\ n_3 &= \cos\theta \end{aligned}$$

où

$$d\Omega = r^2 \sin\theta d\phi d\theta \quad (\Omega = 4\pi r^2)$$

En introduisant la valeur de  $\tau_n^2$  dans l'intégrale (3.15), on a

$$\begin{aligned} (\tau_n^2)_{\text{moy}} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[ \sigma_1^2 \sin^2\theta \cdot \sin^2\phi + \right. \\ &+ \sigma_2^2 \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi + \sigma_3^2 \cos^2\theta - \\ &- (\sigma_1 \sin^2\theta \cdot \sin^2\phi + \sigma_2 \sin^2\theta \cdot \cos^2\phi + \\ &+ \sigma_3 \cos^2\theta)^2 \left. \right] \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

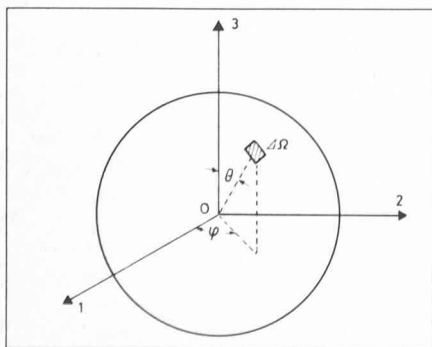


Fig. 3.3. — Sphère élémentaire autour du point O.

L'intégration donne ainsi

$$(\tau_n^2)_{\text{moy}} = \frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.16)$$

Cette relation est proportionnelle à  $I_{2D}$  et montre que le critère de von Mises est équivalent au postulat suivant :

« L'écoulement plastique débute quand  $(\tau_n^2)_{\text{moy}}$  dépasse une valeur critique. »

### 3.4 Représentation dans l'espace des critères Tresca et von Mises; courbes d'écoulement

Considérons l'espace repéré par trois axes de coordonnées rectangulaires, portant les contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Dans cet espace, l'état de contrainte en un point peut être représenté par le vecteur  $\overline{OP}$  (fig. 3.4) dont les composantes sont égales à  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ .

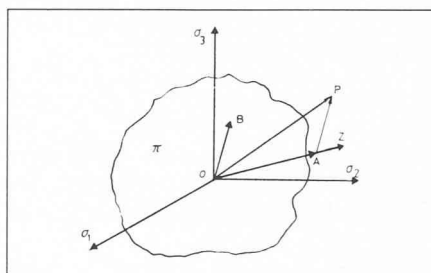


Fig. 3.4. — Espace des contraintes.

Décomposons  $\overline{OP}$  selon la droite  $OZ$ , dont l'équation est  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , et le plan  $\pi$  perpendiculaire à  $OZ$  à l'origine  $O$ . La composante  $\overline{OA}$  représente la contrainte hydrostatique et c'est pour cette raison que la droite  $OZ$  est appelée axe hydrostatique. La composante  $\overline{OB}$  dans le plan  $\pi$  représente le déviateur de l'état de contrainte. Le plan  $\pi$  étant uniformément incliné par rapport aux axes  $\sigma_i$ , il est donné par l'équation

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (3.17)$$

Ce plan est appelé « plan du déviateur de contrainte ».

Dans l'espace repéré par les axes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , la condition d'écoulement (3.3).

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = Cy \quad (3.3)$$

définit une surface appelée surface d'écoulement. Les conditions d'écoulement étant indépendantes de la pression hydrostatique, il est évident que ces surfaces sont des cylindres ayant leurs génératrices parallèles à l'axe hydrostatique. Les points de l'espace qui sont à l'intérieur de la surface cylindrique correspondent à un état de contrainte du domaine élastique, tandis que les points qui se situent sur la surface correspondent à l'état du passage du domaine élastique au domaine plastique. Nous appelons « courbe d'écoulement » la trace de la surface d'écoulement sur le plan du déviateur.

Si l'on considère le plan  $\pi$  depuis l'axe hydrostatique, les contraintes principales

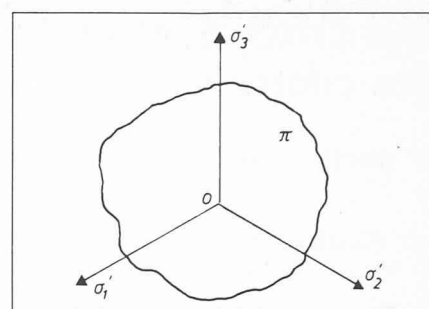


Fig. 3.5. — Projection des axes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sur le plan  $\pi$ .

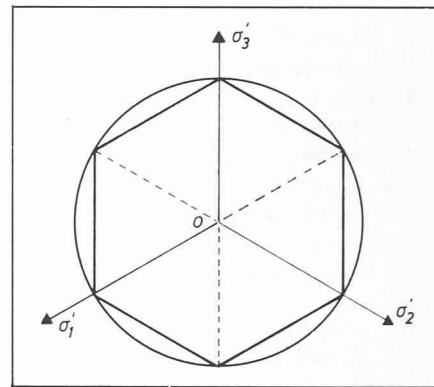


Fig. 3.6. — Courbes d'écoulement correspondant aux critères de Tresca et de von Mises.

apparaissent placées symétriquement à  $120^\circ$  (fig. 3.5).

Examinons quelles sont les courbes d'écoulement correspondant aux critères de Tresca et de von Mises. Les conditions 3.9 définissent un prisme hexagonal régulier dont l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  est perpendiculaire au plan  $\pi$  (par exemple, l'équation  $\sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_e$  représente un couple de plans parallèles au plan défini par les axes  $\sigma_1$  et  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). La projection du prisme sur le plan  $\pi$  est donc un hexagone régulier (fig. 3.6).

Nous remarquons que le prisme de la figure 3.6 découpe sur les axes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  (voir aussi fig. 3.2) des segments de longueur  $\sigma_e$  et que le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone est égal à  $\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e$ ,

puisque  $\cos(\sigma_3, \sigma_3') = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . Ce cercle

n'est évidemment rien d'autre que la courbe d'écoulement correspondant au cylindre donné par la relation (3.12).

### 3.5 Commentaires

a) La condition de Tresca caractérise d'une manière satisfaisante l'état d'écoulement du matériau et s'accorde avec les observations relatives aux lignes de Lüder. Des recherches plus approfondies indiquent que la contrainte principale intermédiaire exerce une certaine influence sur l'état d'écoulement.

b) De nombreuses expériences montrent que le critère de von Mises est plus satisfaisant que celui de Tresca. En effet, selon le critère de Tresca, nous avons  $\tau_e = 0,5 \sigma_e$ . Le critère de von Mises quant à lui peut prendre la forme (voir 2.19)

$$T = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (3.18)$$

et, pour le cisaillement pur ( $T = \tau$ ), nous obtenons

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_e \quad (3.19)$$

Cette dernière valeur semble plus proche de la réalité, puisque les coefficients expérimentaux se situent entre 0,56 et 0,60.

- c) Les deux critères examinés supposent que les contraintes d'écoulement sont identiques en traction et en compression (voir fig. 3.2). Cette supposition est satisfaisante pour plusieurs matériaux ductiles. Cependant, d'autres matériaux présentent une différence notable entre les contraintes d'écoulement en traction et en compression. Le critère de la plus grande contrainte normale et celui de Mohr prennent toutefois en considération cette différence de contraintes [6]<sup>2</sup>.

#### 4. Critères de rupture basés sur la contrainte de traction

##### 4.1 Introduction

La rupture en traction simple des matériaux fragiles qui ne présentent pas de limite d'écoulement est définie par la contrainte de traction. Pour des matériaux fragiles et ductiles disposant d'une telle limite, le critère de rupture dans la zone plastique est de nouveau la contrainte de rupture.

Plusieurs théories ont été développées pour prévoir la contrainte de rupture dans le cas de charges combinées.

##### 4.2 Critère de la plus grande contrainte normale

Selon ce critère, proposé par Rankine, la rupture apparaît dès que la contrainte maximum de traction — ou la contrainte minimum de compression — dépasse une valeur limite. Soient  $\sigma_{Rt}$  la contrainte de rupture à la traction et  $\sigma_{Rc}$  la contrainte de rupture à la compression, la rupture d'un élément soumis à une sollicitation triaxiale  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  surviendra pour les contraintes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{Rt} \text{ ou } \sigma_1 = -\sigma_{Rc} \text{ avec } \sigma_1 > \sigma_2 \text{ et } \sigma_1 > \sigma_3 \\ \sigma_2 &= \sigma_{Rt} \text{ ou } \sigma_2 = -\sigma_{Rc} \text{ avec } \sigma_2 > \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 > \sigma_3 \\ \sigma_3 &= \sigma_{Rt} \text{ et } \sigma_3 = -\sigma_{Rc} \text{ avec } \sigma_3 > \sigma_1 \text{ et } \sigma_3 > \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Dans le cas d'un état bidimensionnel, les relations (4.1) deviennent

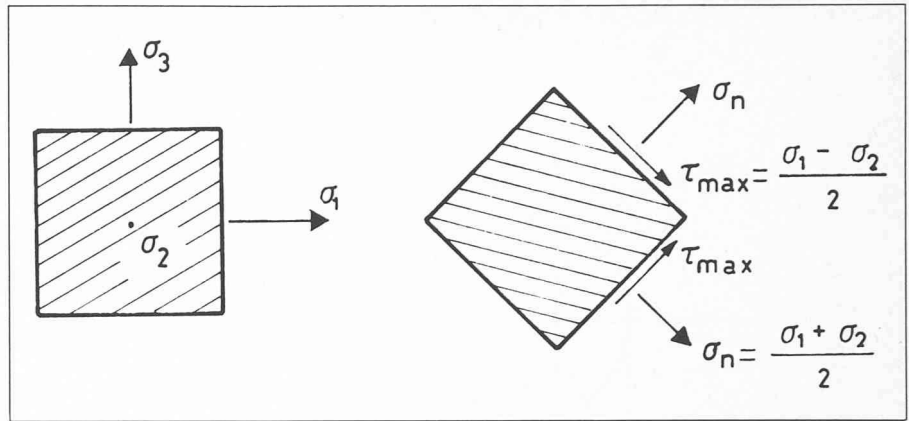


Fig. 4.1. — Contraintes  $\tau_{\max}$  et  $\sigma_n$  d'un élément sollicité par les contraintes principales  $\sigma_i$ .

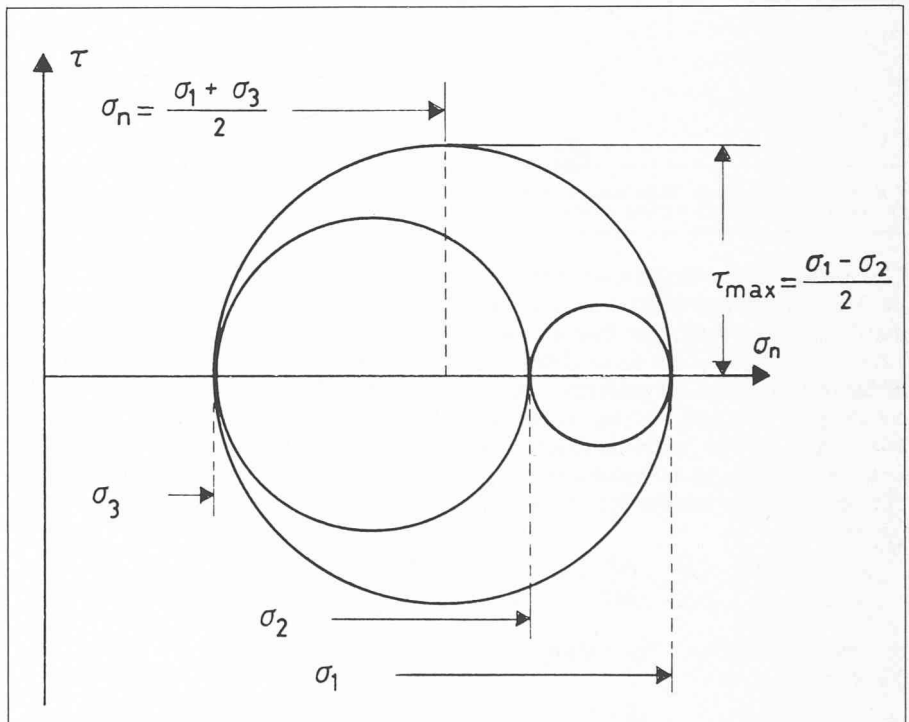


Fig. 4.2. — Cercle de Mohr correspondant à l'élément de la figure 4.1.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{Rt} \text{ ou } \sigma_1 = -\sigma_{Rc} \\ \sigma_2 &= \sigma_{Rt} \text{ ou } \sigma_2 = -\sigma_{Rc} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

La figure 4.4 représente graphiquement les relations (4.2). Selon cette théorie les droites tracées définissent les valeurs des contraintes conduisant à la rupture.

##### 4.3 Critère du plus grand cisaillement (Tresca)

En se limitant à l'état bidimensionnel, les équations (3.10) et (3.11) prennent la forme :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_R \\ \sigma_1 &= \pm \sigma_R \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_R \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

##### 4.4 Critère de Mohr

Mohr a admis que la rupture est amorcée par la plus grande contrainte de cisaillement, celle-ci étant une fonction de la contrainte normale du plan considéré. Admettons que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  et référons-nous à la figure 4.1. Le critère de Mohr est alors exprimé par les relations

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f(\sigma_n) = \\ &= f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

On remarquera que, selon cette hypothèse, la rupture n'est pas influencée par  $\sigma_2$ .

Les cercles de Mohr correspondant à l'élément de la figure 4.1 ont été représentés à la figure ci-dessous.

Selon les relations (4.4), nous pouvons supprimer les cercles intérieurs. À la rupture, la dimension du cercle extérieur dépendra de la position de son centre sur l'axe des  $\sigma_n$ . En procédant de cette façon, on obtient une famille de cercles de Mohr pour les états de rupture du matériau. Pour construire leur enveloppe commune, nous supposons que celle-ci est unique, quelles que soient les grandeurs des contraintes principales intermédiaires  $\sigma_2$ . C'est là une hypothèse fondamentale dans la théorie exposée. Il en résulte que chaque cercle tracé, tangent à l'enveloppe, définit un état de contrainte conduisant à la rupture.

<sup>2</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin de la quatrième partie de cette étude.

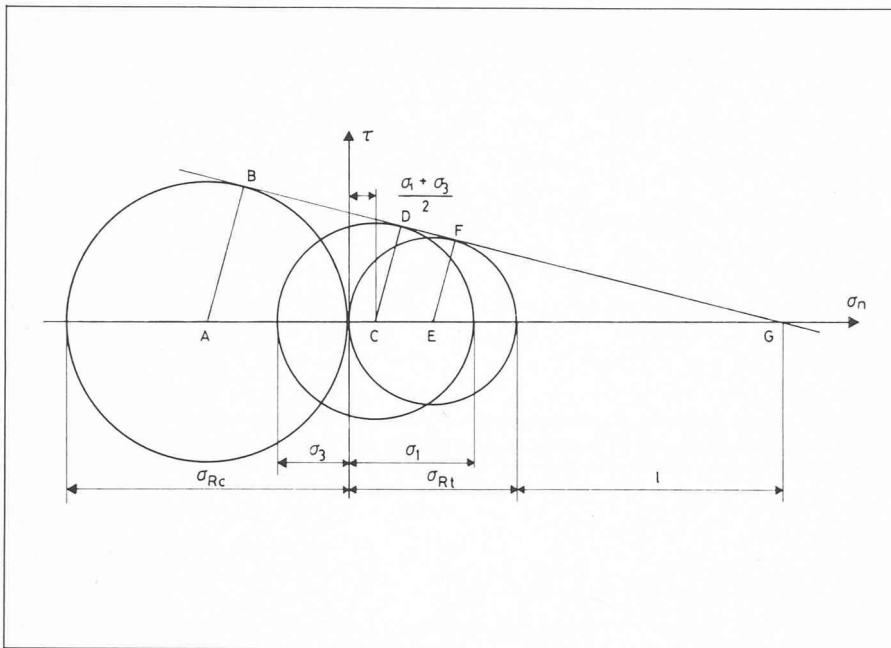


Fig. 4.3. — Cercles de Mohr correspondant aux essais de traction et de compression simples ainsi que celui correspondant à l'état  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ .

Une application particulière de la théorie de Mohr a été universellement adoptée dans le cas des matériaux fragiles sollicités biaxialement. Tout en se référant à la figure 4.3, nous supposons que les enveloppes sont des droites tangentes aux deux cercles correspondant aux essais de traction et de compression. Par les triangles semblables, nous obtenons

$$\frac{AB}{AG} = \frac{CD}{CG} = \frac{EF}{EG}$$

et par substitution des valeurs des contraintes

$$\frac{\sigma_{Rc/2}}{\sigma_{Rc/2} + \sigma_{Rc} + l} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\sigma_{Rt} + l + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{\sigma_{Rt/2}}{\sigma_{Rt/2} + l}$$

Pour l'élimination de  $l$ , nous trouvons par

$$\sigma_{Rc} = \frac{\sigma_{Rc}}{\sigma_{Rt}} \cdot \sigma_1 - \sigma_3 \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) est utilisée dans le cas où

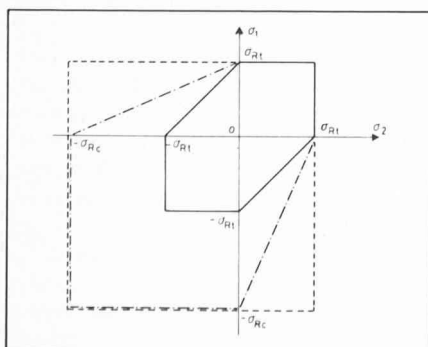


Fig. 4.4. — Théories de rupture.  
— Plus grand cisaillement  
--- Plus grande contrainte normale  
- - - - Théorie de Mohr

$$\sigma_{Rc} \leq \sigma_3 \leq 0, \sigma_2 = 0 \\ \text{et } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_{Rt} \quad (4.6)$$

Une pièce sollicitée en traction biaxiale aura une rupture fragile quand la plus grande contrainte principale deviendra égale à  $\sigma_{Rt}$ . Dans le cas de la compression, c'est la valeur  $\sigma_{Rc}$  qui constitue la valeur limite pour la plus grande contrainte principale.

Ainsi nous avons :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_2 = 0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_1 = \sigma_{Rt} \\ \sigma_1 = \sigma_{Rt} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

et

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{Rc} = \sigma_3 < \sigma_1 < (\sigma_2 = 0) \\ \sigma_3 = -\sigma_{Rc} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Les équations (4.6), (4.7) et (4.8) sont représentées graphiquement à la figure 4.4 où apparaissent également les relations (4.2) et (4.3),  $\sigma_3$  étant remplacée par  $\sigma_2$ .

#### 4.5 Commentaires

Lors de sollicitations biaxiales en traction, les trois théories donnent des résultats satisfaisants. Dans le cas où les contraintes sont de signes opposés, le nombre limité de résultats jusqu'à ce jour indique que :

- La théorie de cisaillement maximum est à appliquer quand  $|\sigma_{Rt}| = |\sigma_{Rc}|$ .
- La théorie de Mohr est à appliquer quand  $|\sigma_{Rt}| \neq |\sigma_{Rc}|$ .

### 5. Critères de rupture basés sur la contrainte de rupture réelle

La rupture réelle des matériaux soumis à des sollicitations multiaxiales est difficilement prévisible. Même le cas de la rupture d'une éprouvette sous l'effet

d'une charge axiale est extrêmement compliqué. Ceci provient des contraintes triaxiales, qui apparaissent à l'endroit où l'éprouvette se rétrécit, ces contraintes variant avec les déformations à mesure que l'on s'approche de la rupture. Il en résulte que l'essai de rupture d'une éprouvette soumise à la traction simple n'est pas d'un grand intérêt, puisqu'il s'agit en somme de la rupture d'un matériau soumis à des contraintes triaxiales continuellement variables. Pour cette raison, nous ne pouvons pas prévoir, même grossièrement, la rupture réelle d'une éprouvette soumise à un essai monoaxial.

Les matériaux fragiles ne présentent pas de phénomène de striction, mais les imperfections locales jouent un rôle déterminant dans le processus de rupture. La rupture fragile a fait, depuis quelques années, l'objet d'un grand nombre de publications qui paraissent habituellement sous le titre de « mécanique de rupture ». Dans cet article, nous ne traitons pas les critères de rupture selon cette théorie.

### 6. Relations entre contraintes et déformations dans le domaine plastique

Lors de l'élaboration du projet d'une machine ou d'une structure de même que lors du façonnage des métaux, il est très utile de prévoir la relation entre contraintes et déformations dans le domaine plastique. Récemment, il a été proposé une théorie basée sur des essais en traction simple qui permet de prévoir le comportement des matériaux lors d'une sollicitation combinée dans le domaine plastique.

#### 6.1 Relations contraintes-déformations d'un essai de traction

Nous supposons qu'à l'état initial, l'éprouvette a une longueur  $l_0$  et une section  $A_0$ . A mesure que la charge varie dans le domaine élastique, nous avons par définition :

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta l_0}{l_0} \quad (6.1)$$

$$q_0 = \frac{\Delta A_0}{A_0} \quad (6.2)$$

avec

$\varepsilon_0$  : allongement relatif

$q_0$  : réduction de la section relative

La réduction réelle de section ainsi que l'allongement relatif réel, respectivement  $q$  et  $\varepsilon$ , sont obtenus par les relations :

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = l_n \frac{l}{l_0} \quad (6.3)$$

$$q = \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = l_n \frac{A_0}{A} \quad (6.4)$$



Dans le domaine élastique, nous avons pratiquement une égalité entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_0$ . Il en est de même pour  $q$  et  $q_0$ . Les essais montrent que dans le domaine plastique, le volume reste constant :

$$A_0 \cdot l_0 = A \cdot l \text{ ou } \frac{A_0}{A} = \frac{l}{l_0}$$

Ainsi, par (6.3) et (6.4), on a

$$\varepsilon = q \quad (6.5)$$

Du fait que  $\varepsilon_0 = \frac{\Delta l_0}{l_0} = \frac{l-l_0}{l_0}$ ,

nous obtenons par la relation (6.3)

$$\varepsilon = l_n (1 + \varepsilon_p) \quad (6.6)$$

et pour  $q$ , par (6.4)

$$q = -l_n (1 - q_0) \quad (6.7)$$

Il est ainsi possible d'exprimer  $\sigma$  et  $\varepsilon$  comme des fonctions de la section  $A$ . En effet, la relation (6.5) peut s'écrire

$$\varepsilon = q = l_n \frac{A_0}{A} \quad (6.8)$$

De même, on a

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (6.9)$$

Nous pouvons encore exprimer  $\sigma$  et  $\varepsilon$  comme des fonctions de  $\varepsilon_0$ . En effet :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \cdot \frac{A_0}{A} = \frac{P}{A_0} \cdot \frac{L}{L_0}$$

et

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{A_0} (1 + \varepsilon_0) \\ \varepsilon &= l_n (1 + \varepsilon_0) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

De nombreux essais sur les métaux ductiles montrent que si l'on reporte les valeurs des contraintes et déformations réelles dans un diagramme à échelle logarithmique, les points expérimentaux se trouvent approximativement sur une droite. Ceci nous amène à adopter une équation de la forme

$$\sigma = k \cdot \varepsilon^n \quad (6.11)$$

où  $k$  et  $n$  sont des constantes expérimentales. La constante  $n$  prend le nom de « module d'écrouissage ».

Le point de charge maximum sur la courbe  $\sigma = f(\varepsilon)$  d'un essai de traction est défini par la condition  $dP = 0$  ou

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (6.12)$$

En tenant compte du fait que

$$P = A \cdot \sigma \text{ et } A = A_0 e^{-\varepsilon} \quad (6.9)$$

On trouve donc

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= A_0 e^{-\varepsilon} \\ \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} &= -A_0 \cdot \sigma e^{-\varepsilon} \end{aligned} \right\}$$

et l'équation (6.12) devient

$$dP = A_0 e^{-\varepsilon} (d\sigma - \sigma d\varepsilon) \quad (6.13)$$

Au début du phénomène de striction qui constitue une position d'instabilité, nous avons  $dP = 0$ .

Par (6.13), nous trouvons ainsi

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma \quad (6.14)$$

et par (6.11)

$$\varepsilon = n \quad (6.15)$$

La relation (6.15) indique que la charge maximum ainsi que le début de la striction sont atteints lorsque la déformation réelle devient égale au module d'écrouissage.

## 6.2 Relations entre contraintes et déformations lors de sollicitations combinées dans le domaine plastique

La théorie exposée ci-dessous est basée sur les hypothèses suivantes :

- Les directions des déformations principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  coïncident avec celles des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ .
- Le volume du matériau reste constant dans le domaine plastique :
- Les trois déformations principales ainsi que les trois contraintes principales sont régies par les rapports suivants :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = k_1 \quad (6.17)$$

où  $k_1$  est une constante déterminée par un essai de traction.

Les équations (6.16) et (6.17) permettent d'obtenir les déformations plastiques principales en fonction des contraintes principales et du module de plasticité  $k_1$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{k_1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_3 - \sigma_1)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{k_1}{3} [(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_2)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{k_1}{3} [(\sigma_3 - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_3)] \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Pour un simple essai de traction

où

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \sigma_1 = \sigma \quad \varepsilon_1 = \varepsilon$$

nous obtenons

$$k_1 = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (6.19)$$

A l'aide de la relation (6.19), les équations (6.18) prennent la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\sigma} &= \varepsilon_1 / [\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \frac{\varepsilon}{\sigma} &= \varepsilon_2 / [\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \frac{\varepsilon}{\sigma} &= \varepsilon_3 / [\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

En élevant au carré et après sommation, il vient :

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}}{\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}} \quad (6.21)$$

Cette relation importante lie les contraintes et déformations principales à la contrainte et déformation réelles d'un essai de traction.

La relation (6.21) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (6.22)$$

avec

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.23)$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (6.24)$$

Les grandeurs  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}$  sont appelées contrainte et déformation effectives et sont équivalentes à la contrainte et déformation octaédrales (Nadai 1937).

Il est intéressant d'exprimer les déformations principales en fonction des contraintes principales. Nous y parvenons en utilisant la relation (6.11) :

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} = \frac{\frac{1-n}{\sigma} \frac{1}{k} \frac{1}{n}}{\frac{1}{k} \frac{1}{n} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{\frac{1-n}{2n}}} = \frac{1}{k} \frac{1}{n} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{\frac{1-n}{2n}} \quad (6.25)$$

Enfin les relations (6.20) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left( \frac{\sigma_1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1)^{\frac{1-n}{2n}} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \\ \varepsilon_2 &= \left( \frac{\sigma_1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1)^{\frac{1-n}{2n}} \left( \alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \varepsilon_3 &= \left( \frac{\sigma_1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1)^{\frac{1-n}{2n}} \left( \beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

avec

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ et } \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$$

Les équations (6.26) donnent les déformations à la rupture ou à l'écoulement, pourvu que  $\sigma_1$  exprime la contrainte de rupture. Une valeur plutôt conservatrice de la contrainte à la rupture  $\sigma_1$  est

obtenue par l'utilisation du critère de Tresca. Ainsi, en supposant que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , nous obtenons (voir relations (3.9))

$$\sigma_{1r} - \sigma_{3r} = \sigma_r$$

ou

$$\sigma_{1r} = \frac{\sigma_r}{1-\beta} \quad (6.27)$$

En remplaçant  $\sigma_1$  dans les relations (6.26) par  $\sigma_{1r}$ , nous obtenons les déformations principales à la rupture :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1r} &= \left[ \frac{\sigma_r}{k(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{n}} f(\alpha, \beta, n) \\ \varepsilon_{2r} &= \left[ \frac{\sigma_r}{k(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{n}} f(\alpha, \beta, n) \\ \varepsilon_{3r} &= \left[ \frac{\sigma_r}{k(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{n}} f(\alpha, \beta, n) \end{aligned} \right\} (6.28)$$

Selon les relations (6.28) la ductilité des matériaux soumis à des contraintes combinées est habituellement définie par la plus grande déformation principale à la rupture.

L'influence des sollicitations combinées sur la ductilité d'un matériau peut être

examinée à partir des relations (6.28) en admettant une sollicitation biaxiale en traction :

$$\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = 0$$

Nous obtenons ainsi

$$\varepsilon_{1r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_r}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon_r}{2}$$

$$\varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_r}{2}$$

$$\varepsilon_{3r} = -\varepsilon_r$$

Ces résultats indiquent que les déformations principales à la rupture pour un tel type de sollicitation ont une valeur égale à la moitié de celle d'un essai de traction simple.

(à suivre)

## Expositions

### Ballenberg, musée suisse de plein air

La région de Ballenberg, où se trouve le seul musée suisse de plein air, est formée d'une chaîne de collines visibles au-dessus de Brienzwiler en direction de Hofstetten et de Brienz en descendant le Brünig.

Le parc alpin d'environ 50 hectares qui abrite le musée, possède deux entrées situées, l'une à Hofstetten, au-dessus du village de Kienholz au bord du lac de Brienz, l'autre à Brienzwiler. Les automobilistes peuvent parquer leur voiture à proximité. Les visiteurs arrivant par le chemin de fer du Brünig descendent à Brienz, d'où l'autocar postal les amène directement à l'entrée de Hofstetten. Le musée est ouvert chaque jour, d'avril en octobre.

Les objectifs de la Fondation du musée de plein air de Ballenberg sont définis comme suit :

- conserver, à l'intérieur comme à l'extérieur, des constructions caractéristiques de notre pays, les équiper d'un mobilier correspondant, les remonter sans aucune adjonction étrangère et les rendre accessibles au public ;
- les réunir dans un espace assez restreint pour permettre au visiteur d'établir des comparaisons ; éveiller la compréhension à l'égard de leurs particularités par des visites guidées et commentées ;
- représenter les travaux du paysan ;
- montrer l'exercice d'artisanats anciens ;
- créer un site représentatif des témoins de notre architecture rurale sous une forme compacte et irréprochable du point de vue scientifique.

La suite naturelle de collines et de vallons, de forêts de chênes, de tilleuls et d'érables formant le Ballenberg, les prairies et les pâturages ont permis l'implantation de divers groupes de bâtiments réunis selon les régions géographiques (Jura, plateau central, plateau bernois, plateau occidental, plateau oriental, Tessin, Suisse centrale, Grisons, Oberland bernois, Suisse orientale et Alpes).

Les maisons sont démontées sur place avec tout le soin voulu, et les diverses parties, numérotées aux fins d'identification, sont ensuite rassemblées à l'emplacement choisi à cet effet. Ce faisant, on s'efforce de créer des ensembles homogènes et de rendre aux bâtiments leur aspect primitif en supprimant toutes les adjonctions et « perfectionnements » ajoutés au cours des années.

On a de même cherché à intégrer la végétation environnante afin que les prés et les champs soient en harmonie avec le type régional des maisons qu'ils encadrent. Les ensembles sont répartis de manière à tirer parti au maximum des conditions naturelles offertes par l'environnement. Pour les séparer, on a tenu compte dans la mesure du possible des écrans naturels, de sorte qu'en dépit d'un voisinage étroit, ils ne se gênent nullement.

Il est aussi prévu de faire revivre d'anciens artisanats. A cet effet, les ateliers nécessaires seront installés dans des pièces appropriées et, durant les heures d'ouverture du musée, des artisans travailleront sous les yeux du public qui pourra ainsi suivre le processus de fabrication de certains objets (tissage, dentelle à fuseaux, boulangerie, etc.).

Parmi les pièces particulièrement remarquables, citons un superbe bâtiment à usage multiple qui date de 1797 et vient d'Ostermundigen, une maison à toit sur colonnes centrales, de Madiswil, datant de 1710, avec un grenier provenant de Kiesen ; le « Stockli » de Detligen, an-



Pressoir de lin de Curaglia (Grisons).