

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 103 (1977)
Heft: 14

Artikel: Interprétation des franges d'interférence obtenues par moiré d'ombre
Autor: Pflück, Michel / Pflug, Léopold
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-73250>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Interprétation des franges d'interférence obtenues par moiré d'ombre

par MICHEL FLÜCK et LÉOPOLD PFLUG

1. Introduction

A deux reprises, nous avons exposé dans ces colonnes des procédés optiques exploitant les propriétés des moirés et destinés à l'analyse des contraintes dans les coques ou les plaques [1, 2].¹

Dans le premier de ces procédés, le moiré d'ombre, les franges d'interférences constituent les lignes de niveaux ($w = \text{cte}$) de la surface déformée. Dans le second, le moiré de réflexion, les franges donnent les valeurs d'égale pente de la déformée, dans une direction (par exemple $\frac{\partial w}{\partial x} = \text{cte}$).

Toutefois, dans les deux cas, l'exploitation quantitative des informations contenues dans les figures d'interférences nécessite des opérations complémentaires afin de parvenir aux efforts internes.

L'objectif du présent travail est d'apporter à l'utilisateur un mode opératoire lui permettant d'obtenir les courbures principales d'une surface quelconque en évitant de longues manipulations de routine. Dans le développement présenté ici, la surface est analysée à l'aide de la méthode du moiré d'ombre, mais il va de soi qu'une technique comparable pourrait être appliquée à fortiori aux clichés issus d'un moiré de projection.

La recherche des courbures constitue, en effet, l'étape essentielle de la détermination des efforts de flexion. Dans le cas particulier des plaques minces obéissant aux hypothèses de Kirchhoff, les efforts de flexion sont liés à la déformée par la relation habituelle :

$$\begin{aligned} M_x &= D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

alors que les expressions correspondantes pour les coques à symétrie de révolution peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} M_\phi &= D [k_\phi + \nu k_\theta] \\ M_\theta &= D [k_\theta + \nu k_\phi] \end{aligned}$$

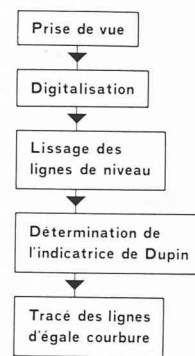
où k_ϕ et k_θ représentent des expressions où interviennent les courbures principales au point considéré et D la rigidité de flexion [3].

2. Séquences des opérations

Les séquences des différentes opérations sont résumées dans le schéma n° 1 ; nous nous bornerons dans le présent article à développer les deux dernières phases du processus, car les techniques de moiré proprement dites ont été exposées ici même et la digitalisation du cliché ne présente guère de particularités.

Il nous paraît par contre nécessaire d'apporter quelques remarques sur les opérations de lissage des courbes ainsi

Schéma N° 1



que sur la recherche et l'exploitation de l'indicatrice de Dupin.

3. Lissage des courbes

Le schéma n° 1 montre que les informations contenues dans les franges d'interférences sont introduites dans l'ordinateur sous forme de valeurs discrètes correspondant aux coordonnées d'un certain nombre de points situés sur une courbe de niveau.

Dans le stade actuel, la transmission cliché-ordinateur s'effectue à l'aide d'un coordinatographe desservi par un opérateur, ce qui introduit nécessairement une certaine erreur sur chaque point, s'ajoutant aux imprécisions spécifiques de la technique expérimentale.

Le lissage des courbes de niveau s'avère donc indispensable ; notons en passant que ce lissage numérique correspond d'ailleurs à la nature physique de la surface étudiée qui, dans le cas d'une structure telle qu'une plaque ou une coque, possède un profil très régulier.

La technique de lissage doit réaliser un compromis entre la raideur de la courbe astreinte à passer dans un ensemble de points, dont la solution extrême mène à la droite des moindres carrés, et le strict respect du passage par les points enregistrés [4].

La prépondérance de l'une ou l'autre de ces tendances doit pouvoir être adaptée au gré de l'utilisateur qui dispose ainsi d'un moyen d'intervention lui permettant de tenir compte des conditions spécifiques de l'essai en cours.

Dans le processus de lissage, nous considérons n points ($n \geq 3$) du plan x, y contenant l'ensemble des franges d'interférences et représentant les courbes de niveau de la surface étudiée.

Soit $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$ l'ensemble des points relevés sur une courbe de niveau ; nous déterminons tout d'abord une courbe paramétrée $x(t); y(t)$ pour $t \in [t_1; t_n]$.

Pour chaque coordonnée x et y , nous choisissons un intervalle de paramétrisation $t_1 < \dots < t_n$ et cherchons une fonction g , définie sur $[t_1; t_n]$, deux fois continuellement différentiable et telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

$$1) \quad \sum_{i=1}^n \left[\frac{g(t_i) - x_i}{\Delta x_i} \right]^2 \leq S \quad (2)$$

où S représente le paramètre de lissage et Δx_i représente l'intervalle de proximité au point $(t_i; x_i)$

$$2) \quad \int_{t_1}^{t_n} g''(t)^2 dt \text{ minimum} \quad (3)$$

Le choix du paramètre de lissage S permet de réaliser le compromis évoqué plus haut ; en effet, pour $S = \infty$ la courbe lissée devient la droite des moindres carrés alors que $S = 0$ fournit la courbe d'interpolation satisfaisant la relation (3).

Dans les exemples pratiques, on choisira les paramètres S de façon à renforcer le poids des informations issues de zones où les conditions expérimentales peuvent être recoupées de manière indépendante (voisinage des appuis, présence de symétrie).

Après avoir choisi les paramètres S et Δx_i , on construit la fonction g sur chaque intervalle $x \in [t_i; t_{i+1}]$ de telle manière que

$$g(x) = f_i(x - t_i) \quad (4)$$

$$\text{avec} \quad f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (5)$$

les conditions (2) et (3) ainsi que la double différentiabilité de g nous permettent alors de déterminer les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i . Procédant ainsi pour x et y séparément, nous obtenons une expression sous forme continue pour chaque ligne de niveau.

4. Propriétés des surfaces

L'exploitation des courbes de niveau ainsi lissées s'appuie sur certaines propriétés de surfaces, aussi nous paraît-il judicieux de rappeler ici les traits principaux de ces propriétés [5].

Considérons une surface $\vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$ avec $\vec{r}(x, y)$ défini et deux fois continuellement différentiable selon les variables x et y dans un domaine D du plan Oxy . Introduisons encore les notations suivantes :

$$\begin{aligned} p &= z_x = \frac{\partial z}{\partial x} & q &= z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \\ r &= z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ t &= z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & \Delta &= (1 + p^2 + q^2)^{1/2} \end{aligned}$$

En chaque point $P(x_i, y_i)$ de la surface peuvent être définis les éléments suivants :

1. Le plan tangent à la surface en P est défini par : $\vec{P}, \vec{r}_x, \vec{r}_y$ (on suppose que $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y$ est non nul).

2. La normale à la surface en P défini par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y|}$$

3. Dans le plan tangent une direction (dx, dy) est donnée par le vecteur $\vec{r}_x dx + \vec{r}_y dy$ du plan tangent.

4. La section normale dans une direction (dx, dy) du plan tangent est la courbe plane obtenue par l'intersection de la surface et du plan déterminé par P, \vec{n} et $\vec{r}_x dx + \vec{r}_y dy$.

5. Le rayon de courbure normal dans la direction (dx, dy) est le rayon de courbure au point P de la section normale dans cette même direction.

6. En tout point de la surface, il existe deux directions, perpendiculaires l'une à l'autre pour lesquelles les rayons de courbure sont l'un minimum et l'autre maximum. Ces directions portent le nom de directions principales et les courbures correspondantes celle de courbures principales.

7. L'indicatrice de Dupin s'obtient en reportant dans le plan x, y et pour chaque direction issue du point P , la valeur du rayon de courbure selon cette direction [5]. Cette courbe est une conique et le point P peut être caractérisé par le type de conique de l'indicatrice ; ainsi si l'indicatrice est une

- ellipse : le point P est dit elliptique ;
- parabole : le point P est dit cylindrique ;
- hyperbole : le point P est dit hyperbolique (point selle).

La connaissance de l'indicatrice permet de déterminer les rayons de courbures et les directions principales, ainsi que le paraboloïde osculateur.

Comme cette courbe est directement calculable à partir des lignes de niveau, on voit tout l'intérêt qu'elle présente pour le but que nous nous sommes fixés.

Afin de déterminer cette indicatrice en chaque point, nous effectuerons plusieurs sections normales ; toutefois comme la normale à la surface au point considéré n'est pas connue a priori, nous procéderons dans une première phase à l'aide de sections verticales (ou perpendiculaires au plan de référence x, y) dont il est ensuite possible de déduire la normale et enfin l'indicatrice de Dupin à l'aide du théorème de Meusnier ; en nous référant à la figure 1, nous constatons que \vec{r}_x et \vec{r}_y engendrent le plan tangent, soit de plus :

- \vec{n} la normale ;
- π_n un plan normal à la surface par P ;
- π un plan passant par P et qui a même trace que π_n dans le plan tangent ;
- C_n la section normale déterminée par π_n et de rayon de courbure r_n en P ;
- C la courbe de section déterminée par π et de rayon de courbure r en P ;
- ω l'angle déterminé par π_n et π ; la formule de Meusnier nous donne alors : $r = r_n \cos \omega$ (fig. 2).

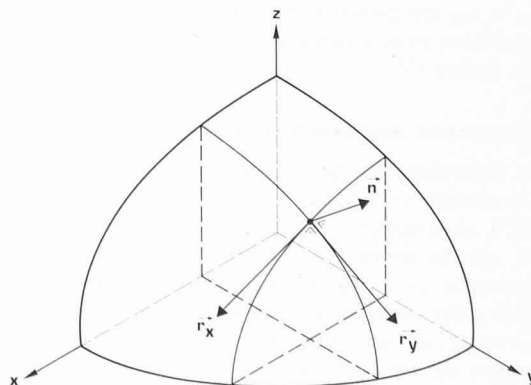


Fig. 1. — Définition des paramètres géométriques (\vec{r}_x, \vec{r}_y) .

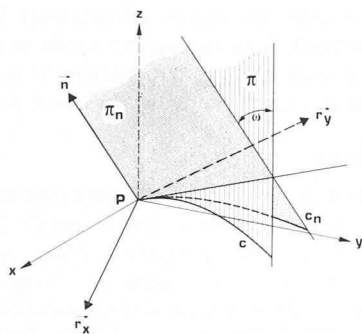


Fig. 2. — Définition des paramètres géométriques, angle ω .

Parvenus à ce stade de notre développement, il nous a paru utile d'offrir à l'utilisateur deux modes opératoires adaptables à la complexité de la surface analysée.

Lorsque la surface réelle présente un degré de lissage élevé et que l'information expérimentale résultant des franges de moiré est très dense, on peut obtenir une précision suffisante à l'aide d'un dépouillement simplifié, ce qui conduit à une économie substantielle du temps de calcul.

Selon cette méthode, nous effectuons au point considéré trois sections de la surface passant respectivement par les droites d'équations $y = 0$, $x = y$, $x = 0$. Procédant ensuite à un lissage des trois courbes obtenues, nous déterminons facilement les grandeurs p , q , r , s et t .

La réduction des équations 1 et 2 ci-dessous permet alors de déduire immédiatement les rayons de courbures R_1 et R_2 ainsi que les directions principales (dx_1, dy_1) , (dx_2, dy_2) .

$$1) \left(\frac{rt-s^2}{\Delta^2} \right) R^2 + \frac{1}{\Delta} \left[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2spq \right] R + \Delta^2 = 0$$

$$2) [s(1+p^2) - rpq] dx^2 + [t(1+p^2) - r(1+q^2)] dx dy + [tpq - s(1+q^2)] dy^2 = 0$$

avec en plus $dx^2 + dy^2 = 1$ une condition de normalisation.

Lorsqu'au contraire la surface analysée présente un aspect plus irrégulier, par exemple lors de phénomènes d'instabilité qui entraînent un bossellement de la surface, ou lorsque les franges de moiré sont peu denses, alors le recours au tracé de l'indicatrice de Dupin en chaque point examiné s'avère nécessaire. Cette façon de procéder nécessite, cela va sans dire, un temps de calcul considérablement plus long que la première méthode.

Selon cette méthode, on effectue tout d'abord un grand nombre de sections verticales au point considéré. Chaque courbe obtenue est ensuite lissée par la méthode précédemment exposée.

— On en déduit alors le plan tangent.

— Enfin, à l'aide de la relation de Meusnier appliquée à chacune des coupes, on obtient finalement l'indicatrice de Dupin.

Bien que l'indicatrice ainsi obtenue soit affectée d'erreurs dues aux manipulations numériques, son observation permet de reconnaître immédiatement la direction des courbures principales, leur grandeur et leur sens. Les figures 3 à 5 montrent deux exemples de calcul des courbures principales à partir de franges de moiré. Ces figures illustrent les différentes formes de l'indicatrice de Dupin et permettent une comparaison avec le rayon de courbure réel de la surface examinée.

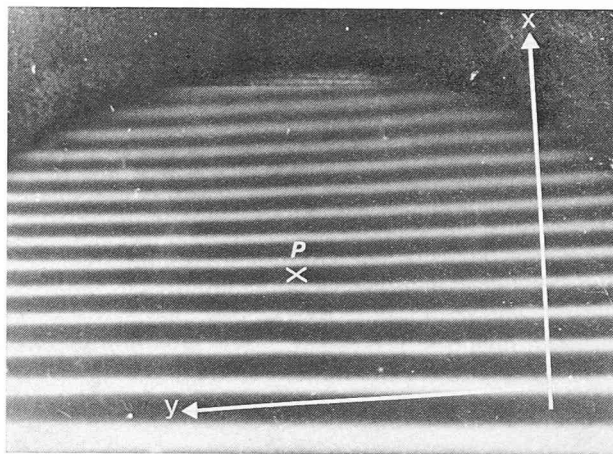


Fig. 3. — Cliché partiel d'un moiré d'ombre relatif à un cylindre parabolique. Equidistance des lignes de moiré : 0,21 cm.

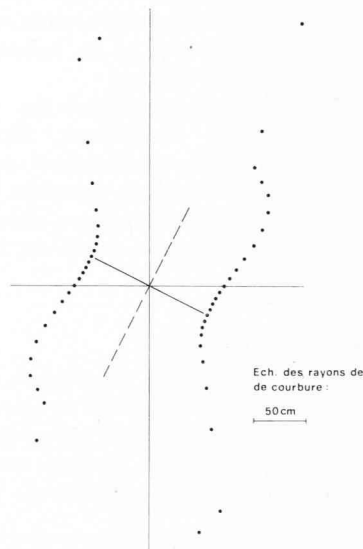


Fig. 4. — Indicatrice de Dupin au point P :
valeur réelle $r = 66,5$ cm ;
valeur calculée $r = 60,5$ cm.

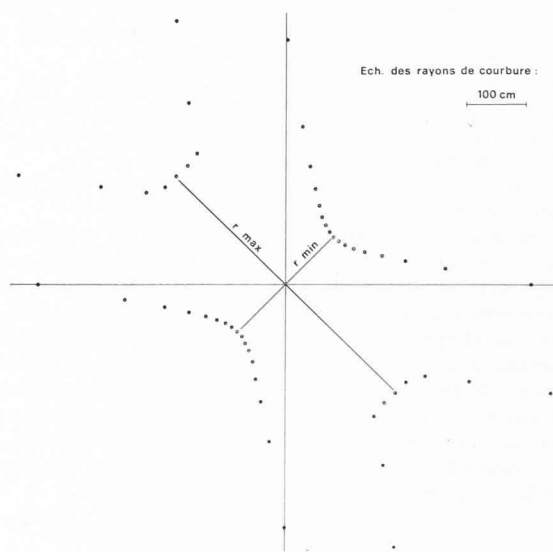


Fig. 3. — Indicatrice de Dupin relative à un point hyperbolique (point selle ; moiré simulé) :
valeurs réelles $r_{\max} = 250,5$ cm,
 $r_{\min} = 113,2$ cm ;
valeurs calculées $r_{\max} = 253,0$ cm,
 $r_{\min} = 112,4$ cm.

5. Détermination des lignes d'égale valeur des courbures principales

A l'aide du procédé de calcul présenté, on peut déterminer les lignes d'égale valeur de la courbure principale.

A cet effet, on commence par subdiviser la zone examinée au moyen d'un réseau dont les mailles sont adaptées en fonction de la précision exigée.

On calcule ensuite les valeurs de courbures principales en chaque sommet de quadrillage: par interpolation linéaire on détermine alors, le cas échéant, les points situés sur les lignes du réseau et qui possèdent une valeur intermédiaire prescrite. L'ensemble des points obtenus pour chaque valeur permet alors de tracer les lignes d'égale courbure.

6. Discussion des résultats

Bien que l'évaluation des erreurs soit encore en cours d'examen, nous pouvons d'ores et déjà constater une bonne concordance entre les valeurs des courbures obtenues à partir de la présente méthode et les valeurs mesurées directement sur les surfaces témoins.

La précision dépend essentiellement des paramètres expérimentaux (défaut de parallélisme, distorsion de cliché à la projection) et, dans le stade actuel, de l'équation personnelle de l'opérateur chargé de digitaliser les franges. Ce dernier point pourrait être d'ailleurs corrigé par la mise en œuvre d'un photomètre couplé au coordinateur.

7. Développements possibles

Dans le domaine de l'examen des plaques fléchies, la présente étude pourra être complétée en introduisant la restitution graphique des lignes d'égale valeur des moments principaux de même que les lignes de même orientation de ces moments. De plus, une adaptation de programme

permettra d'obtenir ces mêmes informations à partir des lignes d'égale pente à la surface déformée et la méthode proposée ici pourra dès lors être également engagée dans le dépouillement de clichés obtenus par moiré de projection.

8. Conclusions

La méthode de traitement numérique proposée ici permet d'obtenir de manière systématique et rapide la valeur et l'orientation des courbes principales d'une surface quelconque dont on connaît les lignes de niveau de manière expérimentale. Cette méthode sera particulièrement utile pour l'étude expérimentale des plaques fléchies et des coques; elle pourra être également appliquée à d'autres méthodes expérimentales comme le moiré de projection ou l'holographie.

Remerciements

Au terme du présent travail, les auteurs tiennent à exprimer leur vive reconnaissance au Fonds National Suisse de la recherche scientifique qui, en le finançant, en a permis l'exécution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. COLLET, J. MARASCO, L. PFLUG: *Le moiré d'ombre: une méthode expérimentale et ses possibilités*. Bulletin technique de la Suisse romande n° 9, 1974.
- [2] M. PEDRETTI, L. PFLUG: *Nouvelle méthode de moiré par l'analyse des plaques fléchies*. Bulletin technique de la Suisse romande n° 20, 1975.
- [3] K. GIRMANN: *Flächen-Tragwerk*. Springer-Verlag.
- [4] C. H. REINSCH: *Smoothing by Spline Function*. Numerische Mathematik n° 3, 1967 et n° 3, 1970.
- [5] E. KRUPPEN: *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*. Springer-Verlag.

Adresse des auteurs:

Michel Flück, ing. civil EPF
Léopold Pflug, professeur
Laboratoire d'analyse des contraintes, EPF
Avenue de Cour 33, 1007 Lausanne

Bibliographie

Le béton dans l'art contemporain, par Marcel Joray, aux éditions du Griffon, Neuchâtel, un ouvrage de 205 pages, relié toile, 23×30 cm, 200 photographies en noir-blanc et en couleur.

Cet ouvrage, d'une splendide présentation, tend à démontrer que béton et beauté ne sont pas inconciliables. C'est en abordant le thème de la sculpture moderne que l'auteur entreprend sa démonstration.

« C'est la première fois, croyons-nous, que l'on tente d'établir un bilan de l'apport du béton à l'art. »

La défense du matériau qu'est le béton, les techniques du béton au service de l'art, la sculpture, le béton dans la nature, sont autant de thèmes qui sont traités avec une parfaite connaissance du sujet. De plus, les photographies de très haute qualité illustrent des exemples de sculptures judicieusement choisies, telles que par exemple la façade de l'hôtel de ville de Maubeuge par Vasarely ou le Monument aux morts de la Brigade Neguev de Danny Karavan.

Cet ouvrage, né d'un vœu du conseil d'administration de la société Suisse des Ciments Portland S.A., marque d'une façon originale le centenaire de sa société.

A. G.

De la métrologie fondamentale à son application industrielle, de J.-C. Engrand. — Un vol. 16×24 cm, 325 pages, Editions A. Blanchard, Paris 1976. Prix: broché 120 fr. fr.

La métrologie est la science des mesures et, comme l'indique son titre, ce volume est orienté vers son application industrielle avant tout. Il s'agit d'une initiation à la

métrologie théorique, à l'exclusion des notions pratiques, plus familières aux personnels de l'industrie, et objet de nombreux traités.

Il sera peu parlé de la métrologie de précision dont l'utilisation est plutôt le fait des laboratoires, ainsi que des mesures à des fins comptables ou de la métrologie légale.

Afin d'éclairer, sans les alourdir, certaines parties du texte, des exercices d'application sont regroupés en fin d'ouvrage, avec renvois aux chapitres concernés et résolutions commentées.

Ce volume rendra service à tous ceux, étudiants, techniciens ou ingénieurs, qui peuvent être appelés à concevoir, maintenir ou utiliser des matériels de mesurage ou de régulation.

Ils retrouveront les sources et références indispensables à leurs réflexions et des conseils pratiques qui les guideront pour répondre aux impératifs de précision, sécurité, coût, durée, rentabilité et efficacité qu'ils doivent satisfaire.

Sommaire:

Première partie: *Le mesurage* (1. Introduction à la métrologie. — 2. La chaîne de mesurage. — 3. Qualités métrologiques des instruments et méthodes).

Deuxième partie: *Les résultats du mesurage* (1. Grandeurs et dimensions. — 2. L'analyse dimensionnelle. — 3. Systèmes d'unités. — 4. Ecriture des résultats de mesurage).

Troisième partie: *L'interprétation des résultats de mesurage* (1. Erreurs de mesurage, précision. — 2. Statistiques, probabilités et incertitudes. — 3. Interprétation des indications et des enregistrements. — Conclusion, exercices d'application, bibliographie).