Zeitschrift: Ingénieurs et architectes suisses

Band: 105 (1979)

Heft: 9

Artikel: Méthode d'identification de la fonction de transfert d'un système linéaire basée sur la mesure de sa covariance

Autor: Cuénod, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-73823

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Méthode d'identification de la fonction de transfert d'un système linéaire basée sur la mesure de sa covariance

par Michel Cuénod, Cointrin (GE)

Cet article décrit une nouvelle méthode d'identification d'un système linéaire, utilisant des relations obtenues pour le calcul de sa variance et de sa covariance dans l'hypothèse que le signal d'entrée est constitué de la façon suivante :

— variation déterminée dans le temps, constituée par une somme de fonctions exponentielles,

— variation aléatoire dont la fonction d'autocorrélation est constituée par une suite de fonctions exponentielles.

L'application de cette méthode est illustrée par un certain nombre d'exemples.

1. Introduction

Nous considérons le cas d'un système linéaire avec une seule grandeur d'entrée et de sortie et dont la fonction de transfert $G(p)$ est donnée par le quotient de deux polynômes en p

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_o + a_1 p + \ldots + a_m p^m}{b_o + b_1 p + \ldots + b_r p^n}$$

avec l'hypothèse que $m < n$ et que le système est stable en lui-même.

Pour alléger l'écriture, nous admettons que $b_n = 1$ (ce qui peut toujours s'obtenir en divisant le numérateur et le dénominateur par b_n).

Cette fonction de transfert peut être mise sous la forme d'une somme de fractions simples :

$$G(p) = \sum_{i=1}^{h} \frac{\alpha_i}{p - p_i}$$

avec :

$$\alpha_i = \frac{N(p_i)}{\left.\frac{d}{dp} D(p)\right|_{p = p_i}} = \frac{N(p_i)}{\prod\limits_{\substack{r=1 \text{ à } n \\ (r \neq i)}} (p_i - p_r)}$$

p_i = racines du dénominateur $D(p) = 0$ avec $Re(p_i) < 0$ (système stable)

Ces racines peuvent être simples ou complexes. Dans la suite de cet exposé, nous ne tiendrons pas compte du cas des racines multiples.

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des propriétés de filtrage d'un système linéaire soumis à des fluctuations aléatoires [1 à 15] [1]. Ces travaux prennent en général comme hypothèse que les fluctuations de sa grandeur d'entrée ont les caractéristiques d'un bruit blanc dont la fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\theta)$ est une fonction de Dirac :

$$\varphi_{xx}(\theta) = \delta(\theta)$$

Une fonction aléatoire ayant cette propriété est toutefois une fiction mathématique.

Les fonctions aléatoires que l'on rencontre en pratique sont caractérisées par une fonction d'autocorrélation caractérisée par une fonction exponentielle (bruit « exponentiel ») ou par une somme de ces fonctions :

$$\varphi_{xx} = \sigma_{xx}^2 e^{-k|\theta|} \quad \text{avec } k > 0$$

(pour simplifier l'écriture nous admettons dans la suite de ce texte que la variance $\sigma_{xx}^2 = 1$)

ou $$\varphi_{xx}(\theta) = \sum_{s=1}^{S} a_s e^{-k_s|\theta|}$$

avec $$\sum_{s=1}^{S} a_s = 1$$

Le but de cet article est d'établir une comparaison entre les relations de filtrage obtenues pour un bruit « blanc » et un bruit « exponentiel », puis de mettre en évidence le parti que l'on peut en tirer pour l'identification de la fonction de transfert d'un système.

2. Rappel de quelques relations de base

Le *tableau* 1[2] récapitule un certain nombre de relations de base de la statistique dynamique et indique les définitions et notations qui sont utilisées ci-dessous.

Le *tableau* 2[3] compare les fonctions d'autocorrélation $\varphi_{yy}(\theta)$ de la grandeur de sortie, de corrélation mutuelle $\varphi_{yx}(\theta)$ entrée-sortie, de variance σ_{yy}^2 et de covariance σ_{yx}^2 pour différents types de fonctions aléatoires caractérisant le comportement de la grandeur d'entrée, à savoir :

— bruit blanc, avec $\varphi_{xx}(\theta) = \delta(\theta)$

— bruit exponentiel, avec

$$\varphi_{xx}(\theta) = e^{-k|\theta|}$$

— bruit dont la fonction d'autocorrélation est constituée par une somme de fonctions exponentielles :

$$\varphi_{xx}(\theta) = \sum_{s=1}^{S} a_s e^{-k_s|\theta|}$$

Ce tableau fait apparaître certaines similitudes. On voit en particulier que les expressions

$$G(k) = \sigma_{xy}^2$$

et $$\sum_{s=1}^{S} a_s G(k_s) = \sigma_{xy}^2$$

dans le cas de « bruit exponentiel » constituent le pendant de l'expression

$$g(\theta) = \sigma_{yx}(\theta)$$

dans le cas d'un bruit « blanc ».

Ces relations sont valables aussi bien lorsque la grandeur d'entrée $x(t)$ est une fonction déterminée dans le temps, ou bien une fonction aléatoire.

Le *tableau* 3[3] récapitule l'usage que l'on peut en faire comme méthode d'identification en considérant les deux cas suivants :

— entrée déterministe,

— entrée aléatoire.

Le chapitre suivant va considérer successivement ces deux cas et illustre à l'aide d'exemples cette nouvelle approche utilisable pour l'identification de systèmes.

3. Identification à partir de signaux d'entrée déterministes

3.1 *Signal d'entrée constitué par une fonction exponentielle*

Pour déterminer expérimentalement la fonction de transfert $G(p)$ d'un système linéaire S une des méthodes est de faire varier sa grandeur d'entrée selon un échelon rectangulaire unitaire de façon à obtenir sa réponse indicielle, d'en déterminer l'expression analytique, puis d'appliquer la transformation de Laplace à cette expression.

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

[2] Voir en p. 89.

[3] Voir en p. 90.

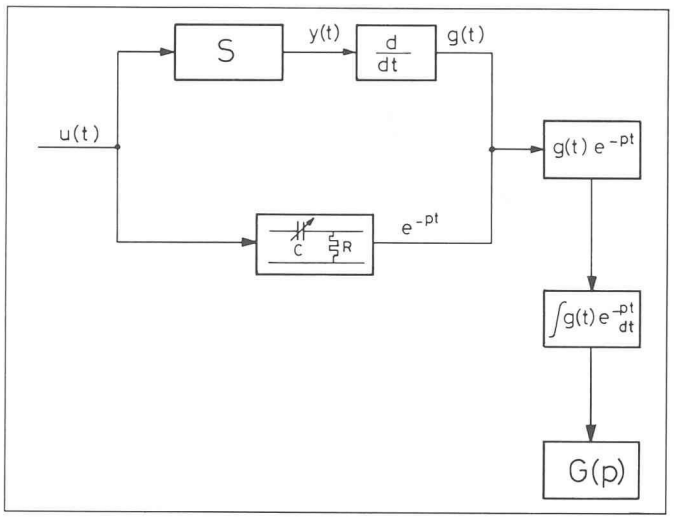


Fig. 1 — Principe de la détermination de la fonction de transfert G (p) du système S par l'application analogique de la transformation de Laplace.

u (t) = échelon rectangulaire unitaire.

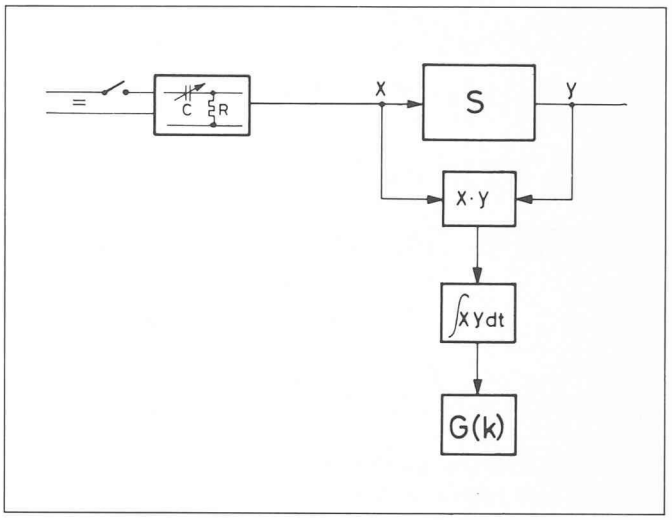


Fig. 2. — Principe de la détermination de la fonction de transfert G (k) par l'auscultation du système S au moyen d'une fonction exponentielle et par le calcul de sa covariance $T x^2_y = \int_0^\infty xy dt$.

Certaines méthodes développées en particulier par Zypkin, Strejc [16], Broïda [2], Lannoy [12, 13] peuvent être utilisées pour certains types de fonction de transfert.

Une façon de d'éviter cette détermination de l'expression analytique en fonction du temps est de dériver la réponse indicielle pour obtenir la réponse impulsionnelle, $g(t)$, d'en faire le produit avec la fonction exponentielle e^{-pt} puis d'intégrer ce produit ainsi que le montre en principe la figure 1. Toutefois, la nécessité de dériver la réponse indicielle introduit une source d'erreurs et une autre façon de procéder est « d'ausculter » le système à identifier par une courbe exponentielle $x(t) = \sqrt{2k}\, e^{-kt}$ obtenue par la sortie d'un filtre passe-haut, et de calculer la covariance

$$\sigma^2_{xy} = \int_0^\infty x . y \, dt$$

en effectuant l'intégrale du produit de cette grandeur d'entrée par la grandeur de sortie y ainsi que le montre en principe la figure 2, et cela pour autant que

$x = y = 0$ pour $t < 0$ et que

$y \neq \infty$ lorsque $x \rightarrow 0$ pour $t = \infty$

En faisant varier la constante de temps k du filtre passe-haut, on obtient ainsi point par point, la courbe $G(k)$ qui caractérise la fonction de transfert, ce qui mathématiquement s'exprime par la relation suivante :

si $\quad x(t) = \sqrt{2k} e^{-kt}$

et $g(t)$ = réponse impulsionnelle du système, il en résulte :

$$y(t) = \sqrt{2k} \int_0^t e^{-k(t-u)} g(u) \, du$$

$$G(k) = \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt = 2k \int_0^\infty e^{-kt} \cdot \left(\int_0^t e^{-k(t-u)} g(u)\, du \right) dt$$

Cette intégrale peut être effectuée graphiquement ou numériquement ; une fois la fonction de transfert déterminée point par point, on peut utiliser une des nombreuses méthodes permettant de calculer l'expression analytique de la courbe passant au mieux par les points ainsi obtenus.

Exemple :

Nous considérons le cas d'une fonction de transfert du premier ordre

$$G(p) = \frac{1}{pT + 1}$$

Il est possible dans ce cas de calculer l'expression analytique de σ^2_{xx}, $\varphi_{xx}(\theta)$, $x(p)$, $y(p)$, $y(t)$ et σ^2_{yx} :

$$x(t) = \sqrt{2k}\, e^{-kt} = \sqrt{\frac{2}{T_x}}\, e^{-\frac{t}{T_x}} \text{ avec } T_x = \frac{1}{k}$$

$$\sigma^2_{xx} = \int x^2 \, dt = \frac{2}{T_x} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{T_x}} dt = 1$$

$$\varphi_{xx}(\theta) = \frac{2}{T_x} \cdot \frac{T_x}{2} e^{-\frac{|\theta|}{T_x}} = e^{-\frac{|\theta|}{T_x}} = e^{-k|\theta|}$$

$$x(p) = \sqrt{\frac{2}{T_x}} \frac{T_x}{pT_x + 1}$$

$$y(p) = \frac{\sqrt{2T_x}}{(pT_x + 1)(pT + 1)}$$

En appliquant la transformation inverse de Laplace, on obtient :

$$y(t) = \frac{\sqrt{2T_x}}{T - T_x} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{T_x}} \right)$$

$$\sigma^2_{yx} = \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt = \frac{2}{T - T_x} \cdot \int_0^\infty \left(e^{-t\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_x}\right)} - e^{-\frac{2t}{T_x}} \right) dt$$

$$\sigma^2_{yx} = \frac{2}{T - T_x} \left(\frac{TT_x}{T + T_x} - \frac{T_x}{2} \right) = \frac{T_x}{T + T_x}$$

C'est bien le résultat que l'on obtient si on remplace p par $\frac{1}{T_x}$ dans l'expression de la fonction de transfert, ce qui confirme dans ce cas particulier la validité de la relation ainsi obtenue.

3.2 *Signal d'entrée constitué par une somme de fonctions exponentielles*

Lorsque la variation de la grandeur d'entrée a la forme d'une impulsion partant d'un certain état stationnaire et retournant au même état, une telle variation peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions exponentielles (à exposants réels ou imaginaires) :

$$x(t) = \sum_{s=1}^{S} c_s e^{-k_s t}$$

La fonction d'autocorrélation d'une telle fonction peut être également mise sous la forme d'une somme de fonctions exponentielles :

$$\varphi_{xx}(\theta) = \sum_{s=1}^{S} \left(e^{-k_s|\theta|} \cdot \sum_{i=1}^{S} \frac{c_i c_s}{k_i + k_s} \right)$$

Il en résulte :

$$\sum_{s=1}^{S} \left(G(k_s) \cdot \sum_{i=1}^{S} \frac{c_i c_s}{k_i + k_s} \right) = \sigma^2_{xy}$$

S'il est possible de faire une hypothèse sur la structure de la fonction de transfert, et s'il n'y a dans cette structure qu'un seul paramètre inconnu, cette relation peut être utilisée pour calculer la valeur numérique de ce paramètre.

Exemple :

Nous admettons à nouveau que les fonctions de transfert à identifier est du premier ordre :

$G(p) = \dfrac{1}{pT+1}$ avec T = paramètre inconnu à identifier et que :

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T_{x_1}}} - e^{-\frac{t}{T_{x_2}}} \text{(avec } T_{x_1} > T_{x_2})$$

Dans ce cas :

$$\varphi_{xx}(\theta) = \frac{T_{x_1} - T_{x_2}}{2(T_{x_1} - T_{x_2})}\left(T_{x_1} e^{-\frac{|\theta|}{T_{x_1}}} - T_{x_2} e^{-\frac{|\theta|}{T_{x_2}}}\right)$$

et

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{(T_{x_1} - T_{x_2})^2}{2\,(T_{x_1} + T_{x_2})}$$

$$\frac{\varphi_{xx}}{\sigma_{xx}^2} = a_1\, e^{-k_1|\theta|} + a_2\, e^{-k_2|\theta|} \quad \text{avec :}$$

$$a_1 = \frac{T_{x_1}}{T_{x_1} - T_{x_2}}\ ,\quad a_2 = -\frac{T_{x_2}}{T_{x_1} - T_{x_2}}$$

et $$k_1 = \frac{1}{T_{x_1}}\ ,\quad k_2 = \frac{1}{T_{x_2}}$$

En utilisant la relation indiquée ci-dessus nous obtenons :

$$\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2} = a_1\, G(k_1) + a_2\, G(k_2)$$

$$= \frac{T_{x_1}}{T_{x_1} - T_{x_2}} \cdot \frac{1}{\frac{T}{T_{x_1}} T + 1} - \frac{T_{x_2}}{T_{x_1} - T_{x_2}} \cdot \frac{1}{\frac{T}{T_{x_2}} + 1}$$

$$= \frac{T_{x_1}^2 (T + T_{x_2}) - T_{x_2}^2 (T + T_{x_2})}{(T_{x_1} - T_{x_2})\,(T + T_{x_1})\,(T + T_{x_2})}$$

Les valeurs numériques des variances σ_{xx}^2 et covariance σ_{xy}^2 ainsi que les constantes de temps T_{x1} et T_{x2} étant connues on obtient une équation qu'il est facile de résoudre par rapport au paramètre à identifier T.

S'il y a plusieurs paramètres inconnus, il suffit d'enregistrer plusieurs variations de formes différentes des grandeurs d'entrée et de sortie du système et on obtient ainsi un système d'équations permettant de calculer la valeur numérique de ces paramètres.

4. Identification à partir de signaux d'entrée aléatoires

4.1 *Signal d'entrée constitué par un bruit exponentiel*

Un bruit exponentiel peut être obtenu comme la grandeur de sortie d'un filtre passe-bas auquel on applique un bruit blanc comme grandeur d'entrée.

La *figure 3* représente le principe d'un identificateur réalisé selon le principe : en faisant varier la constante de temps de ce filtre et en enregistrant les grandeurs d'entrée et de sortie de ce système, et en intégrant le produit de ces grandeurs, on obtient à nouveau point par point, la fonction de transfert recherchée. Cette méthode a toutefois l'inconvénient de nécessiter la disposition d'une source de bruit blanc. En fait, de nombreux phénomènes aléatoires tels qu'ils se présentent dans le monde physique ont le caractère d'un bruit exponentiel. Si on dispose de l'enregistrement sur une bande magnétique d'une telle fonction, on peut l'utiliser comme fonction d'entrée du système à identifier. Pour changer sa constante de temps, il suffit de changer la vitesse de déroulement de la bande magnétique.

Cette méthode d'auscultation présente une certaine analogie avec l'analyse harmonique pour laquelle le système à identifier est ausculté par une fonction harmonique dont on change l'échelle de temps.

Exemple 1 :

Cette méthode d'analyse peut être utilisée pour identifier le comportement dynamique d'un réseau électrique en marche isolée, à savoir la relation dynamique qu'il établit entre les fluctuations de sa charge et celles de sa fréquence. Il est en effet connu par des considérations théoriques et par l'expérience [10] que la fonction d'autocorrélation des fluctuations de la puissance consommée dans un réseau électrique a le caractère d'un bruit exponentiel.

Dans de nombreux cas, la valeur numérique de la plupart des paramètres de réglage sont connus sauf par exemple la constante d'accélération du réseau qui dépend de l'ensemble des masses tournantes entraînées par ce réseau. Il suffit d'enregistrer simultanément un échantillon des fluctuations de la charge et de la fréquence du réseau pour obtenir une équation qui permet de calculer le paramètre inconnu.

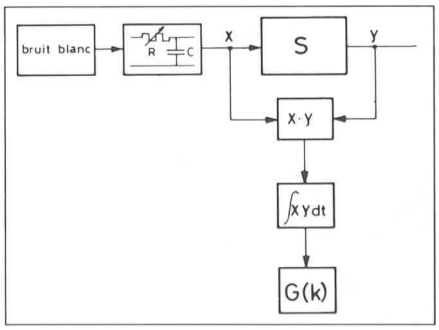


Fig. 3. — Principe de la détermination de la fonction de transfert G (k) à l'aide d'un bruit blanc filtré au moyen d'un filtre passe bas.

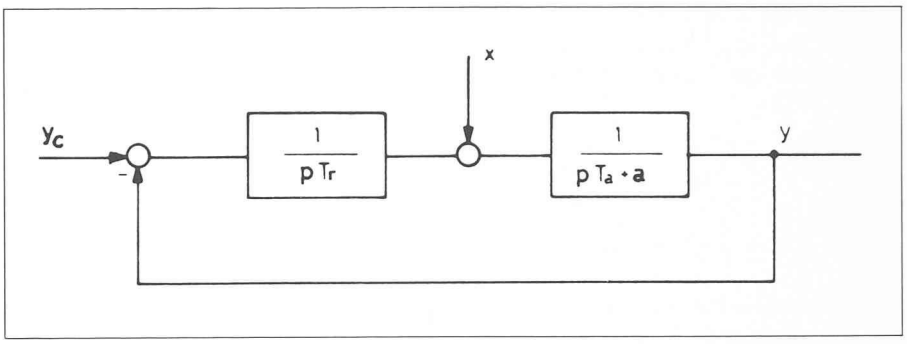


Fig. 4. — Schéma fonctionnel très simplifié du réglage de vitesse d'une centrale électrique en marche isolée.

La *figure 4* représente, à titre d'exemple, le diagramme fonctionnel très simplifié du réglage de fréquence de cette centrale avec :

T_r = constante de temps du système de réglage à action intégrale (supposée connue)

T_a = constante d'accélération du réseau (paramètre à identifier)

a = coefficient d'autoréglage (supposé connu)

x = grandeur d'entrée : perturbation de la charge du réseau

y = grandeur de sortie : fluctuation de la fréquence du réseau

y_c = valeur de la fréquence.

Nous admettons que la valeur de consigne y_c est maintenue constante et considérons de faibles écarts de x et de y par rapport à leur valeur initiale prise comme valeur de référence. La fonction de transfert $G(p)$ de ce système se laisse facilement déduire. On obtient :

$$G(p) = \frac{\dfrac{pT_a + a}{1}}{1 + \dfrac{1}{pT_r} \cdot \dfrac{1}{pT_a + a}} = \frac{pT_r}{p^2 T_a T_r + p_a T_r + 1}$$

Ainsi que des études théoriques et expérimentales l'ont démontré [10], les fluctuations de la charge du réseau sont un processus aléatoire dont la fonction d'autocorrélation peut être caractérisée par une courbe exponentielle avec la constante de temps $T_k = \dfrac{1}{k}$.

Nous admettons que, en laissant le réseau fonctionner normalement, on a enregistré un échantillon des fluctuations de sa charge x et de sa fréquence y.

Il est facile d'en déduire la variance σ_{xx}^2, la covariance σ_{xy}^2

et le rapport $A = \sigma_{xy}^2 / \sigma_{xx}^2$,

ainsi que la valeur numérique de la constante de temps caractérisant la variabilité $1/k$ des fluctuations de la charge du réseau.

Pour déterminer la valeur du paramètre à identifier T_a, on introduit la valeur

numérique de k dans l'expression de la fonction de transfert et on obtient ainsi une équation que l'on peut résoudre par rapport à T_a :

$$\frac{kT_r}{k^2T_aT_r + kaT_r + 1} = A$$

d'où $T_a = \frac{1}{A\,k^2\,T_r}\,(k\,T_r - A\,(ka\,T_r + 1))$

Cette méthode a l'inconvénient de nécessiter la connaissance de la structure de la fonction de transfert. Elle n'est applicable que si un seul paramètre est inconnu. Elle a l'avantage de pouvoir être utilisée sans que l'on ait besoin d'intervenir dans le système à identifier mais en enregistrant un échantillon des fluctuations des grandeurs d'entrée et de sortie de ce système, en régime de fonctionnement normal.

Exemple 2 :

S'il y a deux paramètres à identifier, les formules générales données par le *tableau 2* pour le calcul de la variance σ^2_{yy} et de la covariance σ^2_{xy} permettent de les déterminer en fonction des deux paramètres à identifier. On peut ainsi établir des abaques donnant directement les valeurs numériques de ces paramètres en fonction des valeurs des variances et covariances [8].

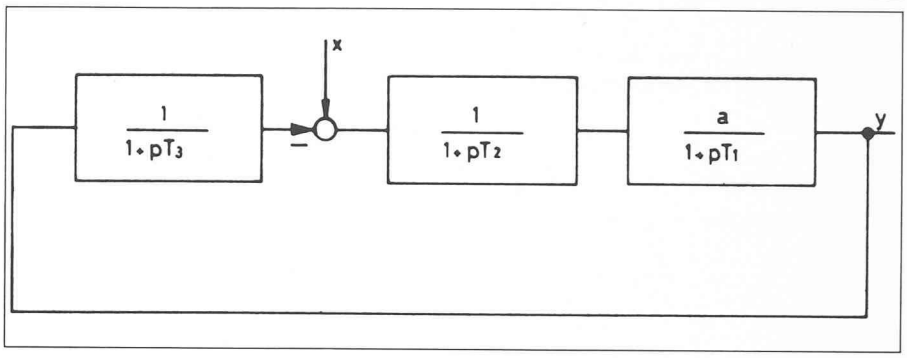


Fig. 5. — Schéma fonctionnel d'un système de réglage de 3e ordre.

La *figure 5* donne à titre d'exemple le schéma fonctionnel d'un système de réglage du troisième ordre. Il est facile d'en déduire la fonction de transfert suivante :

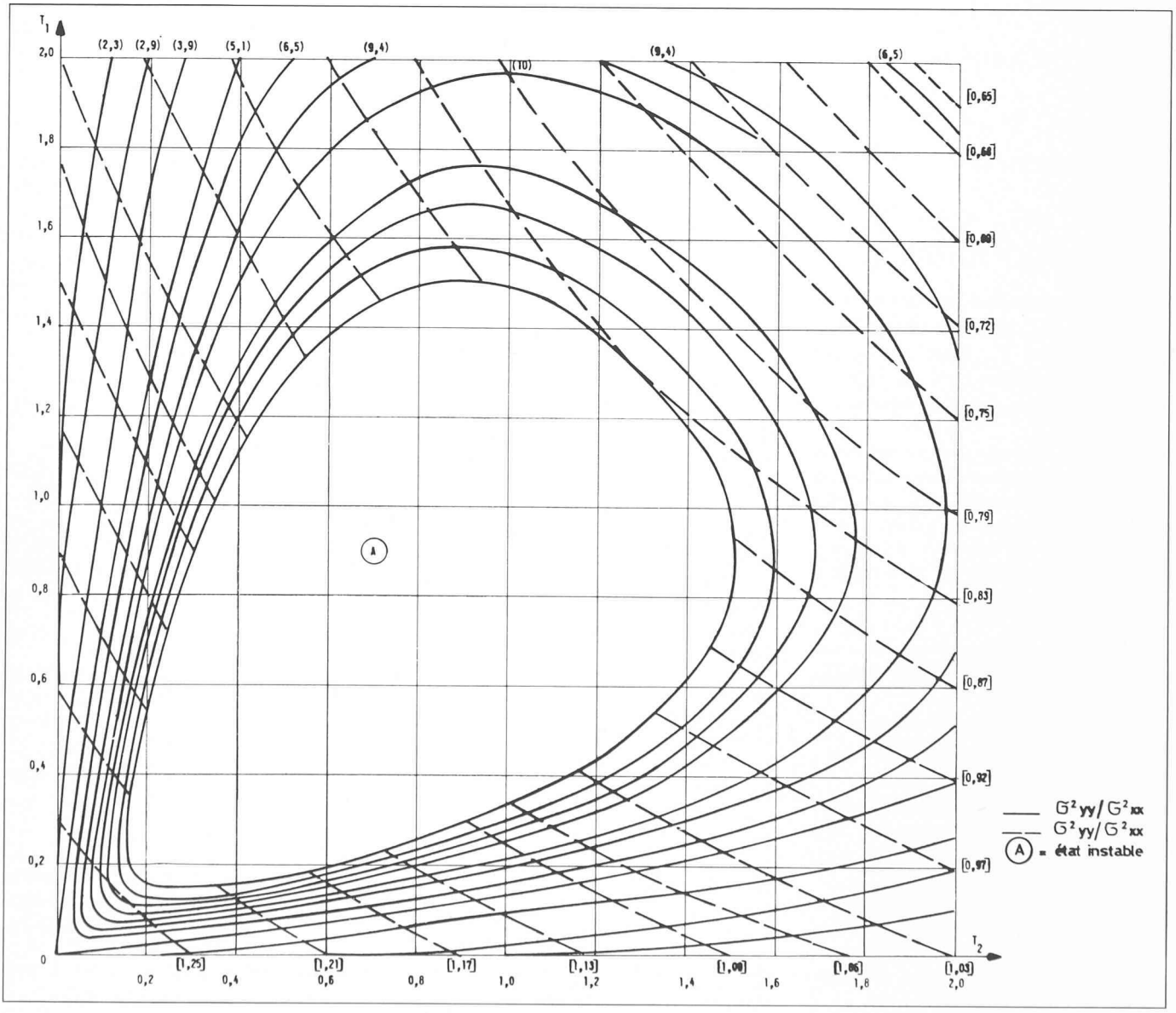
$$G(p) = \frac{a\,(1 + pT_3)}{p_3\,T_1T_2T_3 + p^2\,(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) + p\,(T_1 + T_2 + T_3) + a + 1}$$

Nous admettons que ce système est soumis à l'action d'un bruit exponentiel

$$\varphi_{xx}(\theta) = \sigma^2_{xx}\,e^{-k\,|\theta|}$$

Nous admettons que $k = 1$, ce qui signifie que la valeur $\frac{1}{k}$ est choisie comme

Fig. 6. — Abaque permettant l'identification paramétrique d'un système de réglage de 3e ordre à partir de la variance et de la covariance de sa grandeur de sortie.



unité de temps pour la mesure des constantes de temps à identifier. Nous admettons également que les valeurs a et T_3 sont connues :

$$a = 10$$

$$T_3 = 0{,}5$$

et que T_1 et T_2 sont les deux paramètres à identifier.

En utilisant les relations données par le *tableau 2*, il est facile de calculer la variance et de la covariance pour différentes valeurs de T_1 et de T_2. On obtient ainsi l'abaque donnée par la figure 6.

Les lignes en pointillé correspondent au rapport $\sigma_{xy}^2/\sigma_{xx}^2$ et celles en traits pleins au rapport $\sigma_{yy}^2/\sigma_{xx}^2$.

La surface A correspond à un domaine où le système est instable. Pour toute paire de valeurs mesurées σ_{yy}^2 et σ_{xy}^2 il est possible de déterminer immédiatement la valeur numérique des paramètres inconnus T_1 et T_2.

De tels abaques peuvent être déterminés dans de nombreux cas et constituent une méthode très pratique d'identification.

4.2 *Signal d'entrée constitué par un bruit dont la fonction d'autocorrélation est donnée par une somme de fonctions exponentielles*

Si $$\varphi_{xx} = \sum_{s=1}^{S} a_s\, e^{-k_s|\theta|}$$

nous avons vu que :

$$\sigma_{xy}^2 = \sum_{s=1}^{S} a_s\, G(k_s)$$

La même procédure d'identification paramétrique que celle indiquée dans le paragraphe précédent peut être utilisée, avec la seule différence qu'il faut remplacer dans l'expression admise pour la fonction de transfert l'opérateur p par les S différentes valeurs de k_s et de faire la somme de ces fonctions de transfert.

Conclusion

Les méthodes d'identification décrites ci-dessus viennent s'inscrire dans l'ensemble des approches déjà connues pour identifier la caractéristique de transfert d'un système à partir de l'observation de ses grandeurs d'entrée et de sortie.

Elles se distinguent des autres méthodes par les deux caractéristiques suivantes :

— elles utilisent des fonctions et des « bruits » exponentiels qui sont plus faciles à réaliser physiquement que les impulsions de Dirac ou les bruits blancs que font intervenir d'autres méthodes d'identification ;

— elles permettent de déterminer directement la fonction de transfert sans avoir à passer par l'intermédiaire de la connaissance de l'expression analytique de la réponse indicielle ou impulsionnelle ;

— elles ont une portée plus générale que d'autres méthodes d'identification de le fonction de tranfert qui ont déjà été décrites, car dans le cas d'une variation de la grandeur d'entrée selon une fonction ou un bruit exponentiel, elles ne nécessitent aucune hypothèse concernant la structure de la fonction de transfert à identifier.

Plusieurs aspects de ces nouvelles méthodes d'identification mériteraient de faire l'objet d'étude, à savoir leur précision et leur sensibilité à l'influence de non-linéarité ou de bruits parasites se superposant à l'action de la grandeur d'entrée principale, ainsi que leur extension à des systèmes multivariables. Si cet article pouvait susciter de telles études, il aurait atteint son but.

Adresse de l'auteur :
Michel Cuénod, ing. SIA
Dr ès sc. techn.
PEG SA
71, av. Louis-Casaï
1216 Cointrin

TABLEAU 1. — *Quelques relations de base de la statistique dynamique*

Analyse impulsionnelle

$$\varphi_{xx}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,x(t+\theta)\,dt$$

$$\varphi_{xy}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} x(t)\,y(t+\theta)\,dt$$

$$\varphi_{yy}(\theta) = \int_0^\infty \varphi_{xx}(u+\theta)\,\varphi_g(u)\,du + \int_0^\infty \varphi_{xx}(u-\theta)\,\varphi_g(u)\,du$$

avec $\varphi_g(\theta) = \int_0^\infty g(t)\,g(t+\theta)\,dt$

$$\varphi_{xy}(\theta) = \int_0^\infty \varphi_{xx}(\theta-\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda$$

avec $g(t)$ = réponse impulsionnelle

$$\sigma_{yy}^2 = 2\int_0^\infty \varphi_{xx}(\theta)\,\varphi_g(\theta)\,d\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} y^2\,dt$$

$$\sigma_{xy}^2 = \int_0^\infty \varphi_{xx}(\theta)\,g(\theta)\,d\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} xy\,dt$$

Analyse spectrale

$$\phi_{xx}(\omega) = 2\int_0^\infty \varphi_{xx}(\theta)\cos\omega\theta\,d\theta \simeq \frac{1}{2T}\left(X_T(j\omega)\right)^2$$

avec $X_T(j\omega) = \int_0^T x(t)\cos\omega t\,dt + j\int_0^T x(t)\sin\omega t\,dt$

$$\phi_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xy}\cos(\omega\theta)\,d\theta + j\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xy}\sin(\omega\theta)\,d\theta$$

$$\sim \frac{1}{2T}\left(X_T(-j\omega)\cdot Y_T(j\omega)\right)$$

$$\phi_{yy}(\omega) = \left[G(j\omega)\right]^2 \phi_{xx}(\omega)$$

avec $G(j\omega)$ = réponse harmonique

$$\phi_{xy}(\omega) = \phi_{xx}(\omega)\,G(j\omega)$$

$$\sigma_{yy}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[G(j\omega)\right]^2 \phi_{xx}(\omega)\,d\omega$$

Bibliographie

[1] BÉNÈS J. : *Statistique dynamique des systèmes de régulation*. Collection Bibliothèque de l'Automaticien, Editions Dunod, Paris 1964.

[2] BROÏDA V. : *L'extrapolation des réponses indicielles apériodiques*. Automatisme, tome XIV, nº 3, mars 1969, p. 105 à 114.

[3] CUÉNOD M. : *Etude de la réponse d'un système linéaire à une fonction aléatoire au moyen de l'analyse impulsionnelle*. Revue générale d'électricité, février (1956).

(Suite en page 90)

TABLEAU 2. — *Récapitulation des fonctions de corrélation des variances et covariances pour différentes catégories de bruits d'entrée*

	Bruit blanc	Bruit exponentiel	Bruit dont la fonction d'autocorrélation est constituée par une somme de fonctions exponentielles
$\varphi_{xx}(\theta)$	$S(\theta)$		$\sum_{s=1}^{S} a_s e^{-k_s\lvert\theta\rvert}$ avec $\sum_{s=1}^{S} a_s = 1$
$\varphi_{yy}(\theta)$	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(-p_i) e^{p_i\lvert\theta\rvert}$	$G(k)G(-k)e^{-k\lvert\theta\rvert} - 2k\sum \frac{\alpha_i G(-p_i) e^{p_i\lvert\theta\rvert}}{p_i^2 - k^2}$ (avec $p_i \neq k$)	$\sum_{s=1}^{S} G(k_s)G(-k_s)a_s e^{-k_s\lvert\theta\rvert} - 2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j G(-p_j)e^{p_j\theta}\sum_{s=1}^{S}\frac{a_s k_s}{p_j^2-k^2}$
$\varphi_{yx}(\theta)$	$g(\theta)$	$\begin{cases} G(k)e^{k\theta} & (\text{pour } \theta \leq 0) \\ G(-k)e^{-k\theta} - 2k\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{p_i^2-k^2}e^{p_i\theta} & (\text{pour } \theta \geq 0 \text{ et } p_i \neq k \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{s=1}^{S} G(k_s)a_s e^{k_s\theta} & (\text{pour } \theta \leq 0) \\ \sum_{s=1}^{S} G(-k_s)a_s e^{-k_s\theta} - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{p_i\theta}\sum_{s=1}^{S}\frac{a_s k_s}{p_i^2-k_s^2} & (\text{pour } \theta \geq 0 \text{ et } p_i \neq k_s \end{cases}$
σ_{yy}^2	$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i G(-p_i)$	$-2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i G(-p_i)}{p_i - k}$	$-2\sum_{s=1}^{S}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_s\alpha_i G(-p_i)}{p_i - k_s}$
σ_{yx}^2	$g(0)$	$G(k)$	$\sum_{s=1}^{S} a_s G(k_s)$

TABLEAU 3. — *Récapitulation de quelques méthodes d'identification pour différents types d'entrée*

Entrée déterminée

Impulsion de Dirac

$x(t) = S(t)$

$g(t) = y(t)$

Fonction exponentielle

$x(t) = \sqrt{2k}\, e^{-kt}$

$G(k) = \int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt$

Impulsion limitée dans le temps et décomposée en une somme de fonctions exponentielles

$x(t) = \sum_{s=1}^{S} c_j e^{-k_s t}$

$\sum_{s=1}^{S} G(k_s)\sum_{i=1}^{S}\frac{c_i c_s}{k_i + k_s} = \int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt$

Entrée aléatoire

Bruit blanc

$\varphi_{xx}(\theta) = S(\theta)$

$g(\theta) = \varphi_{xy}(\theta)$

Bruit exponentiel

$\varphi_{xx}(\theta) = e^{-k\lvert\theta\rvert}$

$G(k) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T} x(t)\,y(t)\,dt$

Bruit dont la fonction d'autocorrélation est constitué par une somme de fonctions exponentielles

$\varphi_{xx}(\theta) = \sum_{s=1}^{S} a_s e^{-k_s\lvert\theta\rvert}$

$\sum_{s=1}^{S} a_s G(k_s) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,y(t)\,dt$

Entrée harmonique

Fonction sinusoïdale

$x(t) = \sin\omega t$

$G(j\omega) = Y(j\omega)$

Spectre de sortie d'un filtre passe-bas

$\lvert X(j\omega)\rvert^2 = \frac{2k}{k^2+\omega^2}$

$\lvert G(j\omega)\rvert^2 = \frac{k^2+\omega^2}{2k}\lvert Y(j\omega)\rvert^2$

Grandeur d'entrée x et de sortie y constituées par des impulsions de durées T_x et T_y

$G(j\omega) = \frac{A(\omega) - jB(\omega)}{C(\omega) - jD(\omega)}$

avec: $A(\omega) = \int_0^{T_y} y(t)\cos(\omega t)\,dt$

$B(\omega) = \int_0^{T_y} y(t)\sin(\omega t)\,dt$

$C(\omega) = \int_0^{T_x} x(t)\cos(\omega t)\,dt$

$D(\omega) = \int_0^{T_x} x(t)\sin(\omega t)\,dt$

[4] CUÉNOD M. et PUN L. : *Les fluctuations aléatoires et l'imprécision des réglages industriels*. Revue Automatisme. Numéros de mai, juin, septembre, novembre, décembre (1957).

[5] CUÉNOD M., DURLING A., VALISALO P. : *Analysis of random process on hybrid computers*. Rapport au Congrès de l'AICA à Lausanne, août 1967.

[6] CUÉNOD M., SAGE A. P. : *Comparison of some methods used for process identification*. Survey Report for the 1967 IFAC Symposium on the problems of Identification in Automatic Control Systems.

[7] CUÉNOD M., IVANES M., LLIBRE M. : *Stochastic relation in linear filtering and identification problems*. Paper 22 to the 2nd IFAC Symposium in Prague on « Identification and Parameters identification ».

[8] CUÉNOD M., IVANES M., LLIBRE M. : *Filtrage d'un système linéaire soumis à l'action d'une fonction aléatoire*. 1re partie : NT nº 5, 1972, p. 137 à 144 ; 2e partie : NT nº 6, 1972, p. 175 à 183.

[9] CUÉNOD M., FATIO J. L. : *Cours d'introduction aux méthodes d'identification*. Ed. Albin Michel, Paris 1973.

[10] FORTET R. : *Spectre des fluctuations de courant absorbé par un réseau électrique*. Bull. de la Sec. fr. des électriciens, nov. (1954).

[11] LANING J. H., BATTIN R. H. : *Processus aléatoire et systèmes asservis*. Editions Dunod, 1959.

[12] LANNOY F. *Détermination de la transmittance d'un système à constante de temps égale à partir de sa réponse impulsionnelle*. Revue A., vol. XI, nº 2, avril 1969, p. 59 à 63.

[13] LANNOY F. : *Signification physique exacte du temps mort et de la constante de temps des systèmes dynamiques*. Revue A., vol. XI, nº 4, octobre 1969, p. 154 à 162.

[14] SOLODOVNIKOV V. V. : *Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande automatique*. Technique de l'Automatisme, Editions Dunod 1959.

[15] STERN J., DE BARBEYRAC J., POGGI R. : *Méthode pratique d'étude des fonctions aléatoires*. Editions Junod, 1967.

[16] STREJC V. : *Détermination approchée des caractéristiques de régulation d'un processus à réponse apériodique*. Automatisme, tome V, mars 1960, p. 109 à 111.