

# Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés

Autor(en): **Mayor, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **38 (1912)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29468>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES — PARAISSANT DEUX FOIS PAR MOIS

RÉDACTION : Lausanne, 2, rue du Valentin : D<sup>r</sup> H. DEMIERRE, ingénieur.

SOMMAIRE : *Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés* (suite), par B. Mayor, professeur. — *Installations de congélation de viande dans la République Argentine*. — Concours pour l'élaboration des plans d'un bâtiment pour Crèche, Croix-Bleue et Union Chrétienne, à Montreux. — Concours pour la construction d'un Museum d'Histoire naturelle. — Société suisse des ingénieurs et architectes. — *Chronique* : Centrales électriques. — Les poudres B. AM et B. D. — Concessions de chemins de fer.

## Définition générale de l'ellipse d'élasticité des systèmes articulés.

Par B. MAYOR, professeur.

(Suite<sup>1</sup>).

10. Les considérations qui précèdent trouvent une application immédiate dans la théorie du déplacement infiniment petit d'une figure plane de forme invariable.

Considérons, en effet, une figure plane de forme invariable et admettons qu'elle subisse, dans son plan, un déplacement arbitraire, mais infiniment petit. On sait qu'un pareil déplacement peut toujours être obtenu en faisant tourner la figure d'un angle infiniment petit  $\omega$  autour d'un point que nous désignerons également par  $\omega$  et qu'on appelle le *centre de rotation*. De plus, il est naturel de faire correspondre à ce déplacement une masse fictive concentrée au centre de rotation, l'intensité de cette masse étant précisément égale à l'angle  $\omega$  qui doit alors être regardé comme positif dans le cas où la rotation correspondante s'opère dans le sens positif, et comme négatif dans le cas contraire. Dans ces conditions, la projection du déplacement d'un point quelconque de la figure sur un axe passant par la position initiale de ce point est égale, en grandeur et signe, au moment statique de cette masse fictive relativement à l'axe considéré. Cette projection dépend donc uniquement de l'axe envisagé et non du point particulier de la figure qu'on a choisi sur cet axe; pour cette raison, il est indifférent de l'appeler le déplacement du point ou de la figure suivant cet axe.

Ces principes rappelés, admettons que l'on ait choisi, dans le plan de la figure mobile, un système de trois axes  $u, v, w$  formant un triangle de référence qui, cela est bien entendu, ne participe pas aux déplacements que peut prendre cette figure.

La masse fictive qui correspond à l'un quelconque des déplacements de la figure, masse que nous désignerons sous le nom de rotation, peut alors être définie analytiquement à l'aide de ses coordonnées  $x, y$  et  $z$  relativement à ce triangle. Par suite, les quantités  $x, y$  et  $z$  peuvent être

regardées comme les coordonnées du déplacement lui-même. Au reste, ces coordonnées ont une signification géométrique simple : l'une quelconque d'entre elles est égale, en effet, au déplacement que subit la figure suivant l'axe correspondant.

On sait, d'autre part, que les rotations se composent entre elles comme des masses ordinaires. Si donc la figure considérée subit, successivement ou simultanément, des rotations en nombre quelconque, les coordonnées du déplacement résultant sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= \sum x_i \\ y &= \sum y_i \\ z &= \sum z_i \end{aligned}$$

où l'on a désigné par  $x_i, y_i, z_i$  les coordonnées de l'une quelconque des rotations composantes.

11. Il résulte, en particulier, de ce qui précède que la rotation d'une figure invariable est entièrement déterminée lorsqu'on connaît les déplacements qu'elle subit suivant trois axes formant un triangle. En partant de là, il devient possible d'élargir quelque peu la notion de rotation et de l'étendre au cas d'une figure déformable.

Considérons dans ce but une figure plane  $F$  qui se déplace et se déforme infiniment peu, en demeurant dans son plan, de manière que les distances mutuelles de ses divers points ne restent plus invariables. Choisissons arbitrairement trois points  $A, B, C$  de cette figure et, par la position initiale de chacun d'eux, faisons passer un axe fixe de manière à obtenir un triangle de référence. Si l'on convient alors de désigner par  $x, y$  et  $z$  les projections des déplacements de ces points suivant les axes correspondants  $u, v$  et  $w$ , on peut évidemment regarder ces quantités comme les coordonnées de la rotation d'une certaine figure de forme invariable  $F'$  dont le déplacement se trouve ainsi associé à la déformation de  $F$ . Il est bien évident que cette rotation dépend non seulement de la déformation subie par  $F$ , mais encore du choix des points  $A, B, C$  ainsi que de celui des axes  $u, v$  et  $w$ . Pour ces diverses raisons, nous conviendrons, dans la suite, de l'appeler la rotation de  $F$  relativement à  $A, B, C$  et au système de référence  $u, v, w$ . C'est alors cette notion précisément, qui va nous permettre d'étendre la définition de l'ellipse d'élasticité au cas d'un système articulé absolument arbitraire.

<sup>1</sup> Voir N° du 10 décembre 1911, page 263.

## II.

1. Considérons un système articulé plan à liaisons assujéti à la seule condition d'être *défini*, c'est-à-dire tel qu'il demeure en équilibre quelles que soient les forces extérieures qui le sollicitent. Choisissons arbitrairement trois nœuds  $A, B, C$  de ce système et par chacun d'eux, faisons passer un axe, de manière qu'un triangle de référence fixe  $u, v, w$ , soit déterminé dans le plan du système.

Une force quelconque  $F$  étant donnée dans ce plan, désignons par  $X, Y$  et  $Z$  ses composantes suivant les axes  $u, v, w$ , composantes qui d'ailleurs sont égales aux coordonnées de cette même force relativement au triangle de référence choisi. Admettons ensuite que la composante  $X$  soit effectivement appliquée au nœud  $A$  qui se trouve précisément sur sa ligne d'action; que, de même, la composante  $Y$  soit appliquée au nœud  $B$  et la composante  $Z$  au nœud  $C$ .

Sous l'action de ces forces, le système subit une déformation que l'on peut assimiler, en vertu d'une hypothèse fondamentale de la théorie de l'élasticité, à la déformation infiniment petite d'une figure plane. A cette déformation correspond, relativement aux nœuds et au triangle de référence choisis, une rotation  $\omega$  parfaitement déterminée et que nous appellerons, pour simplifier le langage, la rotation du système relativement au triangle de référence adopté. Comme nous allons le montrer, cette rotation s'opère autour d'un point qui coïncide avec le pôle de la ligne d'action de  $F$  par rapport à une conique fixe.

Admettons, en effet, qu'on applique au nœud  $A$  une force unité dont la ligne d'action coïncide avec  $u$ . Le système se déforme et les nœuds  $A, B$  et  $C$  subissent, suivant les axes correspondants  $u, v$  et  $w$ , des déplacements que nous désignerons respectivement par  $a_{11}, a_{12}$  et  $a_{13}$ . De même, soient  $a_{21}, a_{22}, a_{23}$  les déplacements que subissent ces nœuds suivant les mêmes axes, lorsqu'on applique au nœud  $B$  une nouvelle force unité dont la ligne d'action coïncide avec  $v$ . Enfin, désignons encore par  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$  les déplacements analogues provoqués par une force unité appliquée en  $C$  dans la direction de  $w$ .

Il résulte tout d'abord du théorème de réciprocité de Maxwell que, dans le tableau

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

formé par ces déplacements, les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont égaux entre eux. En d'autres termes, pour  $i$  différent de  $k$ , on a toujours

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

D'autre part, lorsqu'on applique simultanément aux nœuds  $A, B$  et  $C$  les composantes  $X, Y, Z$  de la force  $F$ , le principe de la superposition des effets des forces montre immédiatement que les déplacements de ces nœuds suivant les axes correspondants sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} a_{11} X + a_{21} Y + a_{31} Z, \\ a_{12} X + a_{22} Y + a_{32} Z, \\ a_{13} X + a_{23} Y + a_{33} Z. \end{array}$$

Mais ces déplacements sont précisément égaux aux coordonnées de la rotation  $\omega$  par rapport au triangle de référence. On aura donc, en désignant par  $x, y$  et  $z$  ces coordonnées,

$$(1) \quad \begin{array}{l} x = a_{11} X + a_{21} Y + a_{31} Z, \\ y = a_{12} X + a_{22} Y + a_{32} Z, \\ z = a_{13} X + a_{23} Y + a_{33} Z. \end{array}$$

Or si l'on convient d'envisager  $x, y, z$  comme les coordonnées homogènes du point autour duquel s'opère la rotation  $\omega$  et  $X, Y, Z$  comme les coordonnées homogènes de la ligne d'action de  $F$ , les formules précédentes peuvent être mises sous la forme suivante

$$(2) \quad \begin{array}{l} \rho x = a_{11} X + a_{21} Y + a_{31} Z, \\ \rho y = a_{12} X + a_{22} Y + a_{32} Z, \\ \rho z = a_{13} X + a_{23} Y + a_{33} Z, \end{array}$$

où  $\rho$  désigne un facteur arbitraire. Elles coïncident alors avec les relations classiques qui déterminent le pôle d'une droite par rapport à la conique admettant

$$(3) \quad a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 + a_{33} Z^2 + 2 a_{12} X Y + 2 a_{23} Y Z + 2 a_{31} Z X = 0$$

pour équation tangentielle, et la propriété énoncée est ainsi démontrée.

2. En général, la conique représentée par l'équation (3) dépend non seulement du système considéré, mais encore des nœuds  $A, B, C$  et du triangle de référence formé par les axes passant par ces nœuds. Elle est d'ailleurs toujours imaginaire, comme on peut le voir facilement en mettant son équation sous une forme qui conduit à des conséquences intéressantes.

Admettons, en effet, que l'on ait attribué à toutes les barres du système des numéros d'ordre, les divers éléments qui peuvent dépendre d'une barre déterminée étant alors caractérisés par un indice égal à son numéro d'ordre. C'est ainsi que nous désignerons par  $l_i, \Omega_i, E_i$  la longueur, la section et le module d'élasticité de la barre dont le numéro d'ordre est précisément égal à  $i$ . Posons, en outre, pour simplifier l'écriture

$$(4) \quad \mu_i = \frac{l_i}{E_i \Omega_i}.$$

Enfin, désignons par  $T'_i, T''_i$  et  $T'''_i$  les tensions produites dans cette même barre par les trois forces unité précédemment considérées et qui donnaient lieu aux divers déplacements  $a_{ik}$ . Il résulte immédiatement d'une formule très connue de la théorie des déformations que ces déplacements ont pour valeurs

$$\begin{array}{l} a_{11} = \Sigma \mu_i T_i'^2, \quad a_{22} = \Sigma \mu_i T_i''^2, \quad a_{33} = \Sigma \mu_i T_i'''^2, \\ a_{12} = \Sigma \mu_i T_i' T_i'', \quad a_{23} = \Sigma \mu_i T_i'' T_i''', \quad a_{31} = \Sigma \mu_i T_i''' T_i', \end{array}$$

le signe  $\Sigma$  représentant une somme qui doit être étendue à toutes les barres du système.

Si l'on remplace enfin ces déplacements par leurs valeurs dans (3), on voit immédiatement que cette équation

peut être mise sous la forme suivante que nous nous proposons d'obtenir

$$(5) \quad \Sigma \mu_i (T_i' X + T_i'' Y + T_i''' Z)^2 = 0.$$

Or le premier membre de cette équation est formé par une somme de carrés parfaits multipliés par des coefficients qui, d'après (4), sont tous positifs. Cette équation ne peut donc être vérifiée par des valeurs réelles de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , de sorte que la conique qu'elle représente est toujours imaginaire. Il ne résulte d'ailleurs aucun inconvénient de ce fait, puisqu'en substituant à la notion de pôle celle d'anti-pôle, on pourra toujours remplacer cette conique par sa conjuguée qui devient réelle. (A suivre.)

## Installations de congélation de viande dans la République Argentine.

Exécutées

par la Maison Sulzer Frères, à Winterthur  
et ses Représentants

Geiger, Zublin & C<sup>ie</sup>, Buenos-Aires.

Le commerce international de la viande congelée a pris une importance considérable dans le courant de ces dernières années. Comme l'ont déjà fait d'autres pays, la Suisse aussi vient d'ouvrir ses frontières à l'importation de la viande congelée. Parmi les pays exportateurs de viande, c'est actuellement la République Argentine, ce pays extrêmement riche en bétail, qui occupe la première place. Pour se rendre compte de l'importance extraordinaire des exportations de la République Argentine, comparées à celles des autres pays, il suffit de jeter un coup d'œil sur le tableau suivant. Le pays choisi ici à titre de comparaison est l'Amérique du Nord, dont la consommation propre s'est tellement accrue dans ces dernières années que l'exportation a considérablement diminué.

### Exportation pour l'Angleterre :

	AMÉRIQUE DU NORD	RÉPUBLIQUE ARGENTINE
	Nombre de quartiers de bœuf	Nombre de quartiers de bœuf
1901	1 900 000	25 000
1903	1 600 000	142 000
1905	1 340 000	402 000
1907	1 451 000	427 000
1909	521 000	1 066 000

La comparaison suivante avec les autres pays exportateurs montre qu'ils ont été dépassés également par la République Argentine.

### Nombre de têtes de bétail :

	Moutons	Bêtes bovines
République Argentine	67 000 000	29 000 000
Australie . . . . .	84 000 000	9 000 000
Canada . . . . .	5 576 000	11 800 000
Colonie du Cap . . . .	2 000 000	2,510 000

On voit que le poids de viande du bétail argentin est trois fois plus grand que celui du bétail australien. La quantité de viande congelée exportée, qui était de 113 000 quartiers de bœuf et de 2 500 000 moutons en 1890, s'est élevée dans l'espace de six ans à 2 000 000 quartiers de bœuf et à 3 500 000 moutons.

En 1910, les exportations sont montées à 3 043 000 quartiers de bœuf et à 3 400 000 moutons. On voit que notamment le nombre de quartiers de bœuf exportés a augmenté considérablement, puisqu'il est devenu douze fois plus grand dans l'espace de dix ans.

Les efforts entrepris dans le but d'améliorer les races de bétail marchent de pair avec cet accroissement considérable de l'exportation. Les prix payés pour les bêtes de reproduction ont atteint des sommes tout à fait extraordinaires; on a payé un étalon jusqu'à Fr. 95 000. Plus de la moitié des têtes de bétail indiquées plus haut ont été améliorées par croisement. On élève surtout des bêtes de boucherie; toutefois, depuis quelque temps, la laiterie et l'élevage de vaches à lait prennent de l'extension; actuellement, il y a 2 164 000 vaches laitières.

La valeur de tout le bétail argentin est estimée à 3 300 000 000 de francs; si l'on considère que la population n'atteint pas encore 7 millions d'habitants, on conviendra que cette somme est extraordinairement élevée.

Les produits exportés par la République Argentine sont essentiellement ceux de son agriculture et ceux de l'élevage de son bétail; ces derniers représentent pour l'année 1908 une valeur de Fr. 585 000 000, qui se décompose :

Laine . . . . .	Fr. 239 000 000
Viande de bœuf congelée et réfrigérée. . . . .	» 91 000 000
Viande de mouton congelée et réfrigérée. . . . .	» 32 000 000
Graisse . . . . .	» 30 000 000

Le prix des animaux de la race bovine varie en République Argentine entre Fr. 0,40 à Fr. 0,50 par kg. de viande sur pied. Le prix des moutons varie, suivant la quantité de laine, entre Fr. 0,60 et Fr. 1 par kg. de viande sur pied.

L'industrie de la congélation de la viande s'exerce principalement aux bords de la mer; le bétail est amené en partie par chemin de fer dans des wagons de construction spéciale (à deux étages pour les moutons), la plus grande partie vient même, quand les distances sont très grandes, par convois escortés par des gauchos à cheval. Pour le transport par eau, on se sert de chalands de construction spéciale. Une faible partie des côtes de la République Argentine est reliée à l'intérieur par des chemins de fer. Toute la région au sud de Bahia Blanca en est dépourvue; malgré cela, même les contrées les plus méridionales, St-Julien, par exemple, sont des places d'exportation de viande.

La première installation de congélation de viande en ce pays, qui fut en même temps la première installation du monde construite sur les principes modernes (pour les transports d'outre mer), a été faite en 1885 par MM. Sulzer