Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 39 (1913)
Heft: 5

Artikel: Note sur le profil d'équilibre des chemins de fer funiculaires
Autor: Chenaux, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-30109

39me Année. 10 mars 1913. No 5.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES — PARAISSANT DEUX FOIS PAR MOIS

RÉDACTION : Lausanne, 2, rue du Valentin : Dr H. DEMIERRE, ingénieur.

Note sur le profil d'équilibre des chemins de fer funiculaires.

par H. CHENAUX, ingénieur.
Professeur à l'Université de Lausanne.

Dans les chemins de fer funiculaires à mouvement alternatif, et surtout dans les plans inclinés à contrepoids d'eau, la question du profil en long a une importance toute spéciale.

Si l'on fait abstraction des périodes de démarrage et d'arrêt, il est clair que le profil idéal est un profil tel que le système soit en équilibre dans toutes ses positions; dans ce cas, le mouvement est uniforme sans l'intervention des freins et la dépense de force motrice est réduite au minimum.

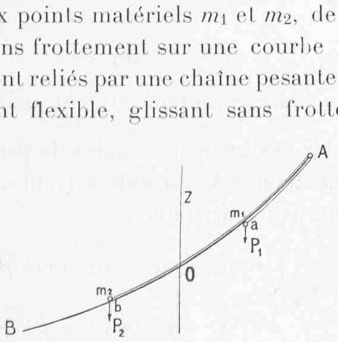
Pratiquement, les conditions locales rendent le plus souvent un tel tracé irréalisable; mais on doit s'en rapprocher le plus possible.

M. A. Vautier[1] est le premier qui ait traité le problème d'une façon générale; il a notamment fait voir, moyennant une hypothèse approchée, que le profil d'équilibre est une parabole à axe vertical, et ses formules ont été adoptées sans autre par les divers auteurs qui se sont occupés de cette question.

Il s'agit maintenant de démontrer qu'en réalité c'est la *cycloïde*, et non la parabole, qui répond aux conditions du problème, lorsqu'on admet, comme M. Vautier, que les résistances passives sont constantes.

1° *Voyons d'abord qu'elle sera la forme du profil quand on néglige les frottements.*

Soient deux points matériels m_1 et m_2, de poids P_1 et P_2, glissant sans frottement sur une courbe fixe AB; ces deux points sont reliés par une chaîne pesante, inextensible et parfaitement flexible, glissant sans frottement sur la



[1] *A. Vautier*. Etude des chemins de fer funiculaires. Bulletin de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes. Lausanne 1887.

courbe AB, et passant sur une poulie infiniment petite placée en A.

Quelle doit être la courbe AB pour que l'équilibre soit indifférent ?

Soit $z = \varphi(s)$ l'équation de la courbe, l'origine étant en O, point de croisement, et l'axe des z dirigé vers le haut; s désigne l'arc de la courbe, compté positivement de O vers A.

Appelons σ l'arc compté à partir de O jusqu'au point matériel m_1, situé en a.

La position du système est connue dès qu'on donne σ.

Comme on le voit, il s'agit d'un système pesant, à liaisons complètes; il y a donc une seule équation d'équilibre; il suffira d'écrire, par exemple, que la variation de la hauteur du centre de gravité du système est nulle lorsqu'on imprime à ce dernier un déplacement $\partial\sigma$.

Lorsque les deux points matériels se croisent en O, les deux brins de la chaîne s'équilibrent; donc $P_1 = P_2 = P$.

En appelant p le poids de la chaîne par mètre courant, il viendra :

$$-P\,\varphi'(\sigma)\,\partial\sigma + P\,\varphi'(-\sigma)\,\partial\sigma + [\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)]\,p\,\partial\sigma = 0$$

ou bien :

$$\varphi'(\sigma) - \varphi'(-\sigma) = \frac{p}{P}\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)].$$

La fonction φ n'est donc pas complètement déterminée; il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la relation ci-dessus; on pourra, par exemple, se donner arbitrairement le profil en amont de O et l'on déterminera à l'aide de cette relation le profil correspondant en aval (voir à ce sujet : C. Meissner, Bestimmung des Profils einer Seilbahn, *Schw. Bauzeitung*, 1909; dans cette étude, l'auteur n'envisage que le cas des liaisons sans frottements).

2° *Profil d'équilibre dans le cas où l'on tient compte des résistances passives.* Au point de vue pratique, c'est le seul qui nous intéresse.

Les résistances passives comprennent essentiellement des frottements; nous admettrons qu'elle peuvent se réduire à une force tangentielle d'intensité constante R.

Dans ce qui va suivre, nous allons supposer qu'il s'agit d'un funiculaire à contrepoids d'eau; soit P_1 le poids de la voiture descendante, y compris le poids de l'eau, et P_2 le poids de la voiture montante.

La somme des travaux des forces étant nulle, nous aurons pour un déplacement élémentaire $d\,\sigma$:

$$-P_1\varphi'(\sigma)d\,\sigma + P_2\varphi'(-\sigma)\,d\,\sigma + p\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)]\,d\,\sigma + R\,d\,\sigma = 0$$

ou :

$$P_1\,\varphi'(\sigma) = P_2\,\varphi'(-\sigma) + p\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)] + R. \quad (1)$$

Lorsque la voiture motrice sera en b, l'équation (1) deviendra, en remplaçant σ par $-\sigma$:

$$P_1\,\varphi'(-\sigma) = P_2\,\varphi'(\sigma) - p\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)] + R \quad (2)$$

Eliminons $\varphi'(-\sigma)$ entre les équations (1) et (2); il suffit de les additionner, après avoir multiplié la première par P_1 et la seconde par P_2 :

$$P_1^2\,\varphi'(\sigma) = P_2^2\,\varphi'(\sigma) + p\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)]\,(P_1 - P_2) + R\,(P_1 + P_2)$$

d'où l'on tire :

$$\varphi'(\sigma) = \frac{p\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)]}{P_1 + P_2} + \frac{R}{P_1 - P_2} \quad (3)$$

Si l'on fait la somme, entre a et b, des travaux élémentaires considérés ci-dessus, il viendra :

$$P_1\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)] - P_2\,[\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma)] - 2\,R\,\sigma = 0$$

ou bien :

$$\varphi(\sigma) - \varphi(-\sigma) = \frac{2\,R}{P_1 - P_2}\,\sigma \quad (4)$$

et en remplaçant dans (3) :

$$\varphi'(\sigma) = \frac{p}{P_1 + P_2}\,\frac{2\,R}{P_1 - P_2}\,\sigma + \frac{R}{P_1 - P_2} \quad (5)$$

enfin, en intégrant, après avoir multiplié par $d\,\sigma$:

$$\varphi(\sigma) = \frac{p}{P_1 + P_2}\,\frac{R}{P_1 - P_2}\,\sigma^2 + \frac{R}{P_1 - P_2}\sigma. \quad (6)$$

c'est la fonction φ cherchée.

La courbe AB a donc pour équation :

$$z = \frac{p}{P_1 + P_2}\,\frac{R}{P_1 - P_2}\,s^2 + \frac{R}{P_1 - P_2}\,s \quad (7)$$

cette équation est caractéristique d'une *cycloïde* à base horizontale.

Faisons $\sigma = 0$ dans l'équation (1); il viendra, si l'on appelle γ l'angle formé avec l'horizon par la tangente à la courbe en 0 :

$$P_1 \sin\gamma = P_2 \,cin\,\gamma + R$$

ou :

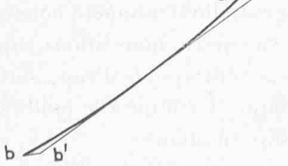
$$\sin\gamma = \frac{R}{P_1 - P_2} \quad (8)$$

Soit h la différence de niveaux des deux points correspondants a et b; on aura, en vertu de (4) et (8) :

$$h = 2\,\sin\gamma.\,\sigma. \quad (9)$$

Il en résulte que la cycloïde possède la propriété suivante :

Etant donné un arc de cycloïde si l'on projette cet arc, parallèlement à la base, sur la tangente menée au point milieu de l'arc, la longueur de l'arc ab est égale à sa projection a' b'.



L'équation (9) étant valable pour deux points correspondants quelconques, si l'on appelle L la longueur totale du tracé AB et H la différence de niveau des points A et B, on aura :

$$H = L \sin\gamma$$

ou :

$$\sin\gamma = \frac{H}{L} \quad (10)$$

L'équation de la courbe AB pourra se mettre sous la forme suivante, si l'on appelle $N = \dfrac{p}{P_1 + P_2}$

$$z = N \sin\gamma\,s^2 + \sin\gamma\,s \quad (11)$$

Le problème à résoudre se présente généralement de la façon suivante : H est connu ; on prend pour P_2 la valeur correspondant à un cas de charge donné, par exemple la voiture montante pleine ; les quantités L, R, p, sont connues, du moins approximativement.

On calculera $\sin\gamma$ à l'aide de (10); l'équation (8) nous donnera P_1 et par suite le contrepoids d'eau ; la cycloïde sera ensuite facile à tracer au moyen de (11).

Remarquons que si l'on appelle ω l'angle de pente en un point d'arc s, l'équation (5) peut s'écrire :

$$\sin\omega = \sin\gamma + 2\,N \sin\gamma\,s. \quad (12)$$

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point B, l'équation de la courbe deviendra, s désignant l'arc compté à partir de B :

$$z = (\sin\gamma - NH)\,s + N \sin\gamma\,s^2 \quad (13)$$

ou :

$$z = \sin\beta\,s + N \sin\gamma\,s^2 \quad (14)$$

en appelant β l'angle formé avec l'horizon par la tangente à la courbe en B.

Appelons L' la projection horizontale de AB; si dans l'équation (13), on remplace s par $\dfrac{L}{L'}\,x$, ce qui n'est pas rigoureusement exact, on retombe sur l'équation parabolique de M. Vautier.

Quant aux formules données par M. Lévy-Lambert dans son ouvrage sur les chemins de fer funiculaires, page 25 et suivantes, elles sont erronées, cet auteur faisant une confusion entre L et L'.

Prenant le sommet de la cycloïde comme origine, il viendra :

$$z = N \sin\gamma\,s^2$$

la distance du sommet au point 0 étant égale à $\dfrac{1}{2\,N}$.

Enfin, α et β désignant les angles de pente en A et B, on trouvera facilement la formule suivante, permettant de calculer la longueur horizontale L' :

$$L' = \frac{1}{4\,N \sin\gamma}\left(\sin\alpha\,\cos\alpha - \sin\beta\,\cos\beta + \alpha - \beta\right) = \frac{4}{4\,N \sin\gamma}\,[\sin(\alpha - \beta)\,\cos(\alpha + \beta) + \alpha - \beta]$$

Une formule analogue permettra de calculer la projection horizontale d'un arc quelconque de la cycloïde.

Funiculaires à moteur fixe.

Pendant la période de mise en marche, le moteur devra fournir un certain travail; mais, une fois la vitesse de régime obtenue, l'effort du moteur sera constamment nul, le système étant partout en équilibre; ainsi donc, toutes les formules précédentes sont applicables ici.

Cela n'est vrai naturellement que pour le cas de charge considéré.

Mouvement du système dans d'autres cas de charge. Dans l'équation de la cycloïde interviennent les poids P_1 et P_2 des deux voitures, et c'est pour ces valeurs seulement de P_1 et P_2 que le mouvement est uniforme.

Que deviendra le mouvement dans un autre cas de charge ?

Soit un funiculaire à contrepoids d'eau; admettons que les poids P_1 et P_2 deviennent respectivement P_1' et P_2', et que ces derniers satisfassent à la relation (8); on aura donc $P_1' - P_2' = P_1 - P_2$, et si le poids de la voiture montante augmente de p', celui de la voiture descendante augmentera pareillement de p'.

Il y aura un excédent de force motrice égal à

$$- 4 \; N \; p' \sin \gamma \; \sigma$$

On se trouve ainsi dans le cas d'un mobile attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance σ; le mouvement est donc *tautochrone*, le point de tautochronisme étant en O.

Partant du repos, la voiture descendante prendra une vitesse de plus en plus grande jusqu'en O; en ce point, la force vive est maximun. A partir de là, la vitesse diminuera graduellement, et le système s'arrêtera de lui-même lorsque la voiture descendante sera arrivée à la station inférieure.

Soit M la masse totale du système et posons $K = 4 \; p' \; N \sin \gamma$.

Le théorème des forces vives nous donnera :

$$d \; \frac{M \; v^2}{2} = - K \; \sigma \; d \; \sigma,$$

la vitesse v en un point quelconque d'arc σ sera :

$$v = \sqrt{\frac{K}{M} \left(\frac{L^2}{4} - \sigma^2 \right)}$$

en O, cette vitesse sera $\frac{L}{2} \sqrt{\frac{K}{M}}$

Le temps nécessaire pour que la voiture descendante atteigne le point d'arc σ, sera donné par la formule :

$$t = \sqrt{\frac{M}{K}} \; arc \; cos \; \frac{2 \; \sigma}{L}$$

La durée totale du parcours sera donc : $\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$

Dans ce qui précède, nous avons supposé $P_2' > P_2$; si au contraire $P_2' < P_2$, *le mouvement sera celui d'un mobile repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance;* le système ne pourra pas démarrer de lui-même; en effet l'équation du mouvement deviendra :

$$d \; \frac{M \; v^2}{2} = + \; K \; \sigma \; d \; \sigma.$$

Par conséquent, pour établir l'équation de la cycloïde, il sera préférable, à ce point de vue, de prendre pour P_1 et P_2 leur valeur minimum, ce qui revient à supposer les deux voitures vides, et P_2' sera toujours plus grand que P_2.

En résumé, la cycloïde étant tracée comme on vient de le voir, *le mouvement sera uniforme dans un cas donné de charge* (voiture montante vide); *dans tous les autres cas, le mouvement sera tautochrone, et le système se mettra en mouvement et s'arrêtera de lui même aux stations.*

Tout cela suppose que P_1' et P_2' satisfont à l'équation (8); en d'autres termes, on régle le contrepoids d'eau de telle sorte que $P_1' = P_2' + \frac{R}{\sin \gamma}$.

Il n'y aura d'exception que dans le cas où la voiture montante étant vide, la voiture descendante est chargée; alors P_1' sera supérieur à sa valeur théorique et le mouvement sera accéléré.

Exemple numérique. Nous prendrons des données analogues à celles contenues dans l'étude de M. Vautier.

$L = 1500$ m. ; $H = 200$ m. ; $P_2 = 7000$ kg. (voiture vide);

$R = 133$ kg. ; $p = 1{,}5$ kg. par m.

Il viendra :

$\sin \gamma = 0{,}1333\ldots$; $P_1 = 8\,000$ kg.; $L' = 1486{,}50$ m. ;

$\sin \alpha = 0{,}1533\ldots$; $\sin \beta = 0{,}1133\ldots$

L'équation de la cycloïde sera :

$$z = 0{,}1333\ldots \; s + 0{,}00001333 \; s^2.$$

Le mouvement est uniforme; la vitesse sera celle que l'on aura communiquée au système.

Considérons un autre cas de charge, par exemple, la voiture montante pleine,

$P_2' = 11\,000$ kg.; il viendra $P_1' = 12\,000$ kg.

Soit $M = 3\,000$; on trouvera $\sqrt{\frac{M}{K}} = 120$.

Le mouvement est tautochrone, la vitesse sera maximum au point de croisement, où elle atteindra 6 m. 30 environ.

La durée du parcours sera de 6 min. 14 sec.

Si maintenant, pour établir l'équation de la cycloïde, on prend $P_2 = 11\,000$ kg. (voiture montante pleine), on trouvera :

$$z = 0{,}133.. \; s + 0{,}0000087 \; s^2.$$

La courbe est donc moins concave que la précédente, ce qui explique les particularités du mouvement.

Concours d'idées pour l'aménagement des quais entre la promenade du Lac et le Port Noir.

Extrait du programme.

Le Conseil d'Etat du Canton de Genève ouvre un concours entre toutes les personnes que la question intéresse, dans le but de trouver un aménagement esthétique et rationnel de l'espace compris entre la route cantonale de Genève à