

# Etude probabiliste des structures par programmation paramétrique

Autor(en): **Casciati, F. / Faravelli, L. / Sacchi, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **103 (1977)**

Heft 14

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-73251>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Etude probabiliste des structures par programmation paramétrique<sup>1</sup>

par F. CASCIATI, L. FARAVELLI et G. SACCHI

L'évaluation générale de la sécurité d'une structure se fonde sur celle de son risque de rupture par rapport au coût. On pourrait dire que le problème de la sécurité d'une structure réside donc dans l'optimisation du rapport entre le risque et le coût de la structure elle-même, tout en sachant que ces deux facteurs doivent être compris dans un sens très général [1], [2]<sup>2</sup>. On est en effet forcé de considérer des phénomènes complexes, présentant des aspects directement mesurables (par exemple la probabilité de ruine au sens restreint, le coût des dommages matériels...), difficilement mesurables (par exemple coûts sociaux) et non mesurables (par exemple la valeur de la vie humaine). Jusqu'à maintenant le problème de la sécurité des structures a été étudié d'une façon assez vaste et rigoureuse en ce qui concerne le calcul de la probabilité de ruine d'une structure à résistance aléatoire et soumise à des sollicitations, aléatoires elles aussi [2], [3], [4], [5].

Des études ont été conduites également par différents auteurs sur l'évaluation du niveau de risque acceptable. Puisque dans ce cas on doit considérer les aspects les plus délicats du problème général, on a formulé jusqu'à maintenant des propositions très intéressantes, mais la discussion reste très ouverte [6], [7], [8].

Au stade actuel, on sait calculer la probabilité de ruine, sans pouvoir faire correspondre d'une façon rigoureuse la notion exacte de sécurité à la probabilité calculée.

Dans ce qui suit, on nommera brièvement par le terme de « ruine » l'état — à définir — dans lequel la structure est hors de service. En ce qui concerne la probabilité de ruine des structures, on pourrait envisager les cas suivants :

1. Phénomènes indépendant du facteur temps.
  - a) Probabilité de ruine élastoplastique. Structure à résistance aléatoire. Sollicitations aléatoires.
  - b) Probabilité qu'en un point donné de la structure s'exerce un état d'effort donné. Lois constitutives à caractère aléatoire du matériau employé. Sollicitations déterministes [9].
2. Phénomènes dépendant du facteur temps.
  - a) Probabilité que la ruine intervienne dans un temps donné. Structures à résistance aléatoire. Sollicitations aléatoires dépendant du temps en régime soit stationnaire, soit transitoire.
  - b) Probabilité que la ruine advienne dans un temps donné. Structure à résistance déterministe. Sollicitations dépendant du temps en régime transitoire.
  - c) Probabilité de ruine dans un temps donné. Structure dont la loi aléatoire de résistance dépend de l'histoire de charge. Sollicitations dépendant du temps.

Dans cet exposé, on se bornera à présenter des méthodes de calcul de la probabilité de ruine de structures parfaitement élastoplastiques dans les conditions prévues sous 1 a).

## 1. Le problème

On considère une structure (fig. 1) soumise aux charges  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , dont les caractéristiques aléatoires sont indiquées à l'aide des histogrammes dessinés et dont on suppose qu'ils ont été dessinés sur la base de relevés expérimentaux.

La structure est conçue comme un ensemble d'un nombre fini d'éléments finis parfaitement rigides, séparés par des sections critiques où l'on considère concentrées les caractéristiques de déformabilité de la poutre. Dans l'exemple de la figure 1 on a considéré 52 sections critiques. La loi de comportement en chaque section critique est rigide-parfaitement plastique, et la courbe

<sup>1</sup> Conférence prononcée le 27 février 1974 à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, dans le cadre d'un cycle de conférences organisé par l'Institut de la construction métallique (ICOM) sous le patronage du professeur J.-C. Badoux. La recherche a été supportée par le C.N.R.

<sup>2</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

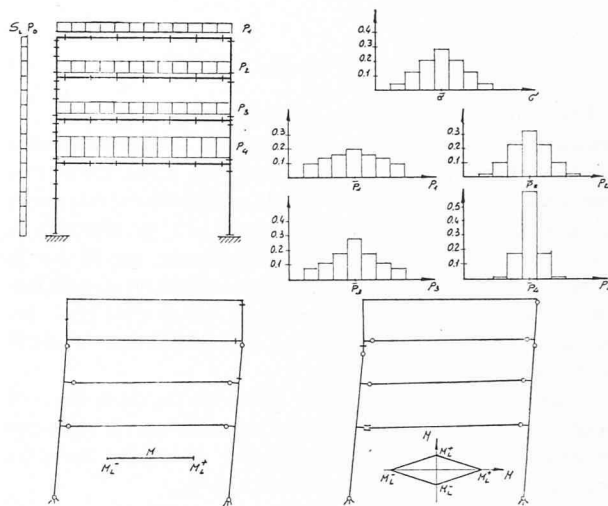


Fig. 1. — Structure de référence.

d'interaction entre moment fléchissant  $M$  et effort axial  $N$  est linéarisée. La contrainte limite  $\bar{\sigma}$  est, elle aussi, aléatoire, et sa loi de variabilité est représentée par la figure 1. On suppose que les valeurs moyennes des charges  $P_1, P_2, P_3, P_4$  n'entraînent pas la ruine de la structure.

La structure est soumise aussi à une charge horizontale  $S_L P_0$ , où  $P_0$  est la valeur de base de la charge et  $S_L$  est le multiplicateur de  $P_0$ .  $S_L$  est conçu comme une variable aléatoire. Le problème est de calculer la probabilité  $p_f$  de ruine plastique de la structure par rapport à la charge aléatoire  $S_L P_0$ . On peut donc envisager deux aspects fondamentaux du problème : la résistance  $R$  de la structure et la sollicitation  $s$  sur la structure. Il est évident que la ruine surviendra lorsque  $R \leq s$ .  $R$  est une variable aléatoire, parce que  $\bar{\sigma}$  est aléatoire et la structure est « affaiblie » par les charges aléatoires  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Comme on a 52 sections critiques et 4 charges verticales et que l'on considère que ces variables aléatoires sont indépendantes, on pourra dire que le problème est probabiliste à 56 paramètres indépendants.

Sur la base du théorème de la probabilité totale, on peut, à partir des histogrammes de la figure 1, tracer la loi de fréquence de  $R$ .  $R$  sera défini dans un intervalle délimité par les valeurs  $R_{\min}$  et  $R_{\max}$ , dépendant des valeurs extrêmes des variables aléatoires  $P_i, \bar{\sigma}$ .

Il est d'ailleurs adéquat de considérer  $R$  comme limitée vers le bas puisqu'on suppose que  $\bar{\sigma}$  est limitée par des contrôles industriels et  $P_i$  par les normes.

On peut tracer la fonction  $\Phi_R(s)$  cumulée de  $R$ , comme indiqué sur la figure 2 : en abscisse, les valeurs  $s$  qu'on appellera sollicitations généralisées, et, en ordonnée, la probabilité d'existence d'une valeur donnée de  $s$ . L'ordonnée lue sur  $\Phi_R(s)$  d'une valeur de  $s$  nous donne la probabilité que  $s$  ne soit pas dépassée. La figure 2 montre également la fonction  $f(s)$  indiquant la probabilité associée à chaque valeur de la sollicitation extérieure.

Il est bien connu que la probabilité de ruine  $p_f = P(R \leq s)$  sera donnée par l'intégrale de convolution :

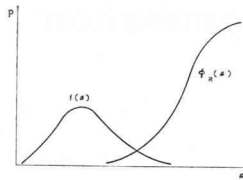


Fig. 2. — Description probabiliste des variables  $R$  et  $s$ .

$$p_f = \int_0^{\infty} f(s) \cdot \Phi_R(s) ds \quad (1)$$

Les limites de l'intégrale de convolution sont 0 et  $\infty$ , puisqu'on considère les sollicitations extérieures non limitées. On ne peut pas exclure, en effet, qu'il y ait une probabilité très faible que la sollicitation extérieure ait une valeur très grande. Dans ce qui suit, la résistance  $R$  a été représentée à l'aide d'un histogramme, tandis que la sollicitation  $s$  est conçue comme une fonction gaussienne limitée vers le bas. Cette hypothèse a été adoptée pour des raisons de calcul, la méthode ne dépendant pas du choix de la fonction  $f(s)$ .

Jusqu'à maintenant, on s'est référé au cas de la figure 1 pour fixer les idées, mais il reste entendu que la méthode de calcul est d'application générale, au moins dans les problèmes à un seul paramètre de charge.

## 2. La méthode de calcul

L'intégrale de convolution (1) montre que, pour calculer  $p_f$ , le calcul intermédiaire le plus délicat réside dans la détermination de  $\Phi_R(s)$ .

A cet effet, on peut adopter une technique de simulation statistique [10], [11]. On verra qu'il s'agit d'une technique numérique permettant d'obtenir des résultats assez précis en un temps d'ordinateur acceptable.

Puisqu'on considère l'état de ruine comme étant l'éroulement plastique de la structure par formation de mécanismes, on sait que, dans un quelconque des cas possibles, la recherche du multiplicateur de ruine peut se faire par l'aide de la programmation linéaire (L.P.) [12]. La détermination de  $\Phi_R(s)$  sera donc obtenue, comme on le verra en détail, à l'aide d'une suite de programmations linéaires, la technique de simulation étant portée sur un choix au hasard du vecteur des termes connus.

Les résultats obtenus seront d'autant plus précis que l'ampleur de l'échantillon statistique augmente, ce qui comporte l'augmentation du nombre  $\nu$  de programmations linéaires à résoudre.

Chaque programmation linéaire nous donne une valeur de  $S_L$ . Nous aurons donc  $\nu$  valeurs de  $S_L$ . Une fois déterminées les valeurs, la plus grande et la plus petite de  $S_L$ , nous serons en mesure de construire un histogramme des  $S_L$  à partir duquel on pourra déterminer aisément  $\Phi_R(s)$ .

Pour fixer les idées, nous pouvons considérer un cas à deux paramètres  $q_1$  et  $q_2$ . La figure 3 indique dans un plan le domaine rectangulaire des échantillons qui conduisent aux solutions possibles. Chaque point de ce domaine représente en effet un échantillon et pour chaque point nous devons calculer une valeur de  $S_L$ . La technique de simulation consiste dans le choix aléatoire de  $\nu$  points du domaine.

Il est bien connu que le domaine des solutions possibles peut être divisé en « régions décisionnelles » [13], [14], dont chacune contient les points représentatifs des vecteurs des termes connus admettant le même mécanisme de ruine que la structure.

La méthode est donc basée sur les étapes suivantes [15], [16]:

1. On considère la structure moyenne, c'est-à-dire celle qui présente en chaque section critique la résistance moyenne. Par une programmation linéaire, on obtient la valeur du multiplicateur moyen  $\bar{S}_L$ . La solution du problème de L.P. nous donne aussi le mécanisme de ruine.

2. On choisit au hasard un deuxième vecteur de termes connus. Si le point représentatif de ce vecteur appartient à la même région décisionnelle du vecteur de la structure moyenne, il suffit, pour obtenir  $S_{1L}$  (nouvelle valeur de  $S_L$ ), de recourir au principe des travaux virtuels en adoptant le mécanisme de la structure moyenne.

Si au contraire le point n'appartient pas à la région décisionnelle de la structure moyenne, on est obligé de calculer  $S_{1L}$  à l'aide d'une nouvelle programmation linéaire.

On voit qu'en appliquant cette méthode le nombre d'optimisations nécessaires est inférieur ou égal à  $\nu$ .

La méthode de calcul est indiquée schématiquement sur la figure 3 et est basée sur l'emploi de la programmation linéaire paramétrique (P.L.P.).

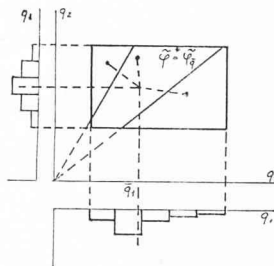
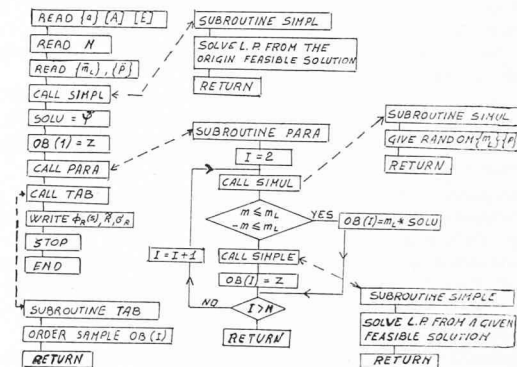


Fig. 3. — Représentation schématique de la méthode de calcul.

## 3. Le modèle de P.L.P.

On sait que la charge limite d'une structure élasto-plastique peut être calculée statiquement en maximisant le multiplicateur  $\psi$  des charges, en imposant que l'équilibre soit satisfait et que la condition de plasticité soit respectée.

Sur la figure 4, on a représenté le modèle P.L.P. employé en recourant à la méthode hyperstatique.

Les formules (4') donnent la définition du vecteur  $\{X\}$  des réactions hyperstatiques libres en signe, à l'aide des deux variables positives  $X^+$  et  $X^-$ .

Les inéquations (4) représentent les conditions de plasticité du problème, l'équilibre étant satisfait à l'aide des vecteurs  $\{a_m\}$ ,  $\{a_n\}$  et des matrices  $[D_m]$ ,  $[D_n]$ ,  $[E_m]$ ,  $[E_n]$ .

L'indice  $m$  se rapporte au moment fléchissant, tandis que l'indice  $n$  se rapporte à l'effort axial.  $\{r_0\}$  et  $\{p_0\}$  indiquent les vecteurs de résistance moyenne du matériau.

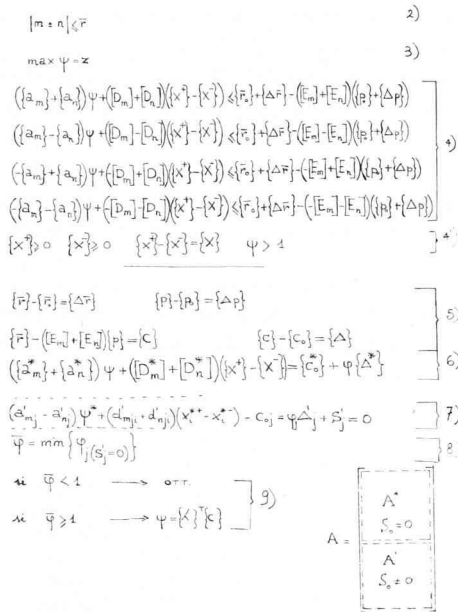


Fig. 4. — Le modèle de P.L.P.

et le vecteur des charges moyennes « affaiblissant » la structure.  $\{\Delta r\}$  et  $\{\Delta p\}$  sont les vecteurs de variations de résistance et de charge caractérisant chaque structure possible, choisie au hasard.

Dans l'hypothèse que le problème de P.L.P. présente plus de contraintes que d'inconnues (ce qui est en général vrai, lorsqu'on procède par voie statique), le tableau final du problème de L.P. relatif à la structure moyenne sera composé par les deux matrices  $[A^*]$  et  $[A']$ .

$[A^*]$  est une matrice carrée à variables slacks nulles, tandis que  $[A']$  sera, en général, une matrice rectangulaire à variables slacks différentes de zéro.

$\varphi$  étant un coefficient libre à l'aide duquel on a affecté la valeur de  $\{A\}$ , on peut, en agissant sur  $[A^*]$ , calculer les valeurs  $\psi^*$  et  $X^*$  des variables  $\psi$  et  $X$ .

L'équation (7) est déduite de la j-ème ligne de la matrice  $[A']$ , avec les valeurs  $\psi^*$  et  $X^*$  au lieu des variables. Il s'agit donc d'une équation à une seule inconnue  $\varphi_j$ . On peut calculer pour chaque équation possible la valeur de  $\varphi_j$  annulant  $S_j'$ .

On définit  $\bar{\varphi}$  selon la relation (8) comme le plus petit des  $\varphi_j$  qui annule les variables  $S_j'$ .

Sur la base de la théorie de la dualité, on peut affirmer que si  $\bar{\varphi} < 1$  la structure choisie au hasard cède selon un mécanisme différent du mécanisme de la structure moyenne. On doit donc optimiser selon les règles de la L.P. pour calculer  $\psi$ . Si, au contraire,  $\bar{\varphi} \geq 1$ , alors la structure choisie au hasard s'écroule selon le même mécanisme que celui de la structure moyenne et on peut calculer directement  $\psi$  à l'aide de la méthode des travaux virtuels.

#### 4. Exemples numériques

Les exemples numériques se rapportent aux structures dessinées des figures 1 et 8.

Les données relatives à ces deux structures sont indiquées dans le tableau de la figure 5. Les lettres en tête des colonnes ont les significations suivantes :

- $\bar{x}$  valeur moyenne,
- $v$  variance,
- $\sqrt{v}$  écart quadratique moyen (ou déviation standard),

Data	$\bar{x}$	$v$	$\sqrt{v}$	$c^2$	$c$
$\sigma$ [kg/cm <sup>2</sup> ]	2400	1872	43,27	$3,25 \cdot 10^{-4}$	0,0180
$P_1$ [kg/cm]	1,2	0,0467	0,2161	0,0324	0,1801
$P_2$ [kg/cm]	2,0	0,0640	0,2530	0,0160	0,1265
$P_3$ [kg/cm]	2,0	0,1088	0,3298	0,0272	0,1649
$P_4$ [kg/cm]	2,8	0,0447	0,2114	0,0057	0,0755

Fig. 5. — Tableau des données.

$$c^2 = \frac{v}{\bar{x}^2} \text{ variance spécifique,}$$

$$c = \sqrt{\frac{v}{\bar{x}^2}} \text{ coefficient de dispersion.}$$

Comme on peut le remarquer à la dernière colonne, les coefficients de dispersion des charges ont des valeurs assez grandes (environ 15 %), par rapport au  $c$  de la résistance  $\sigma$  du matériau. Il s'agit d'ailleurs des valeurs le plus souvent mentionnées par la littérature technique [2].

Sur la figure 6 on a indiqué les résultats relatifs au cadre à deux colonnes et quatre étages.

		$R_1 = 44,67$		$R_2 = 44,311$		
		$v$	$M$	$M - N$		
$\bar{R}$	$\bar{R}/R_1$	44,67	1,0	44,306	0,99967	
$v_R$	$v_R/R^2$	0,0125	$5,79 \cdot 10^{-5}$	0,0124	$6,05 \cdot 10^{-5}$	
$\sqrt{v_R}$	$\sqrt{v_R}/R$	0,1117	0,0076	0,1113	0,0076	
	$R_1$	44,67	1,0	44,306	0,99960	
		0,0125	$5,80 \cdot 10^{-5}$	0,0124	$6,04 \cdot 10^{-5}$	
		0,1117	0,0076	0,1112	0,0076	
		44,68	1,001	44,319	1,00058	
	$R_2$	0,0129	$5,99 \cdot 10^{-5}$	0,0132	$6,42 \cdot 10^{-5}$	
		0,1135	0,0077	0,1123	0,0080	
		44,71	1,003	44,343	1,00226	
		0,0130	$5,99 \cdot 10^{-5}$	0,0133	$6,47 \cdot 10^{-5}$	
$C P U^*$		$3' 48''$		$6' 54''$		$M$
$c_a = 0,1$	500	$0,24 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$	$0,28 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-3}$
$c_a = 0,2$		$0,31 \cdot 10^{-3}$	$0,47 \cdot 10^{-3}$	$0,31 \cdot 10^{-3}$	$0,50 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-3}$
$c_a = 0,3$		$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$
$c_a = 0,1$	50	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,20 \cdot 10^{-3}$	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-3}$	$0,36 \cdot 10^{-3}$
$c_a = 0,2$		$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,47 \cdot 10^{-3}$	$0,27 \cdot 10^{-3}$
$c_a = 0,3$		$0,33 \cdot 10^{-3}$	$0,24 \cdot 10^{-3}$	$0,34 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-3}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$
		$\bar{s} = \bar{R}/2$	$\bar{s} = \bar{R}/1,5$	$\bar{s} = \bar{R}/2$	$\bar{s} = \bar{R}/1,5$	$\bar{s} = \bar{R}/1,5$

\* HOEYWELL H 6030

Fig. 6. — Résultats du premier exemple.

Les symboles utilisés également pour les exemples qui suivent ont les significations suivantes :

- $v$  ampleur de l'échantillon des structures choisies au hasard,
- $M$  moment fléchissant,
- $N$  effort axial,
- $R_{\bar{r}}$  résistance de la structure moyenne,
- $\bar{R}$  valeur moyenne des résistances des structures choisies au hasard, ou valeur moyenne de la distribution  $R$ ,
- $v_R$  et  $v_R/R^2$  variance et variance spécifique de la distribution  $R$ ,
- $\sqrt{v_R}$  et  $\sqrt{v_R}/\bar{R}$  déviation standard et coefficient de dispersion de  $R$ ,

C.P.U. temps d'exécution de l'ordinateur,  
 $c_s$  coefficient de dispersion des sollicitations extérieures,  
 $\bar{s}$  valeur moyenne de la sollicitation extérieure  $s$ .

Comme on peut le relever sur la figure 6, l'ampleur des échantillons passe de 500 individus à 50 individus. Les temps d'ordinateur pour calculer  $\Phi_R(s)$  dans les quatre échantillons passent de 3'48", en considérant seulement  $M$ , à 7'54" dans le cas où l'on considère  $M$  et  $N$ , ce qui est assez satisfaisant étant donné que chacun des 500 problèmes étudiés est, comme nous l'avons dit, à 56 paramètres indépendants.

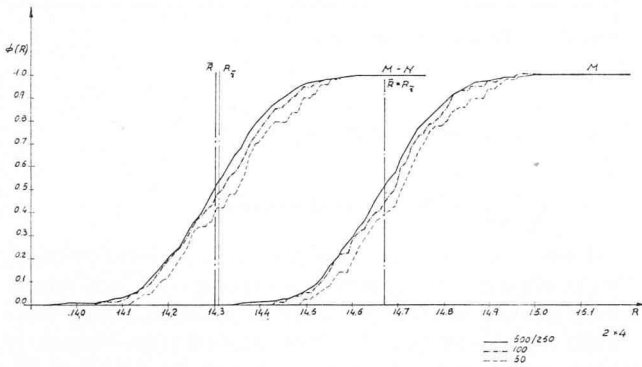


Fig. 7. — Fonctions cumulées de  $R$  pour le premier exemple.

On remarquera, sur la figure 7, que la distribution cumulée  $\Phi_R$  présente une moyenne plus élevée (14,67) dans le cas où l'on considère comme variable statique seulement  $M$ , par rapport à la valeur ( $\bar{R} = 14,306$ ) relative au cas où l'on considère comme variables statiques  $M$  et  $N$ . Cela est bien raisonnable, puisque le premier cas peut être considéré comme cinématiquement admissible par rapport au deuxième.

Sur la figure 7, on peut aussi remarquer qu'au fur et à mesure que l'on augmente  $\nu$ , la distribution  $\Phi_R$  devient plus régulière en s'appuyant à gauche.

Dans la deuxième partie du tableau de la figure 6, on peut lire les probabilités de ruine de la structure pour différents coefficients de dispersion et valeurs moyennes des sollicitations extérieures. On remarquera que l'on arrive à apprécier des probabilités de ruine de l'ordre de  $10^{-6}$ , ce qui correspond au niveau de risque actuellement accepté par les normes [2], [17].

L'estimation de la probabilité de ruine n'est pas trop sensible à l'ampleur de l'échantillon, au moins dans le cas

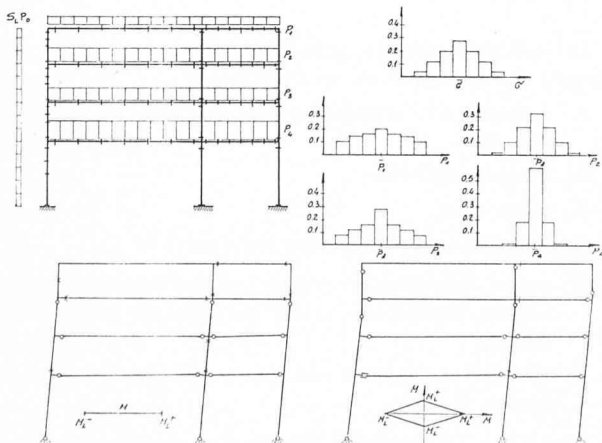


Fig. 8. — Deuxième exemple.

de la structure considérée, tandis qu'elle est très sensible à la variation du rapport  $\bar{R}/\bar{s}$ .

Par ailleurs, la probabilité de ruine peut apparaître très faible ( $0,46 \cdot 10^{-7}$ ) si l'on considère  $\bar{R}_{MN}/\bar{s} = 1,5$  et la distribution cumulée de  $\Phi_{R_M}$ . Ce résultat nous donne une idée de l'erreur d'estimation de la probabilité de ruine si l'on calcule la structure sur la base de la seule variable  $M$  dans le cas où l'on devrait considérer l'interaction des variables  $M$  et  $N$ .

Sur la figure 8 est représenté un exemple de structure à trois colonnes et à quatre étages. La méthode de calcul adoptée est identique à celle du cas précédent. Dans le cas de cette structure, on a 92 paramètres indépendants.

		$R_F = 22.005$		$R_F = 21.124$	
$\bar{R}$	$\bar{R}/R_F$	$M$	$M-N$	$M$	$M-N$
500	14,306	0,99978	21,137	0,99967	
		$0,0163$	$3,37 \cdot 10^{-5}$	$0,0157$	$3,51 \cdot 10^{-5}$
		$0,4278$	$0,0058$	$0,4253$	$0,0059$
250	14,306	0,99982	21,138	0,99972	
		$0,0174$	$3,60 \cdot 10^{-5}$	$0,0170$	$3,81 \cdot 10^{-5}$
		$0,1320$	$0,0060$	$0,1304$	$0,0062$
100	14,306	0,99964	21,132	0,99944	
		$0,0169$	$3,48 \cdot 10^{-5}$	$0,0166$	$3,72 \cdot 10^{-5}$
		$0,4278$	$0,0059$	$0,4288$	$0,0061$
50	14,306	0,99923	21,125	0,99914	
		$0,0179$	$3,69 \cdot 10^{-5}$	$0,0163$	$3,65 \cdot 10^{-5}$
		$0,1335$	$0,0061$	$0,1277$	$0,0060$
CPU *		11'36"		28'47"	
$c_s = 0.1$	500	$0,16 \cdot 10^{-6}$	$0,32 \cdot 10^{-6}$	$0,17 \cdot 10^{-6}$	$0,33 \cdot 10^{-6}$
$c_s = 0.2$		$0,29 \cdot 10^{-6}$	$0,47 \cdot 10^{-6}$	$0,30 \cdot 10^{-6}$	$0,49 \cdot 10^{-6}$
$c_s = 0.3$		$0,34 \cdot 10^{-6}$	$0,23 \cdot 10^{-6}$	$0,35 \cdot 10^{-6}$	$0,24 \cdot 10^{-6}$
$c_s = 0.1$	50	$0,17 \cdot 10^{-6}$	$0,34 \cdot 10^{-6}$	$0,17 \cdot 10^{-6}$	$0,34 \cdot 10^{-6}$
$c_s = 0.2$		$0,30 \cdot 10^{-6}$	$0,48 \cdot 10^{-6}$	$0,31 \cdot 10^{-6}$	$0,48 \cdot 10^{-6}$
$c_s = 0.3$		$0,35 \cdot 10^{-6}$	$0,24 \cdot 10^{-6}$	$0,35 \cdot 10^{-6}$	$0,24 \cdot 10^{-6}$
		$\bar{R} =$	$\bar{R}/4,5$	$\bar{R} =$	$\bar{R}/4,5$

\* HONEYWELL H 6030

Fig. 9. — Résultats du deuxième exemple.

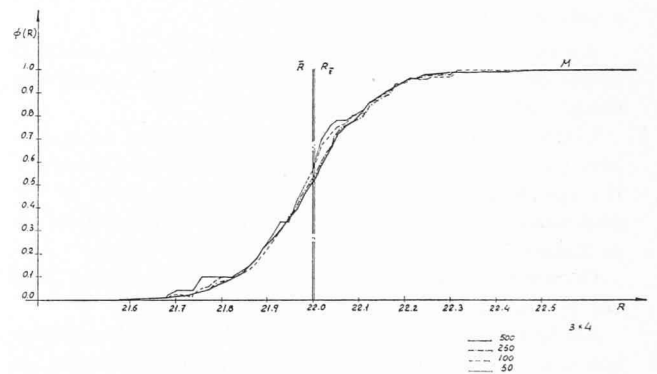


Fig. 10. — Fonction cumulée de  $R$  pour le deuxième exemple (avec la seule variable  $M$ ).

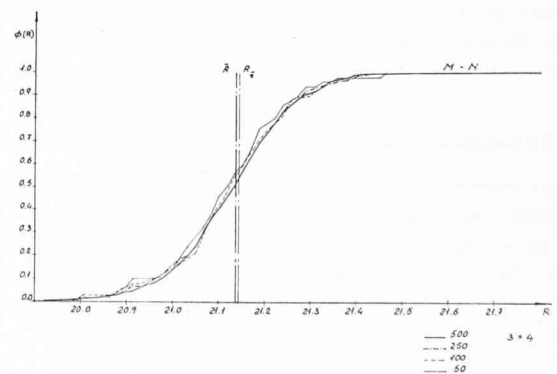


Fig. 11. — Fonction cumulée de  $R$  pour le deuxième exemple (avec l'interaction  $M-N$ ).

Sur la figure 9 sont représentés les résultats avec les mêmes symboles que ceux de la figure 6. Les figures 10 et 11 indiquent les distributions cumulées  $\Phi_R$  correspondant à la structure en question pour les deux cas où l'on considère comme variables statiques soit  $M$  seul ou  $M$  et  $N$ .

### 5. Le coefficient de dispersion de $R$

On peut aisément démontrer [18], avec des hypothèses très peu restrictives, qu'on a en général :

$$c_R \leq c_\sigma,$$

c'est-à-dire que le coefficient de dispersion de  $R$  est inférieur ou égal au coefficient de dispersion de la résistance  $\sigma$  du matériau. On est par ailleurs conduit à penser que la réduction de  $c_R$  par rapport à  $c_\sigma$  est d'autant plus marquée que se réduit le degré d'hyperstaticité de la structure.

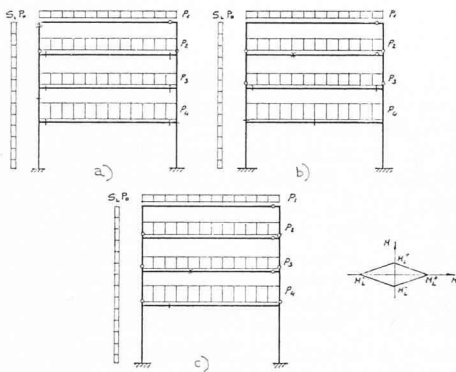


Fig. 12. — Structures à degré d'hyperstaticité réduit.

Sur la figure 12, on a représenté trois structures dérivées de celle donnée en figure 1, en réduisant le degré d'hyperstaticité à l'aide de l'introduction de rotules, soit 3 en a), 6 en b), 9 en c).

		$R_{\bar{r}}$			
		$M-H$	$-3X$	$-6X$	$-9X$
$\bar{R}/R_{\bar{r}}$	500	0.99967	0.99075	0.98912	0.98259
		$6.05 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$8.00 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-2}$
$v_R/\bar{R}^2$	500	0.0078	0.0148	0.0895	0.1125
		$6.04 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$	$8.02 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$
$\sqrt{v_R}/\bar{R}$	250	0.99980	0.98976	0.98693	0.98354
		$6.04 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$	$8.02 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$
$v_R/\bar{R}^2$	250	0.0078	0.0153	0.0895	0.1116
		$6.04 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$	$8.02 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$
$\sqrt{v_R}/\bar{R}$	100	1.00058	0.98820	0.98654	0.98804
		$6.42 \cdot 10^{-5}$	$2.69 \cdot 10^{-4}$	$7.13 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$
$v_R/\bar{R}^2$	100	0.0080	0.0164	0.0845	0.1126
		$6.49 \cdot 10^{-5}$	$3.29 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$
$\sqrt{v_R}/\bar{R}$	50	1.00226	0.98863	0.99052	0.9926
		$6.49 \cdot 10^{-5}$	$3.29 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$
$v_R/\bar{R}^2$	50	0.0081	0.0181	0.0903	0.1002
		$6.54 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$4.37 \cdot 10^{-2}$

\* HOHEYWELL H 6030

Fig. 13. — Résultats pour les structures des figures 1 et 12.

La figure 13 donne les résultats ; nous pouvons remarquer que, comme prévu, le coefficient de dispersion  $\frac{\sqrt{v_R}}{\bar{R}}$  croît de 0,0078 à 0,1125 lorsqu'on passe de la structure initiale 12 fois hyperstatique à la structure finale obtenue par réduction de 9 degrés d'hyperstaticité. Cela nous amène à estimer nécessaire l'analyse probabiliste des structures isostatiques ou à faible degré d'hyperstaticité. Au contraire, dans le cas des structures à degré élevé d'hyperstaticité, une telle analyse devient moins indispensable, surtout en ce qui concerne les aspects globaux du comportement à la ruine.

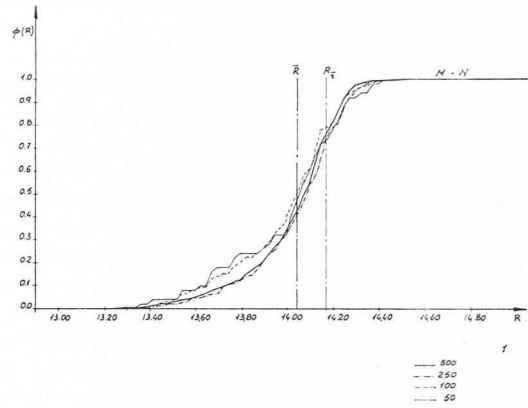


Fig. 14. — Fonction cumulée de  $R (-3X)$

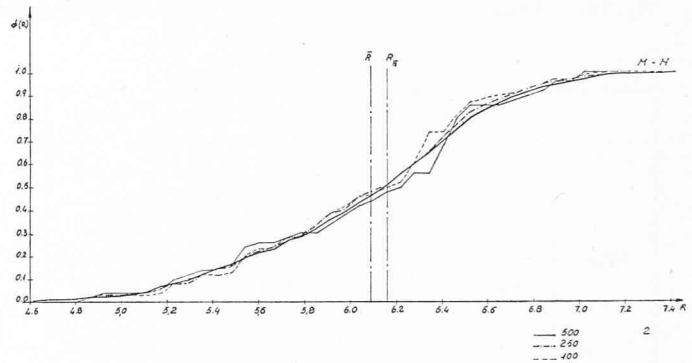


Fig. 15. — Fonction cumulée de  $R (-6X)$ .

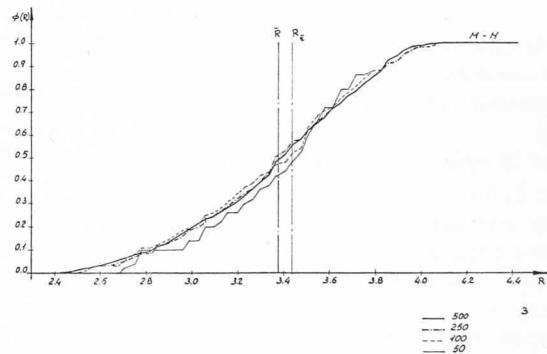


Fig. 16. — Fonction cumulée de  $R (-9X)$ .

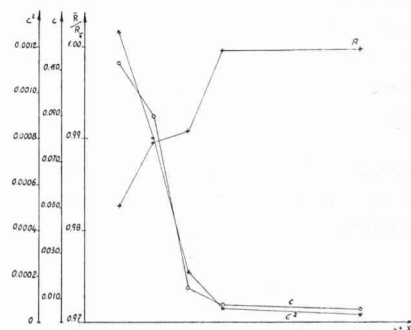


Fig. 17. —  $c$ ,  $c^e$  et  $\bar{R}/R_{\bar{r}}$  en fonction du degré d'hyperstaticité.

Sur les figures 14, 15 et 16 on trouve les distributions  $\Phi_R$  pour les trois structures a), b) et c). On remarquera que le rapport  $\bar{R}/R_{\bar{r}}$  diminue avec le degré d'hyperstaticité. Cet aspect du phénomène nous suggère que la tendance, parfois acceptée par les techniciens d'étudier la structure

$pf$	$\nu$	$M-N$		$-3X$		$-6X$		$-9X$	
$c_s = 0,1$	500	$0,26 \cdot 10^{-22}$	$0,35 \cdot 10^{-6}$	$0,25 \cdot 10^{-20}$	$0,70 \cdot 10^{-6}$	$0,32 \cdot 10^{-7}$	$0,23 \cdot 10^{-2}$	$0,50 \cdot 10^{-7}$	$0,61 \cdot 10^{-2}$
$c_s = 0,2$		$0,31 \cdot 10^{-6}$	$0,50 \cdot 10^{-2}$	$0,42 \cdot 10^{-6}$	$0,63 \cdot 10^{-2}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$	$0,22 \cdot 10^{-1}$	$0,38 \cdot 10^{-3}$	$0,33 \cdot 10^{-1}$
$c_s = 0,3$		$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-1}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,37 \cdot 10^{-1}$	$0,26 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-1}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,78 \cdot 10^{-1}$
$c_s = 0,1$	50	$0,14 \cdot 10^{-22}$	$0,29 \cdot 10^{-6}$	$0,34 \cdot 10^{-20}$	$0,10 \cdot 10^{-5}$	$0,64 \cdot 10^{-10}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,43 \cdot 10^{-10}$	$0,16 \cdot 10^{-2}$
$c_s = 0,2$		$0,27 \cdot 10^{-6}$	$0,47 \cdot 10^{-2}$	$0,53 \cdot 10^{-6}$	$0,67 \cdot 10^{-2}$	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$0,22 \cdot 10^{-1}$	$0,10 \cdot 10^{-3}$	$0,23 \cdot 10^{-1}$
$c_s = 0,3$		$0,34 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-1}$	$0,49 \cdot 10^{-3}$	$0,38 \cdot 10^{-1}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-1}$	$0,27 \cdot 10^{-2}$	$0,66 \cdot 10^{-1}$
		$\bar{s} = \bar{R}/2$	$\bar{s} = \bar{R}/1.5$	$\bar{s} = \bar{R}/2$	$\bar{s} = \bar{R}/1.5$	$\bar{s} = \bar{R}/2$	$\bar{s} = \bar{R}/1.5$	$\bar{s} = \bar{R}/2$	$\bar{s} = \bar{R}/1.5$

Fig. 18. — Valeurs de la probabilité de ruine pour les structures des figures 1 et 12.

	$\nu$	$M-N$	$-3X$	$-6X$	$-9X$
$\Phi_{10}$	500	0,046	0,084	0,080	0,268
	250	0,016	0,096	0,104	0,232
	100	0,020	0,090	0,050	0,180
	50	0,000	0,160	0,020	0,020

Fig. 19. — Valeurs  $\Phi_{10}$  correspondant à la dixième classe de l'histogramme de  $R$ .

sur la base des caractéristiques de la structure moyenne, peut conduire à des solutions d'autant plus inexactes et dangereuses que la structure a un faible degré d'hyperstaticité.

Sur la figure 17, on a représenté en diagramme  $c$ ,  $c^2$  et  $\bar{R}/R_f$  en fonction du degré d'hyperstaticité  $X$ .

On considère dans ce cas la structure de la figure 8 comme comparable à celle de la figure 1. En effet, on peut accepter que la structure à trois colonnes soit conçue comme « plus hyperstatique » que la structure à deux colonnes, étant donné que les sollicitations extérieures, par rapport auxquelles on considère la sécurité, sont des forces horizontales agissant sur la colonne de gauche.  $c$ ,  $c^2$  et  $\bar{R}/R_f$  relatifs à une telle structure sont représentés avec les points sur la droite du diagramme de la figure 17. Sur la figure 18 on a finalement indiqué les valeurs de la probabilité de ruine pour les différentes structures et les différents coefficients de dispersion des sollicitations extérieures.

On a indiqué aussi, sur le deuxième tableau (fig. 19), les valeurs  $\Phi_{10}$  de  $\Phi_R$  correspondant à la dixième classe de l'histogramme de la résistance  $R$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOLOTIN, V. V. : *Statistical methods in structural mechanics*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1969.
- [2] FERRY BORGES, J. and M. CASTANHETA : *Structural safety*, Lisbon, March 1971.

- [3] LEVI, F. : *Le facteur de sécurité dans les problèmes structurels non linéaires*, Ann. Inst. Techn. du Bât. et des Tr. Publics, n° 292, avril 1972.
- [4] ANG, A. H. S. and M. AMIN : *Probabilistic Structural Mechanics and Engineering*, Urbana, Illinois, June 1970.
- [5] CORNELL, C. A. : *Bounds on the reliability of structural systems*, J. Struct. Div. Proc. ASCE 93 (ST1) 1967.
- [6] ESTEVA, L. : *Structural safety and probabilistic methods*, Technical Committee 10, ASCE-IABSE International Conference on Planning and Design of Tall Building, Lehigh Univ., Bethlehem, Penns., Aug. 1972.
- [7] BENJAMIN, J. R. and C. A. CORNELL : *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, Mc Graw-Hill, New York 1970.
- [8] PARIMI, S. R. and M. Z. COHN : *Optimal Criteria in Probabilistic Structural Design*, to be published.
- [9] VIVANET, C. and A. BERIO : *Une contribution probabilistique à l'analyse de la sécurité des barrages poids-voûte en béton*, Seminar on Concrete Structures subjected to Triaxial Stresses (17th-19th May 1974, Bergamo, Italy).
- [10] ASTILL, C. J. and S. B. NOSSEIR, and M. SHINOZUKA : *Impact loading on structures with random properties*, J. Struct. Mech., 1 (1), 63-77 (1972).
- [11] CASTELLANI, A. and G. SACCHI : *Limit analysis and design of structures having random resistances*, Symposium on Plastic Analysis of Structures, IASI, 1972.
- [12] GAVARINI, C. : *Plastic analysis of structures and duality in linear programming*, Meccanica, n° 3/4, 1966.
- [13] HADLEY, G. : *Linear programming*, Addison-Wesley, 1971.
- [14] GAVARINI, C. : *Concezione probabilistica del calcolo a rottura*, Giorn. Genio Civile (Roma), 107 (8), 1969.
- [15] CASCIATI, F. and G. SACCHI : *On the Reliability Theory of the Structures*, 15th Solid Mechanics Conference, Zakopane, September 1973.
- [16] SACCHI, G. : *Sur l'étude probabiliste des structures élastoplastiques*, CTICM — Séminaire sur le calcul aux états-limites des structures à barres, Puteaux, 8-12 octobre 1973.
- [17] RACCOMANDAZIONI C. E. B. — F. I. P.
- [18] CASTELLANI, A. : *On the expected value and variance of the safety factor relevant to random resistances*, Meccanica, n° 4 (Vol. VI), 1971.

Adresse des auteurs :

F. Casciati et L. Faravelli  
assistants à l'Istituto di Scienza e Tecnica  
delle Costruzioni, Università di Pavia (Italie)  
G. Sacchi  
professeur à l'Institut ci-dessus