Note sur le calcul de la précision des cercles divisés

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **80 (1954)**

Heft 19

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-60723

jette à la figure et qui paraissent s'exclure sont en fait complémentaires et contiennent chacune une part de vrai. A ce propos, il est certain que l'idonéisme apporte une méthode de connaissance et, comme le dit M. Gonseth, « une doctrine préalable des vérités élémentaires » particulièrement féconde pour arriver à une meilleure connaissance de la réalité.

Cependant, cette connaissance à elle seule ne suffit pas, il faut encore la *volonté* de l'utiliser dans une fin libératrice, il faut l'*union des efforts* des hommes de bonne volonté dans un esprit de service pour que les ressources prodigieuses que comporte implicitement le progrès technique soient mises effectivement à la disposition de la communauté et qu'ainsi vienne cette ère de l'abondance, où l'homme sera libéré du souci du lendemain et où son esprit deviendra disponible pour la satisfaction des aspirations supérieures sans laquelle nous avons vu que son bonheur ne saurait être complet.

NOTE SUR LE CALCUL DE LA PRÉCISION DES CERCLES DIVISÉS

par A. ANSERMET, ingénieur,

professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

Au cours de ces dernières années, de notables progrès furent réalisés dans la construction des instruments de précision. Le praticien doit toutefois être en mesure de vérifier de tels instruments, surtout en ce qui concerne les cercles divisés. Les erreurs de division, dites régulières, sont développables approximativement sous la forme d'une fonction trigonométrique (somme). A cet effet, on opère des mesures angulaires dont le nombre dépasse sensiblement celui des inconnues ; cette surdétermination, même poussée assez loin, est désirable. Des simplifications sont réalisables en ayant recours à des observations équidistantes contenues dans une seule période.

Formation des équations résiduelles

L'instrument étant placé en S on vise deux points P_1 et P_2, matérialisés à l'aide de voyants ou de mires lumineuses et on mesure n fois l'angle constant $P_1SP_2 = \omega$, ce qui donne lieu à un premier groupe de n équations :

$$(1) \quad L_k + v_k = x + F_k(\rho_1\rho_2, \ldots \rho_i \ldots A_1, A_2 \ldots A_i \ldots) = x + \sum_k (B_i)$$

où $k = 1, 2, 3 \ldots n$ et $i = 1, 2, 3 \ldots$ (encore indéterminé)

x est la valeur compensée de l'angle, L_k une valeur mesurée, v_k un résidu, tandis que les paramètres ρ_i et A_i sont à calculer. On a une somme de binômes B_i :

$$\rho_i \cdot \cos(2i\,\varphi + A_i) - \rho_i \cos(2i(\varphi + \omega) + A_i)$$
$$\text{ou} \quad \rho_i \cdot \sin(2i\varphi + A_i) - \rho_i \sin(2i(\varphi + \omega) + A_i) = B_i.$$

On effectue les lectures au droit des divisions φ et $(\varphi + \omega)$. En fait, il y a là une différence de sommes trigonométriques. L'équidistance des observations s'exprime par les valeurs de φ ci-après :

$$\varphi_1 = \varphi_1,\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{n},\ \varphi_3 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n}, \ldots$$
$$\ldots\ \varphi_n = \varphi_1 + (n-1)\frac{\pi}{n}.$$

Pour ce premier groupe de n équations on admettra $\varphi_1 = 0$ comme φ initial. Il y aura d'autres groupes, comportant n', n'', $n'''\ldots$ observations équidistantes, avec le concours d'autres points P_3, $P_4\ldots$ On effectue aussi les lectures au droit des divisions diamétralement opposées à φ et $(\varphi + \omega)$ puis forme la moyenne, d'où l'absence des multiples impairs de φ.

Solution provisoire

Le système d'équations (1) doit être transformé pour se prêter à l'établissement d'équations dites normales. Il y a diverses solutions.

I. *Compensation d'un groupe d'observations.* On a recours à des paramètres auxiliaires a_i et b_i tels que :

$$(2) \quad \begin{cases} B_i = a_i \cos 2i\varphi + b_i \sin 2i\varphi = \rho_i \sin(2i\varphi + A_i) - \\ - \rho_i \sin(2i(\varphi + \omega) + A_i) = -2\rho_i \sin i\omega \cos \\ (i\omega + A_i)\cos 2i\varphi + 2\rho_i \sin i\omega \sin(i\omega + A_i) \sin 2i\varphi \end{cases}$$

$$(3) \quad L_k + v_k = x + a_1 \cos 2\varphi_k + b_1 \sin 2\varphi_k + a_2 \cos 4\varphi_k + b_2 \sin 4\varphi_k + a_3 \cos 6\varphi_k + b_3 \sin 6\varphi_k + \ldots$$

d'où le système d'équations normales :

$$(4) \quad [v] = [\cos 2\varphi . v] = [\sin 2\varphi . v] = [\cos 4\varphi . v] = [\sin 4\varphi . v] = [\cos 6\varphi . v] = [\sin 6\varphi . v] = \ldots = 0$$

et les formules classiques de Bessel :

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{n}[(L-x)\cos 2\varphi], \quad a_2 = \dfrac{2}{n}[(L-x)\cos 4\varphi], \\ a_3 = \dfrac{2}{n}[(L-x)\cos 6\varphi],\ x = \dfrac{[L]}{n} \\ b_1 = \dfrac{2}{n}[(L-x)\sin 2\varphi], \quad b_2 = \dfrac{2}{n}[(L-x)\sin 4\varphi], \\ b_3 = \dfrac{2}{n}[(L-x)\sin 6\varphi]\ldots \end{cases}$$

L'équation (2) donne la corrélation entre les valeurs a_i et b_i, calculées par les formules (5), et les paramètres ρ_i, A_i. Il s'agit en général de valeurs approchées (ρ_i), (A_i). Ce calcul est assez laborieux si n est grand. Rappelons que les formules de Bessel sont indépendantes de l'ordre des fonctions trigonométriques qu'elles déterminent.

II. *Calcul avec* u *observations.* C'est la solution qui paraît la plus normale ; il y a u inconnues et u observations choisies dans le groupe (1). Les résidus au nombre de u sont nuls. Les formules de Bessel sont applicables si la condition de l'équidistance est réalisée ce qui est aléatoire. Comme il s'agit d'éléments provisoires à déterminer, on peut se borner parfois à rapporter graphiquement les valeurs homologues (φ, L) et à poursuivre le calcul sur la base d'éléments équidistants obtenus par voie graphique. La valeur $x = [L] : n$, déduite des formules (5), n'est que provisoire si l'on doit tenir compte d'autres groupes de mesures. On écrira alors $(x) = [L] : n$ et les ordonnées du graphique seront $L_1 - (x)$, $L_2 - (x)$, $L_3 - (x)\ldots$ plutôt que L_1, L_2, $L_3\ldots$ La courbe empirique sera tracée en atténuant les discordances éventuelles.

III. *Méthode de Tchebycheff*. Lorsque le nombre n est très grand, cette méthode présente de l'intérêt. Considérons encore le système d'équations (3) et la valeur initiale $\varphi_1 = 0$, en admettant une fonction de 4e ordre. Partons de la valeur φ_1 et divisons la période 2π en ν parties égales, ν désignant un nombre entier qui est provisoirement arbitraire et distinct de n ; le fractionnement de la période sera :

$$\varphi_1, \varphi_1 + \frac{2\pi}{\nu}, \quad \varphi_1 + 2\frac{2\pi}{\nu} \ldots \varphi_1 + (\nu - 1)\frac{2\pi}{\nu}.$$

Les formules de Tchebycheff peuvent s'écrire (voir [2]) :

$$(6) \quad \begin{cases} a_\nu + a_{3\nu} + a_{5\nu} + a_{7\nu} + \ldots \\ \cong \dfrac{1}{2\nu}\left\{y(0) - y\left(\dfrac{\pi}{\nu}\right) + y\left(\dfrac{2\pi}{\nu}\right) - y\left(\dfrac{3\pi}{\nu}\right) + \right. \\ \qquad \left. + \ldots - y\left((2\nu - 1)\dfrac{\pi}{\nu}\right)\right\} \\ b_\nu - b_{3\nu} + b_{5\nu} - b_{7\nu} + \ldots \\ \cong \dfrac{1}{2\nu}\left\{y\left(\dfrac{\pi}{2\nu}\right) - y\left(\dfrac{3\pi}{2\nu}\right) + y\left(\dfrac{5\pi}{2\nu}\right)\ldots\right. \\ \qquad \left. \ldots + y\left((4\nu - 1)\dfrac{\pi}{2\nu}\right)\right\}. \end{cases}$$

Les y sont les L du système (3) dont on a retranché une quantité appelée moyenne provisoire. L'indice ν, 3ν, $5\nu\ldots$ sera égal ou inférieur à l'ordre 4. Pour $\nu = 1$ on a $3\nu = 3$, $5\nu = 5\ldots$ On ne gardera donc, dans les premiers membres des formules (6), que les termes a_1, a_3, b_1, b_3 :

$$a_1 + a_3 \cong \frac{1}{2}\left\{y(0) - y(\pi),\right\},$$

$$b_1 - b_3 \cong \frac{1}{2}\left\{y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}.$$

Dans les seconds membres, on s'arrête respectivement aux termes $y(\pi)$ et $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ car les termes $y(2\pi)$ et $y\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, qui viennent ensuite, appartiennent à la période suivante.

Pour $\nu = 2$ on a $3\nu = 6$, $5\nu = 10\ldots$ Dans les premiers membres on ne conserve que a_2 et b_2 :

$$a_2 \cong \frac{1}{4}\left\{y(0) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y(\pi) - y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

$$b_2 \cong \frac{1}{4}\left\{y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\left(\frac{5\pi}{4}\right) - y\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\}.$$

Pour $\nu = 3$, $3\nu = 9$, $5\nu = 15\ldots$ seuls subsistent les termes a_3 et b_3 :

$$a_3 \cong \frac{1}{6}\left\{y(0) - y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\left(\frac{2\pi}{3}\right) - y(\pi) + y\left(\frac{4\pi}{3}\right) - y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\}$$

$$b_3 \cong \frac{1}{6}\left\{y\left(\frac{\pi}{6}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{5\pi}{6}\right) - y\left(\frac{7\pi}{6}\right) + y\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right\}.$$

Enfin pour $\nu = 4$, $3\nu = 12\ldots$ seuls subsistent :

$$a_4 \cong \frac{1}{8}\left\{y(0) - y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y(\pi) - \right.$$

$$\left. - y\left(\frac{5\pi}{4}\right) + y\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$$

$$b_4 \cong \frac{1}{8}\left\{y\left(\frac{\pi}{8}\right) - y\left(\frac{3\pi}{8}\right) + y\left(\frac{5\pi}{8}\right) - y\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \right.$$

$$\left. + y\left(\frac{9\pi}{8}\right) - y\left(\frac{11\pi}{8}\right) + y\left(\frac{13\pi}{8}\right) - y\left(\frac{15\pi}{8}\right)\right\}$$

d'où les valeurs numériques :

$$\begin{array}{ll} a_4 = +\,0''90\ (0{,}90), & a_3 = +\,0''62\ (0{,}64), \\ a_2 = +\,0''79\ (0{,}78), & a_1 = +\,1''29\ (1{,}27), \\ b_4 = +\,0{,}48\ (0{,}46), & b_3 = +\,1{,}01 (1{,}01), \\ b_2 = +\,0{,}83\ (0{,}83), & b_1 = +\,0{,}93\ (0{,}93). \end{array}$$

Les résultats entre parenthèses sont déduits des formules de Bessel en considérant 24 observations équidistantes pour :

$$2\varphi = 0,\ \pi/12,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3,\ 5\pi/12,\ \pi/2,\ 7\pi/12,\ldots$$
$$\ldots 7\pi/4,\ 11\pi/6,\ 23\pi/12.$$

De ces a_i et b_i on déduit les (ρ_i) et (A_i), valeurs approchées

$$\rho_i = (\rho_i) + \delta\rho_i, \quad Ai = (A_i) + \delta A_i \quad \text{et } (x) + \delta x = x.$$

Application numérique : $n = 48$

$2\varphi =$	$y =$	$2\varphi =$	$y =$	$2\varphi =$	$y =$	$2\varphi =$	$y =$	$2\varphi =$	$y =$	$2\varphi = 0$	$y =$
0	+ 3″60	$\pi/3$	+ 0″31	$2\pi/3$	— 0″36	π	— 0″23	$4\pi/3$	— 1″41	$5\pi/3$	— 1″98
$\pi/24$	+ 4,23	$3\pi/8$	— 0,03	$17\pi/24$	— 0,65	$25\pi/24$	— 0,34	$11\pi/8$	— 0,79	$41\pi/24$	— 2,43
$\pi/12$	+ 4,55	$5\pi/12$	— 0,13	$3\pi/4$	— 0,81	$13\pi/12$	— 0,70	$17\pi/12$	— 0,27	$7\pi/4$	— 2,65
$\pi/8$	+ 4,25	$11\pi/24$	— 0,08	$19\pi/24$	— 0,92	$9\pi/8$	— 1,19	$35\pi/24$	+ 0,04	$43\pi/24$	— 2,39
$\pi/6$	+ 3,62	$\pi/2$	+ 0,04	$5\pi/6$	— 0,79	$7\pi/6$	— 1,53	$3\pi/2$	+ 0,20	$11\pi/6$	— 1,55
$5\pi/24$	+ 2,70	$13\pi/24$	+ 0,07	$7\pi/8$	— 0,64	$29\pi/24$	— 1,82	$37\pi/24$	— 0,03	$15\pi/8$	— 0,67
$\pi/4$	+ 1,75	$7\pi/12$	+ 0,06	$11\pi/12$	— 0,40	$5\pi/4$	— 1,89	$19\pi/12$	— 0,56	$23\pi/12$	+ 1,04
$7\pi/24$	+ 0,97	$5\pi/8$	— 0,14	$23\pi/24$	— 0,27	$31\pi/24$	— 1,71	$13\pi/8$	— 1,25	$47\pi/24$	+ 2,50

Solution définitive

Le premier groupe de n équations résiduelles (1) devient :

$$(7)\quad \begin{cases} l_1 + v_1 = \delta x + \dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \\ l_2 + v_2 = \delta x + \dfrac{\partial F_2}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F_2}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots \\ l_n + v_n = \delta x + \dfrac{\partial F_n}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F_n}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F_n}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F_n}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \end{cases}$$

à ce groupe de n équations (angle ω) viennent s'en ajouter d'autres comprenant n', n'', n'''... équations (angles ω', ω'', ω''' ...).

$$(8)\quad \begin{cases} l'_1 + v'_1 = \delta x' + \dfrac{\partial F'_1}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F'_1}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F'_1}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F'_1}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \\ l'_2 + v'_2 = \delta x' + \dfrac{\partial F'_2}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F'_2}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F'_2}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F'_2}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} l''_1 + v''_1 = \delta x'' + \dfrac{\partial F''_1}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F''_1}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F''_1}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F''_1}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \\ l''_2 + v''_2 = \delta x'' + \dfrac{\partial F''_2}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \dfrac{\partial F''_2}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{\partial F''_2}{\partial A_1}\delta A_1 + \dfrac{\partial F''_2}{\partial A_2}\delta A_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Le φ initial de ces observations équidistantes (8), (9) n'est en général pas nul ; les u équations normales sont :

$$(10)\quad \begin{cases} [v] = [v'] = [v''] = \dots = 0, \\ \qquad \left[\dfrac{\partial F}{\partial \rho_1} v + \dfrac{\partial F'}{\partial \rho_1} v' + \dfrac{\partial F''}{\partial \rho_1} v'' + \dots\right] = 0 \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial \rho_2} v + \dfrac{\partial F'}{\partial \rho_2} v' + \dfrac{\partial F''}{\partial \rho_2} v'' + \dots\right] = 0 \dots \\ \qquad \dots \left[\dfrac{\partial F}{\partial A_1} v + \dfrac{\partial F'}{\partial A_1} v' + \dfrac{\partial F''}{\partial A_1} v'' + \dots\right] = 0 \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial A_2} v + \dfrac{\partial F'}{\partial A_2} v' + \dfrac{\partial F''}{\partial A_2} v'' + \dots\right] = 0 \dots \end{cases}$$

Les termes absolus et ceux dits quadratiques (diagonaux) sont seuls différents de zéro (voir [1]) et les coefficients de corrélation sont nuls car les observations sont équidistantes.

Cas d'observations non indépendantes

Jusqu'ici, les angles ω, ω', ω'', ω'''... ou leurs valeurs les plus plausibles x, x', x'', x'''... intervenaient dans les équations résiduelles ; ces angles n'étaient pas liés par des conditions et le calcul était aisé.

L'existence d'équations telles que (11), non implicitement contenues dans (7), (8), (9)...

$$(11)\qquad f_I(x, x', x''\dots) = 0,\ f_{II}(x, x', x''\dots) = 0,\ f_{III}(x, x', x''\dots) = 0$$

a amené certains auteurs à fractionner la compensation ([3] p. 170-180). Dans une première phase des calculs on fait abstraction des équations (11). Quant à la seconde phase, basée sur ces équations, elle donne lieu à un extrêmum lié et au calcul de multiplicateurs de Lagrange k_1, k_2, k_3... En fonction de ces coefficients on détermine de nouveaux accroissements Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, $\Delta x'''$... à ajouter à δx, $\delta x'$, $\delta x''$... $\Delta x = \psi(k_1, k_2, k_3\dots)$, $\Delta x' = \psi'(k_1, k_2, k_3\dots)$, $\Delta x'' = \psi''(k_1, k_2\, k_3\dots)$

Les valeurs définitives des inconnues x, x', x'', x'''... seront obtenues en tenant compte de ces deux groupes d'accroissements (δ et Δ).

Le système (11) a aussi pour effet d'amplifier les poids de certaines inconnues mais il n'est pas nécessaire de développer ces calculs ; les résultats acquis pour les ρ_i et A_i dans la première phase du problème subsistent sans modifications.

A titre d'exemple, considérons 4 points mesurés angulairement en les combinant deux à deux ; désignons par P_1, P_2, P_3, P_4 ces points :

$$(12)\quad \begin{cases} +P_1SP_2 - P_1SP_3 \qquad + P_2SP_3 \qquad\qquad = w_1 \\ -P_1SP_2 \qquad + P_1SP_4 \qquad - P_2SP_4 \qquad = w_2 \\ \qquad + P_1SP_3 - P_1SP_4 \qquad\qquad + P_3SP_4 = w_3 \end{cases}$$

La seconde phase des calculs porte précisément sur ces discordances w_1, w_2, w_3 et la manière de les compenser. Le calcul des erreurs quadratiques moyennes est rendu un peu ambigu par le fractionnement de la compensation. On obtient des résultats, en déterminant les sommes des carrés des résidus, qui ne sont pas les mêmes après la première et après la seconde phase. Désignons ces sommes par Σ_1 et Σ_2 :

$$M_1^2 = \Sigma_1 : (N - u) \quad \text{et} \quad M_2^2 = \Sigma_2 : (N - u + 3)$$

pour u inconnues, N observations ($N = n + n' + n'' + n'''\dots$) et trois équations de condition éventuelles. Théoriquement, il devrait y avoir concordance entre M_1 et M_2.

Précision des résultats

Une certaine uniformité dans cette précision est désirable, surtout en ce qui concerne les amplitudes. Désignons par P_{ρ_1}, P_{ρ_2}, P_{ρ_3}... les poids respectifs de ρ_1, ρ_2, ρ_3... en considérant le premier groupe de n équations :

$$P_{\rho_1} : P_{\rho_3} : P_{\rho_2} : \dots = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_1}\frac{\partial F}{\partial \rho_1}\right] : \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_2}\frac{\partial F}{\partial \rho_2}\right] : \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_3}\frac{\partial F}{\partial \rho_3}\right]\dots$$
$$\dots = \sin^2\omega : \sin^2 2\omega : \sin^2 3\omega \dots$$

Il y a donc un certain désavantage à mesurer un seul angle ω.

Dans le cas où il s'agit de plusieurs groupes d'observations équidistantes on a :

$$P_{\rho_1} = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_1}\frac{\partial F}{\partial \rho_1} + \frac{\partial F'}{\partial \rho_1}\frac{\partial F'}{\partial \rho_1} + \frac{\partial F''}{\partial \rho_1}\frac{\partial F''}{\partial \rho_1} + \ldots\right],$$

$$P_{\rho_2} = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_2}\frac{\partial F}{\partial \rho_2} + \frac{\partial F'}{\partial \rho_2}\frac{\partial F'}{\partial \rho_2} + \frac{\partial F''}{\partial \rho_2}\frac{\partial F''}{\partial \rho_2} + \ldots\right],\ P_{\rho_3} = \ldots$$

Admettons de plus, pour simplifier la discussion : $n = n' = n'' = n''' \ldots$

$$(13)\quad P_{\rho_1} : P_{\rho_2} : P_{\rho_3} : P_{\rho_4} = (\sin^2 \omega + \sin^2 \omega' + \sin^2 \omega'' + \ldots) :$$
$$: (\sin^2 2\omega + \sin^2 2\omega' + \sin^2 2\omega'' + \ldots) :$$
$$: (\sin^2 3\omega + \sin^2 3\omega' + \sin^2 3\omega'' + \ldots) :$$
$$: (\sin^2 4\omega + \sin^2 4\omega' + \sin^2 4\omega'' + \ldots),$$

sommes étendues ici aux six valeurs angulaires ω, ω'', $\omega''' \ldots$ figurant dans le système d'équations (12). On peut obtenir :

$$P_{\rho_1} = P_{\rho_2} = P_{\rho_3} = P_{\rho_4}$$

pour $P_1SP_2 = P_2SP_3 = P_3SP_4 = 36^o = 40^g$ car
$3 \sin^2 40^g + 2 \sin^2 80^g + \sin^2 120^g = 3 \sin^2 80^g +$
$+ 2 \sin^2 160^g + \sin^2 240^g = 3 \sin^2 120^g + 2 \sin^2 240^g +$
$+ \sin^2 360^g = 3 \sin^2 160^g + 2 \sin^2 320^g + \sin^2 480^g$.

Pratiquement, il n'est pas nécessaire d'attribuer rigoureusement ces valeurs aux angles mesurés ; il suffit que la précision soit à peu près uniforme. Quant à l'erreur moyenne M d'une observation de poids un, elle comprend implicitement l'erreur de division Δ et celle de mesure m :

$$M^2 = \Delta^2 + m^2$$

Le terme m^2 est assez facile à déterminer et M^2 sera compris entre M_1^2 et M_2^2, valeurs peu différentes l'une de l'autre.

En *résumé* on aura recours, pour déterminer la précision d'un cercle divisé, à des observations angulaires en nombre surabondant, le degré de surdétermination étant relativement élevé. La méthode de Tchebycheff sera souvent d'un emploi judicieux comme auxiliaire du calcul. L'ordre de la somme trigonométrique, par contre, sera choisi de manière à limiter autant que possible le nombre des termes, donc celui des inconnues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Czerski, Z. : *Verallgemeinerung des Heuvelink-Verfahrens für Untersuchung der Kreisteilungsfehler* (Zeitschr. f. Vermessungswesen, 11/1935).

[2] Fréchet et Romann : *Représentation des lois empiriques* (Paris, 1930).

[3] Jordan-Eggert : *Vermessungskunde* (Ausgleichungsrechnung), Stuttgart 1935.

[4] Ansermet, A. : *Beitrag zur Bestimmung der regelmässigen Kreisteilungsverbesserungen* (Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung, 1954).

BIBLIOGRAPHIE

Bautechnik-Archiv

Le « Bulletin technique » a déjà eu l'occasion de signaler à ses lecteurs cette excellente collection de publications paraissant sous la forme de cahiers et éditée par la maison *Wilhelm Ernst & Sohn* à Berlin-Wilmersdorf (Hohenzollerndam 169).

Chaque cahier comporte plusieurs études se rapportant au domaine de l'ingénieur civil.

Voici les sommaires des cinq premiers cahiers et celui du neuvième (les cahiers 6, 7 et 8 ont fait l'objet de comptes rendus antérieurs) :

Heft 1 (1947). — Une brochure 17×24 cm, 49 pages, 52 figures. Prix : 6 DM.

Zeitgemässe Fragen aus dem neueren Schrifttum des Ingenieurbaues *(T. v. Rothe)*. — Kolbenlose Pressen (Druckkissen) im Bauwesen *(F. Hörnlimann)*. — Grundsätzliches zur Frage der Grundwasserabsenkung *(H. Weber)*. — Einfluss der Verdrehungssteifigkeit der Hauptträger auf die Lastverteilung beim Trägerrost nach Rechnung und Versuch *(J. Schöttgen)*. — Störungsfreie Kaminkopfausbildung *(O. Spitzner)*.

Heft 2 (1948). — Une brochure 17×24 cm, 54 pages, 53 figures. Prix : 6,40 DM.

Erfahrungen eines Wasserbauers *(W. Paxmann)*. — Die Abwasserreinigung und die sich dabei abspielenden stofflichen Vorgänge *(E. Marquardt)*. — Über die Druckverteilung im Boden hinter Wänden verschiedener Art. Mit Ergebnissen eigener Versuche *(H. Press)*.

Heft 3 (1949). — Une brochure 17×24 cm, 74 pages, 76 figures. Prix : 7,20 DM.

Widmung zum 20-jährigen der Degebo *(J. Volk)*. — Noch offenstehende Probleme auf dem Gebiete des Grundbaues *(A. Agatz* und *E. Lackner)*. — Arbeiten der Degebo in den Jahren 1938-1948 *(H. Muhs)*. — Anwendung des seismischen Bodenuntersuchungsverfahrens bei einem Talsperrenbau *(H. Lorenz)*. — Messtechnische Grundlagen bei Setzungsmessungen an grossen Bauwerken *(E. Brennecke* und *K. Ansorge)*. — Untersuchungen an einem fehlerhaften Kompressorenfundament *(O. Fritsch* und *H. Mush)*. — Schwingungsuntersuchungen an einfachen Mauerwerkskörpern und Gebäuden *(A. Ramspeck* und *G.-A. Schulze)*. — Das technische Experiment in der Bodenmechanik *(A. Hertwig)*.

Heft 4 (1949). — Une brochure 17×24 cm, 73 pages, 28 figures. Prix : 7,50 DM.

Tulla, Honsell, Rehbock. Lebensbilder dreier Wasserbauingenieure am Oberrhein *(H. Wittmann)*. — Berechnung und Bau von Plattenbrücken *(R. Ohlig)*.

Heft 5 (1949). — Une brochure 17×24 cm, 60 pages, 41 figures. Prix : 5,20 DM.

Neue Erfahrungen auf dem Gebiete der Verfestigung und Abdichtung des Untergrundes *(H. Jähde)*. — Die Gleichungen der Stau- und Senkungsweiten für rechteckigen und parabolischen Gerinnequerschnitt und ihre praktische Anwendung *(L. Rothmund)*. — Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie *(G. Worch)*.

Heft 9 (1953). — Une brochure 17×24 cm, 141 pages, 103 figures. Prix : 14,50 DM.

Erddruckversuche an einer durch Reibung verankerten Stützwand *(H. Muhs)*. — Über das Verhalten von Pfahlgründungen bei Schwingungserregung *(G. Brandes)*. — Baugrubenumschliessung nach dem Gefrierverfahren *(W. Sichardt* und *P. Chardabellas)*.

Notons qu'en Suisse, les cahiers de cette collection peuvent être livrés par la maison « Verlag für Wissenschaft, Technik und Industrie », Schützenmattstr. 43, Bâle.