

# Dynamique de la chaîne linéaire mono-atomique dans l'approximation harmonique

Autor(en): **Vittoz, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **89 (1963)**

Heft 14

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-66343>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

## ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes  
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)  
de la Section genevoise de la S.I.A.  
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique  
de l'Université de Lausanne)  
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole  
polytechnique fédérale de Zurich)

## COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève  
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne  
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève

## Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.  
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Groscurin, arch.; J.-C. Ott, ing.  
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.  
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.  
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;  
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »

Président: D. Bonnard, ing.  
Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; J. Favre,  
arch.; A. Robert, ing.; J.-P. Stucky, ing.  
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

## RÉDACTION

D. Bonnard, E. Schnitzler, S. Rieben, ingénieurs; M. Bevilacqua,  
architecte  
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »  
Tirés à part, renseignements  
Avenue de Cour 27, Lausanne

## ABONNEMENTS

1 an . . . . .	Suisse	Fr. 34.—	Etranger	Fr. 38.—
Sociétaires . . . . .	»	» 28.—	»	» 34.—
Prix du numéro . . . . .	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,  
N° II 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au  
numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie  
La Concorde Terreaux 29, Lausanne

## ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page . . . . .	Fr. 350.—
1/2 » . . . . .	» 180.—
1/4 » . . . . .	» 93.—
1/8 » . . . . .	» 46.—

Adresse: Annonces Suisses S. A.

Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales



## SOMMAIRE

Dynamique de la chaîne linéaire mono-atomique dans l'approximation harmonique, par B. Vittoz, professeur à l'EPUL.  
La couverture de l'orangerie du nouvel établissement horticole de la ville de Lausanne à la Bourdonnette, par G. Rouba-  
kine, ingénieur EPUL.

Les congrès. — Organisation et formation professionnelle. — Carnet des concours.

Documentation générale. — Nouveautés, informations diverses.

## DYNAMIQUE DE LA CHAÎNE LINÉAIRE MONO-ATOMIQUE DANS L'APPROXIMATION HARMONIQUE

par B. VITTOZ, professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne \*

### 1. Introduction

L'étude de la dynamique des cristaux est extrêmement importante pour les propriétés thermiques, électriques et évidemment dynamiques des solides. Afin de simplifier, nous considérons un réseau cristallin à une dimension constitué d'un seul type d'atomes, c'est la chaîne linéaire mono-atomique. L'article qui suit est une partie d'un exposé fait le 2 mars à l'EPUL à un colloque de Physique du solide et de Résonance nucléaire.

Comme références de base, citons Ziman<sup>1</sup>, Peierls<sup>2</sup> et Brillouin<sup>3</sup>.

### 2. Chaîne mono-atomique et conditions cycliques

La chaîne contient  $N$  atomes identiques repérés par l'indice  $m$ . A l'équilibre, la position de chaque atome est :

$$(1) \quad \vec{x}_m^0 = m\vec{a} \quad \text{ou} \quad x_m^0 = ma$$

$a$  = distance interatomique = dimension de la maille élémentaire.

$m$  = nombre entier  $+ 1, \dots, N$ .

Dans l'espace à trois dimensions et pour un réseau primitif (1 atome par maille élémentaire), nous aurions :

$$(1 \text{ bis}) \quad \vec{x}_m^0 = m^i \vec{a}_i; \text{ somme sur } i = 1, 2, 3$$

où  $a_i$  = vecteurs de base = côtés de la maille élémentaire.

Si les atomes sont déplacés de leur position d'équilibre, on a :

$$(2) \quad x_m = ma + u_m \quad \text{ou} \quad (2 \text{ bis}) \quad \vec{x}_m = m^i \vec{a}_i + \vec{u}_m$$

*Périodicité des positions d'équilibre* : Elle n'est possible que si la chaîne est infinie afin de négliger l'effet des extrémités et de pouvoir considérer que tous les

\* Cette étude est tirée du Recueil de travaux offert au professeur A. Stucky, en hommage de reconnaissance, sur l'initiative de l'Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de Lausanne, le 27 octobre 1962, l'année de son 70<sup>e</sup> anniversaire.

atomes sont identiquement placés dans le réseau (mêmes voisins). Pour cela, on répète périodiquement à gauche et à droite de la chaîne initiale un nombre infini de chaînes identiques et on pose pour les déplacements et les moments conjugués :

$$(3) \quad \begin{cases} u_{m \pm N} = u_m \\ p_{m \pm N} = p_m \end{cases} \quad \text{conditions cycliques}$$

On peut se représenter ces conditions cycliques en refermant la chaîne initiale sur elle-même selon une boucle : l'atome  $N + 1$  sera l'atome 1, l'atome  $N + m$  sera l'atome  $m$  \*. Nous supposons les conditions cycliques (3) satisfaites quel que soit le modèle utilisé. L'hamiltonien du système sera :

$$(4) \quad H(u_m, p_m) = E_c(p_m) + V(u_m)$$

où :  $E_c$  = énergie cinétique totale.  
 $V$  = énergie potentielle totale.

L'état du système sera représenté par la fonction d'onde  $\psi$  :

$$|\psi\rangle = |u_1 \dots u_m \dots u_N\rangle$$

Si l'on effectue une permutation cyclique des déplacements, c'est-à-dire attribuer le déplacement  $u_2$  à l'atome n° 1, le déplacement  $u_{m+1}$  à l'atome n°  $m$ , etc., l'hamiltonien (4) reste inchangé, ainsi que l'état du système. Mais deux états identiques sont représentés par deux fonctions  $\psi$  identiques à un facteur de phase près :

$$|u_1 \dots u_m \dots u_N\rangle = |u_2 \dots u_{m+1} \dots u_{N+1}\rangle e^{2i\pi q}$$

et pour une translation  $m'$  quelconque :

$$(5) \quad |u_1 \dots u_m \dots u_N\rangle = |u_{1+m'} \dots u_{m+m'} \dots u_{N+m'}\rangle e^{2i\pi q m'}$$

Nous dirons que la fonction obéissant à la relation (5) appartient au mode  $q$ , qui, pour l'instant, est un nombre quelconque (non entier, car (5) serait une identité évidente). Mais si l'on opère une translation  $N$ , on retrouve identiquement la chaîne primitive ( $u_{m+N} = u_m$ ) :

$$e^{2i\pi q N} = 1$$

d'où :

$$(6) \quad q = \frac{n}{N} \quad ; \quad n = \text{entier}$$

donc les modes  $q$  sont quantifiés :

$$(7) \quad \Delta q_{min} = 1/N$$

Ajoutons à  $q$  un nombre entier quelconque  $h$  :

$$(8) \quad q' = q + h$$

Si la relation (5) est vérifiée pour le mode  $q$ , elle l'est encore pour le mode  $q'$  (car  $h m' = \text{entier}$ ) ; donc le mode  $q + h$  est le même que le mode  $q$ . On peut donc limiter le domaine de définition de  $q$  à tout intervalle de longueur unité. Par souci de symétrie, on prend :

$$(9) \quad -\frac{1}{2} < q \leq \frac{1}{2}$$

Le mode  $-1/2$  est le même que le mode  $+1/2$ , car ces modes diffèrent d'un nombre entier. Dans l'espace à

trois dimensions,  $qm$  devient  $q_i m^i$ , où la sommation doit s'effectuer sur l'indice identique répété haut et bas.

Posons :

$$qm = \vec{q} \cdot \vec{m} \quad \text{ou} \quad q_i m^i = \vec{q} \cdot \vec{m} \quad \text{pour le réseau à trois dimensions.}$$

Avec :

$$(7) \quad \begin{aligned} \vec{m} = m\vec{a} = m^i \vec{a}_i \quad \vec{q} = q\vec{b} = q_i \vec{b}^i \\ \Delta q_{min} = 1/N \quad \text{ou} \quad \Delta q_{i,min} = 1/N_i \\ N_i = \text{nombre de mailles selon } x^i. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\vec{q} \cdot \vec{m} = q_i m^i = q_i b^i \cdot m^j a_j$$

Il faut alors :

$$(10) \quad \vec{b}^i \cdot \vec{a}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j; \end{cases}$$

$\delta_j^i$  = symbole de Kronecker

$\vec{a}_j$  = définit la maille élémentaire, donc le réseau.

$\vec{b}^i$  = vecteurs de base du réseau réciproque par définition de (10).

Pour le réseau linéaire :  $b = 1/a$  = maille réciproque.

Dans l'espace à trois dimensions, la relation (8) devient :

$$(8 \text{ bis}) \quad \vec{q}' = \vec{q} + \vec{h}$$

avec

$$\vec{h} = h_i \vec{b}^i \quad ; \quad h_i = \text{entier}$$

Les vecteurs  $\vec{h}$  définissent le *réseau réciproque*.

Les modes  $\vec{q}$  et  $\vec{q} + \vec{h}$  sont identiques car :

$$\vec{h} \cdot \vec{m}' = h_i m'^i = \text{entier. Et } e^{2i\pi \vec{q} \cdot \vec{m}} \text{ ne change pas.}$$

On peut donc également limiter le domaine de définition de  $\vec{q}$  dans l'espace réciproque à un volume centré sur l'origine et qui contient à la limite les vecteurs  $\vec{h}$  les plus courts : c'est la première zone de Brillouin  $B$  (fig. 1).

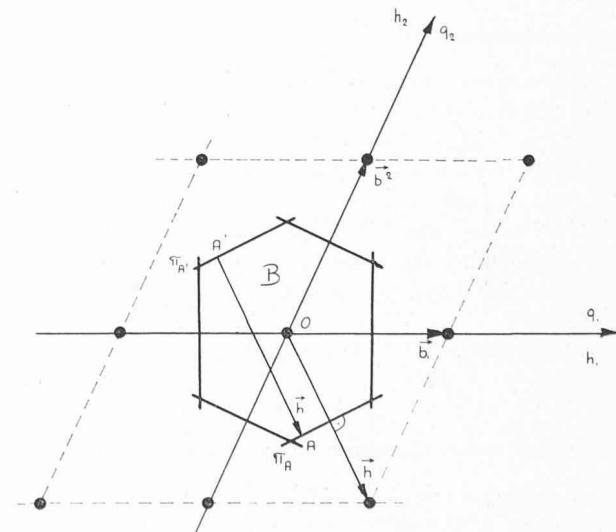


Fig. 1.

. = réseau réciproque (à deux dimensions)  
 $B$  = première zone de Brillouin

\* Un autre modèle possible est constitué par la répétition infinie de chaînes identiques à gauche et à droite de la chaîne initiale.

Au point limite  $A$  de la zone, il doit correspondre un autre point limite  $A'$  tel que :

$$\vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{h}$$

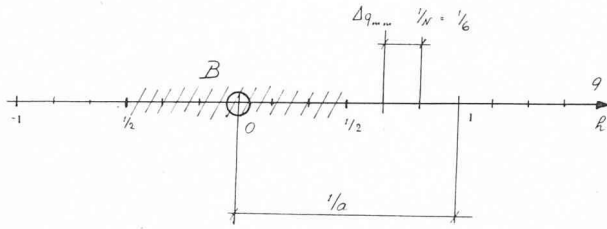


Fig. 2.

. = réseau linéaire  
+ = réseau réciproque

Donc  $A$  est sur le plan  $\pi_A$  bissecteur du vecteur  $h$  centré en  $O$ . La zone  $B$  est un polyèdre défini par l'ensemble des plans  $\pi_A$ , et son volume est le même que celui de la maille élémentaire du réseau réciproque.

Le domaine (9) de définition de  $q$  considéré pour le réseau linéaire devient pour le réseau spatial :

$$(9 \text{ bis}) \quad \vec{q} \in B$$

La figure 2 représente le réseau linéaire et son réseau réciproque.

Comme  $\Delta q_{min} = 1/N$  et comme les modes  $q$  occupent un intervalle unité, le nombre de modes différents possibles est égal à  $N$ , qui est aussi le nombre de cellules élémentaires et le nombre de degrés de liberté du solide.

### 3. Spectre de Fourier et coordonnées principales

Pour satisfaire aux conditions cycliques (3) on est amené à poser :

$$u_m \sim e^{-2i\pi n m/N} \quad \text{avec } n \text{ entier quelconque.}$$

Ce qui satisfait bien à :

$$u_{m+N} = u_m$$

Or d'après (6) :  $q = n/N$ , donc :

$$u_m \sim e^{-2i\pi q m}$$

Pour toutes les valeurs de  $q$  possibles selon (6), on aura une combinaison linéaire :

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q u_q e^{-2i\pi q m} \quad \text{pour les } N \text{ valeurs de } q.$$

$1/\sqrt{N}$  est un facteur de normalisation. Or :

$$(11) \quad \sum_{m=1}^N e^{2i\pi q m} = N \delta_{q,h} = N \delta_{q,0} \quad |q| \leq 1/2$$

en tenant compte de (6)  $q = n/N$  :

$$(12) \quad \sum_q e^{2i\pi q m} = N \delta_{m,m'} \quad \text{avec } m' = 0 \text{ ou } N$$

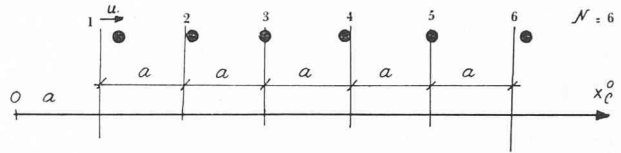
Au moyen de (11), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_m u_m e^{2i\pi q m} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q',m} U_{q'} e^{2i\pi q' m (q'-q)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q'} U_{q'} \underbrace{\sum_m e^{-2i\pi m (q'-q)}}_{N \delta_{q'-q,0}} = \sqrt{N} \sum_{q'} U_{q'} \delta_{q'-q,0} = \\ &= \sqrt{N} U_q = N \delta_{q'-q,0} \quad \text{car } |q'-q| < 1 \end{aligned}$$

donc :

$$U_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m u_m e^{2i\pi q m}$$

C'est le théorème d'inversion de Fourier qui donne le spectre  $U_q$  de la distribution  $u_m$ .



Nous avons donc :

$$(13) \quad u_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q U_q e^{2i\pi q m}; \quad U_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m u_m e^{2i\pi q m}$$

Pour les moments conjugués  $p_m$ , nous aurons également :

$$(14) \quad p_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q P_q e^{2i\pi q m}; \quad P_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m p_m e^{-2i\pi q m}$$

Les opérateurs correspondant aux variables canoniquement conjugués  $u_m$  et  $p_m$  doivent vérifier les relations de commutation :

$$(15) \quad [u_m u_{m'}] = 0 \quad [p_m p_{m'}] = 0 \quad \text{et} \quad [u_m p_{m'}] = i\hbar \delta_{mm'}$$

On vérifie ensuite que les opérateurs coordonnées principales  $U_q$  et  $P_q$  satisfont aux mêmes relations de commutation.

$$(15 \text{ bis}) \quad [U_q U_{q'}] = 0 \quad [P_q P_{q'}] = 0 \quad [U_q P_{q'}] = i\hbar \delta_{qq'}$$

On remarque que  $U_q$  satisfait à la relation de translation (5), ce qui est une raison de plus de passer à la transformation de Fourier.

### 4. Hamiltonien dans l'approximation harmonique

L'hamiltonien s'écrit :

$$(16) \quad H = \frac{1}{2M} \sum_n p_n^2 + V(u_1 \dots u_m \dots u_N)$$

où  $M$  = masse d'un atome de la chaîne.

Pour le réseau linéaire, nous sommes obligés de prendre le potentiel entre deux atomes  $m$  et  $m+n$  ne dépendant que de la distance entre ces deux atomes. A trois dimensions, cela signifierait que les atomes interagissent par des forces centrales, ce qui n'est pas toujours le cas.

Posons :

$$f(r) = \text{potentiel entre deux atomes distants de } r.$$

Alors :

$$V_{m,m+n} = f(|x_{m+n} - x_m|) = \text{potentiel entre atomes } m+n \text{ et } m.$$

Le potentiel total s'écrira :

$$V = \sum_{m,n>0} f(|x_{m+n} - x_m|)$$

Grâce aux conditions cycliques (3), la somme sur  $n$  peut se faire de  $n = 1$  à  $N-1$  quel que soit l'atome  $m$  dans la chaîne, ce qui assure l'équilibre du système pour les positions régulières :

$$x_m = x_m^0 = ma \quad \text{ou} \quad u_m = 0 \quad \text{quel que soit l'atome } m.$$

Développant  $f(r)$  en série de Taylor, on trouve en s'arrêtant aux termes du deuxième degré en  $u$ :

$$(17) \quad V = \frac{1}{2} G^{mm'} u_m u_{m'}; \text{ sommation sur indices identiques.}$$

C'est l'approximation harmonique.

Les coefficients de couplages  $G$  sont :

$$(18) \quad \begin{cases} G^{mm} = G(0) = \frac{\partial^2 V}{\partial u_m^2} = 2 \sum_{n>0} f''(na) = 2g \\ G^{mm'} = G^{m'm} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_m \partial u_{m'}} = -f''(|m - m'|a) = \\ = G(|m - m'|) \end{cases}$$

L'hamiltonien devient :

$$(19) \quad H = \frac{1}{2M} \sum_m p_m^2 + \frac{1}{2} G^{mm'} u_m u_{m'}$$

Si l'on se limite à l'interaction d'un atome sur ses deux plus proches voisins, le tenseur de couplages  $G$  devient :

$$(20) \quad \begin{cases} G(0) = 2f''(a) = 2g \\ G(m) = 0 \quad \text{si } |m| > 1 \\ G(m) = -f''(a) = -g \quad \text{si } |m| = 1 \end{cases}$$

$g$  est alors la constante de rappel du ressort fictif reliant deux atomes voisins.

Sans se limiter à cette approximation, appliquons les développements de Fourier (13) et (14) à l'hamiltonien (19) :

$$(21) \quad \begin{cases} H = \frac{1}{2M} \sum_q P_q \bar{P}_q + \frac{1}{2} \sum_q M \omega_q^2 U_q \bar{U}_q \\ H = E_c + V_2 \end{cases}$$

avec :

$E_c$  = énergie cinétique.

$V_2$  = potentiel harmonique.

$\bar{P}_q = P_{-q}$  = complexe conjugué de  $P_q$  (voir (14)).

$\bar{U}_q = U_{-q}$  = complexe conjugué de  $U_q$  (voir (13)).

Les coefficients  $\omega_q^2$  sont donnés par :

$$(22) \quad \begin{cases} \omega_q^2 = \frac{2}{M} \sum_{m \geq 0} G_m \cos 2\pi qm = \text{spectre des coefficients de couplage harmoniques } G_m. \\ G_0 = \frac{1}{2} G(0) = \frac{1}{2} G^{mm} = g \\ G_m = G(m) = G^{m', m'+m} \end{cases}$$

## 5. Energies propres

L'hamiltonien s'écrivait :

$$(21) \quad H = \frac{1}{2M} \sum_q P_q \bar{P}_q + \frac{1}{2} \sum_q M \omega_q^2 U_q \bar{U}_q = \sum_q H_q$$

Avec :

$$(23) \quad H_q = \frac{1}{2M} P_q \bar{P}_q + \frac{M}{2} \omega_q^2 U_q \bar{U}_q = \bar{H}_q$$

(hamiltonien hermitien)

$H$  est l'hamiltonien d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques de pulsations  $\omega_q$ . En effet, les équations canoniques de Hamilton s'écrivent :

$$(24) \quad \dot{U}_q = \frac{\partial H}{\partial P_q} = \frac{1}{M} \bar{P}_q$$

$$\dot{P}_q = -\frac{\partial H}{\partial U_q} = -M \omega_q^2 \bar{U}_q$$

$$(25) \quad \dot{\bar{P}}_q = -M \omega_q^2 U_q$$

D'après (24), l'équation (25) devient :

$$(26) \quad \ddot{U}_q + \omega_q^2 U_q = 0$$

qui est bien l'équation classique d'un oscillateur harmonique dont la pulsation est  $\omega_q$ . La solution classique est :

$$U_q = C_q e^{i\omega_q t}$$

d'où les déplacements (13) pour un seul mode  $q$  :

$$u_{m,q} = \frac{1}{\sqrt{N}} C_q e^{i(\omega_q t - 2\pi qm)} = \text{onde progressive.}$$

Comme :

$$2\pi qm = 2\pi \frac{q}{a} x_m^0 \quad \text{car } x_m^0 = ma,$$

le nombre d'ondes  $K$  vaut :

$$K = \frac{2\pi q}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

et la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{a}{q}; \text{ mais (9) } |q| \leq \frac{1}{2} \text{ entraîne } \lambda \geq 2a$$

Le déplacement total  $u_m$  vaut d'après (13) :

$$u_m = \sum_{q>0} u_{m,q} = \text{superposition d'ondes progressives et rétrogrades } (\omega_{-q} = \omega_q)$$

Pour déterminer l'énergie propre  $E_q$  du mode  $q$ , il faut résoudre l'équation d'onde :

$$H_q |\psi_q\rangle = E_q |\psi_q\rangle$$

On pose selon Dirac <sup>4</sup> :

$$(27) \quad \begin{cases} a_q = (2Mh\omega_q)^{-1/2} (P_q - iM\omega_q \bar{U}_q); \quad h = 2\pi h = \text{constante de Planck} \\ \bar{a}_q = (2Mh\omega_q)^{-1/2} (\bar{P}_q + iM\omega_q U_q) \end{cases}$$

et l'on obtient :

$$(28) \quad \begin{cases} H = \frac{1}{2} \sum_q h\omega_q (a_q \bar{a}_q + \bar{a}_q a_q) = \sum_q H'_q \\ E_q = \left(n_q + \frac{1}{2}\right) h\omega_q \quad n_q = \text{entier } \geq 0 \end{cases}$$

On dit que le mode  $q$  contient  $n_q$  phonons d'énergie  $h\omega_q$ . La fonction d'onde correspondante sera  $|n_q\rangle$  :

$$(29) \quad H'_q |n_q\rangle = E_q |n_q\rangle = \left(n_q + \frac{1}{2}\right) h\omega_q |n_q\rangle$$

L'hamiltonien total  $H$  étant la somme des hamiltoniens partiels  $H_q$ , l'équation de Schrödinger

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

est à variables séparables :

$$(30) \begin{cases} |\psi\rangle = |n_{q1}\rangle |n_{q2}\rangle \dots |n_{qN}\rangle \\ \text{et :} \\ E = \sum_q E_q = \sum_q \left( n_q + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_q = \\ = \text{énergie totale.} \end{cases}$$

D'après l'équation (29), l'hamiltonien partiel  $H'_q$  ne peut pas modifier le nombre de phonons du mode  $q$ ; l'état  $|n_q\rangle$  est stationnaire. Donc l'énergie de chaque mode est constante, ce qui entraîne que l'énergie totale est également constante. En s'arrêtant à l'approximation harmonique, il ne peut pas y avoir de dissipation d'énergie dans un mode.

On peut le montrer d'une autre façon en étudiant de plus près les opérateurs  $a_q$  et  $\bar{a}_q$ ; on trouve :

$$(31) \quad a_q |n_q\rangle = \sqrt{n_q} |n_q - 1\rangle$$

$a_q$  = opérateur d'annihilation. Il fait passer l'état  $|n_q\rangle$  contenant  $n_q$  phonons en l'état  $|n_q - 1\rangle$  où un phonon a disparu.

$$(32) \quad \bar{a}_q |n_q\rangle = \sqrt{n_q + 1} |n_q + 1\rangle$$

$\bar{a}_q$  = opérateur de production. Il a créé un phonon dans le mode  $q$ .

Mais dans  $H_q$ , il intervient l'opérateur  $a_q \bar{a}_q$  par exemple qui, appliqué sur l'état  $|n_q\rangle$  donne :

$$\begin{aligned} a_q \bar{a}_q |n_q\rangle &= a_q \sqrt{n_q + 1} |n_q + 1\rangle = \\ &= \sqrt{n_q + 1} \cdot \sqrt{n_q + 1} |n_q\rangle \end{aligned}$$

Le nombre de phonons  $n_q$  reste donc stationnaire. Il ne peut pas y avoir d'interactions phonon-phonon dans l'approximation harmonique.

#### RÉFÉRENCES

- <sup>1</sup> J.-M. ZIMAN : *Electrons and Phonons* (Oxford, 1960).
- <sup>2</sup> R.-E. PEIERLS : *Quantum Theory of Solids* (Oxford, 1955).
- <sup>3</sup> L. BRILLOUIN : *Wave Propagation in Periodic Structures* (Mc Graw-Hill, 1946).
- <sup>4</sup> P. A. M. DIRAC : *The Principles of Quantum Mechanics*, pg. 136 (Oxford, 3<sup>e</sup> édition, 1947).

## LA COUVERTURE DE L'ORANGERIE DU NOUVEL ÉTABLISSEMENT HORTICOLE DE LA VILLE DE LAUSANNE A LA BOURDONNETTE

par G. ROUBAKINE, ing. EPUL<sup>1</sup>

Dans le groupe de constructions constituant le nouvel établissement horticole que le service des parcs et promenades de la Direction des travaux de Lausanne a érigé dans la région de Vidy, figure une orangerie, c'est-à-dire une serre de grandes dimensions destinée à l'hivernage des grandes plantes décoratives (palmiers, lauriers, orangers).

La couverture de cette serre est constituée par une coque autoportante, dont la forme très particulière, assemblage de plusieurs formes simples (et qui résulte d'ailleurs d'un programme fort précis élaboré par M. A. Desarzens, chef du service des parcs et promenades) a ceci de particulier qu'elle échappe totalement au calcul et que, de ce fait, l'auteur du projet s'est trouvé entièrement à la merci des résultats d'essais sur maquette.

On sait que certains voiles dont la forme simple peut être définie par des équations de la géométrie analytique (surfaces de révolution, conoïdes, paraboloides hyperboliques, par ex.) sont calculables avec une approximation suffisante sans recours à des essais de laboratoire. D'autres formes (coupoles elliptiques, absides semi-sphériques, etc.), tout en exigeant des essais sur maquette, permettent un calcul très approximatif qui peut fournir les bases d'un premier dimensionnement et permet d'autre part un certain contrôle des résultats d'essais.

L'orangerie de la Bourdonnette appartient à une troisième catégorie : tout calcul approché que l'on pourrait tenter conduirait à des résultats complètement

erronés. La seule voie possible consiste à réaliser un modèle, à l'essayer et à le modifier ensuite, voire même à le recommencer, de manière à obtenir des efforts intérieurs et des déformations compatibles avec le matériau utilisé et le type de construction étudié. Le prix d'une maquette et celui des essais étant élevés, il est important de réduire au minimum ces tâtonnements.

La première condition pour cela est que le projeteur possède une certaine « intuition statique » qui lui évitera de se lancer dans une voie sans issue. Il peut être très utile, d'autre part, de réaliser d'abord une maquette très primitive en carton, qui pourra donner une première idée de la rigidité et de la stabilité des formes choisies. (A ce point de vue, il est intéressant d'utiliser des surfaces développables.) Il sera possible ensuite de passer à la construction d'une maquette de laboratoire, en prenant soin de prévoir d'emblée des modifications simples permettant d'éviter la réalisation d'un second, voire même d'un troisième modèle.

#### Programme et conception générale de l'orangerie

Le programme de cette serre avait été défini ainsi : couvrir une surface de 400 m<sup>2</sup>, sans appuis intérieurs, par une construction aux façades entièrement vitrées.

<sup>1</sup> Cette étude est tirée du Recueil de travaux offert au professeur A. Stucky, en hommage de reconnaissance, sur l'initiative de l'Association amicale des anciens élèves de l'École polytechnique de Lausanne, le 27 octobre 1962, l'année de son 70<sup>e</sup> anniversaire.