

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 103 (1977)  
**Heft:** 11

**Artikel:** STELCA - Programme d'application pour l'étude de la stabilité élastique de cadres multiples rectangulaires plans  
**Autor:** Vinnakota, Sriramulu / Beer, Jean-Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-73240>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# STELCA - Programme d'application pour l'étude de la stabilité élastique de cadres multiples rectangulaires plans

Par SRIRAMULU VINNAKOTA et JEAN-PIERRE BEER, Lausanne

## 1. Introduction

La commission 5 de la Convention européenne de la construction métallique (CECM) a adopté dans ses Recommandations une formule simple pour le calcul de la charge de ruine des cadres métalliques, plans, multi-étagés [1], [2].<sup>1</sup> La formule en question contient l'expression de la charge critique élastique et de la charge limite obtenue par la théorie plastique du premier ordre. Cette approche de la charge de ruine d'un cadre est très directe, puisqu'elle ne nécessite pas une analyse incrémentale.

D'autre part, on assiste à une prolifération considérable de programmes de calcul de structures dans le domaine non linéaire avec charges dynamiques. Ces programmes couvrent en principe une gamme assez large de types de structures (par combinaison des types d'éléments uni- et multidimensionnels) et utilisent des modèles analytiques assez complexes. Les caractéristiques de ce type de programme ont malheureusement souvent pour conséquences un accès laborieux et des temps de calcul élevés, même avec de grands ordinateurs. De plus, il n'est même pas toujours certain qu'on obtienne la solution cherchée. Cet aspect décevant n'est à priori pas un défaut lorsque la taille de la structure et les sommes mises en jeu à cette occasion nécessitent une analyse soignée. Il arrive néanmoins souvent que l'on ait affaire à des structures beaucoup plus simples ; le recours à de gros programmes de calcul coûteux et complexes ne se justifie alors plus et l'on renonce fréquemment à effectuer une détermination de la charge ultime.

Pour mettre à la disposition des étudiants de l'EPFL et d'un plus grand nombre de praticiens les avantages du calcul limite, les auteurs ont adopté la démarche préconisée par le CECM en écrivant des programmes basés sur des modèles approchés dont la formulation est connue depuis longtemps, tout en renonçant sciemment à une gamme étendue de types de structures. Ce parti pris, il en est résulté un programme qui permet la génération et le contrôle automatique des données du problème, le calcul, l'impression, ainsi que toute autre opération annexe en une seule phase et sous le contrôle total de l'utilisateur.

Le temps de calcul et le temps total consacré à la résolution d'un problème donné est extrêmement réduit et sans commune mesure avec celui nécessité par l'utilisation de gros programmes.

## 2. Généralités

Le programme présenté ici est le premier module d'une bibliothèque de programmes destinés à faciliter la détermination de la charge ultime de cadres plans. Cette bibliothèque doit comporter deux parties distinctes :

— une partie contenant les programmes nécessaires au calcul de la charge ultime selon la méthode approchée de Merchant [3], [4],

<sup>1</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

— une partie contenant un ou des programmes de calcul non linéaire et destinée essentiellement à des comparaisons avec les résultats acquis par des méthodes approchées.

Le programme STELCA permet la détermination du premier terme (charge critique élastique) de la formule approchée de Merchant [3]. Le domaine d'application choisi est strictement limité aux cadres multiples rectangulaires plans réguliers, à colonnes et poutres continues, dans le domaine élastique, sans déformations initiales. Un exemple type est représenté à la figure 1.

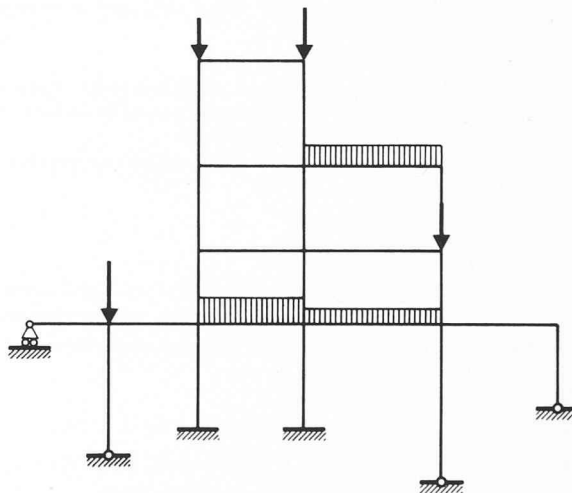


Fig. 1. — Cadre type.

La théorie utilisée pour la détermination de la charge critique est bien connue ; elle est exposée plus loin sommairement. Les simplifications admises dans les hypothèses conduisent à un programme assez compact et un temps de calcul suffisamment court pour le type d'application envisagé.

L'accent principal a été mis sur la notion de confort à l'utilisation, autant du point de vue structure interne que du point de vue aspect extérieur. La version actuelle utilise un terminal interactif pour les entrées/sorties et permet ainsi, soit simplement le calcul rapide de la charge critique d'un cadre, soit l'étude de l'influence d'un paramètre sur la charge critique. La communication avec le programme STELCA a été conçue de manière à prendre l'aspect d'un dialogue où l'utilisateur décide lui-même à chaque pas de l'opération à effectuer.

## 3. Rappels théoriques

La méthode utilisée pour la détermination de la charge critique est la méthode des déformations. Elle constitue une généralisation de la méthode utilisée par Timoshenko [5] pour les poutres continues. Les fonctions de stabilité utilisées trouvent une solution exacte dans notre cas, puisque les éléments sont des barres. Cette méthode ne permet

cependant pas une détermination directe de la charge critique de l'ensemble du cadre : un processus d'itération est nécessaire pour évaluer la plus petite combinaison de charges annulant le déterminant de la matrice de rigidité du cadre. Nous allons rappeler brièvement les principes de la méthode et du mode de calcul de la charge critique [4].

### 3.1 Hypothèses fondamentales

Les hypothèses utilisées sont les suivantes :

1. — Les barres sont prismatiques à inertie et module élastique constants sur toute leur longueur. Elles sont assimilées à une ligne.
2. — Les matériaux constituant les barres sont parfaitement et infiniment élastiques.
3. — Les forces extérieures conservent leur direction et leur point d'application initial pendant le flambage.
4. — Les forces extérieures sont telles que avant perte de stabilité, les barres ne subissent qu'une force axiale, sans flexion.
5. — Les déformations à l'état déplacé sont petites.
6. — Les déformations axiales des barres dues à l'effort normal sont nulles.
7. — Tous les nœuds d'un même étage subissent le même déplacement horizontal.
8. — Les nœuds sont parfaitement rigides.
9. — Le cas de flambage considéré est un flambage par flexion dans le plan du cadre. Le flambage spatial, la torsion et le voilement des parois sont empêchés.
10. — Le type de cadre envisagé est rectangulaire et régulier.

### 3.2 Méthode des déformations

#### a) Relations fondamentales

Considérons la barre idéalisée, déformée  $i-j$ , représentée à la figure 2. Nous pouvons écrire les efforts aux extrémités en fonction des déformations à ces mêmes extrémités.

Posons :

- $M_{ij}$  moment de flexion à l'extrémité  $i$  de la barre,
- $M_{ji}$  moment de flexion à l'extrémité  $j$  de la barre,
- $V_{ij}$  effort tranchant à l'extrémité  $i$  de la barre,
- $V_{ji}$  effort tranchant à l'extrémité  $j$  de la barre,
- $\psi_{ij}$  angle de rotation à l'extrémité  $i$  de la barre,
- $\psi_{ji}$  angle de rotation à l'extrémité  $j$  de la barre,
- $v_{ij}$  déplacement transversal à l'extrémité  $i$  de la barre,
- $v_{ji}$  déplacement transversal à l'extrémité  $j$  de la barre.

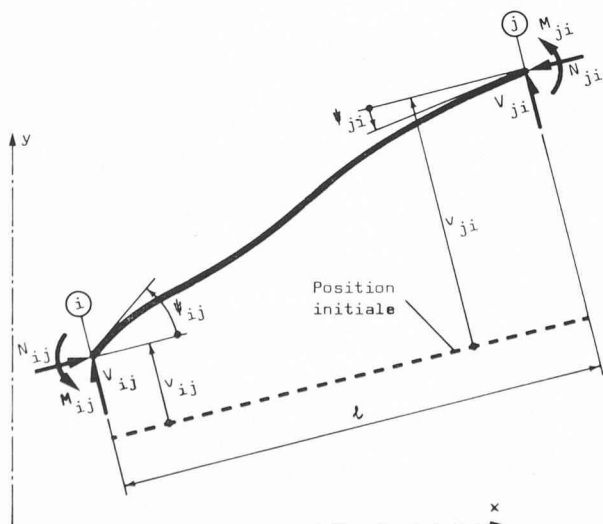


Fig. 2. — Déformée d'une barre du cadre.

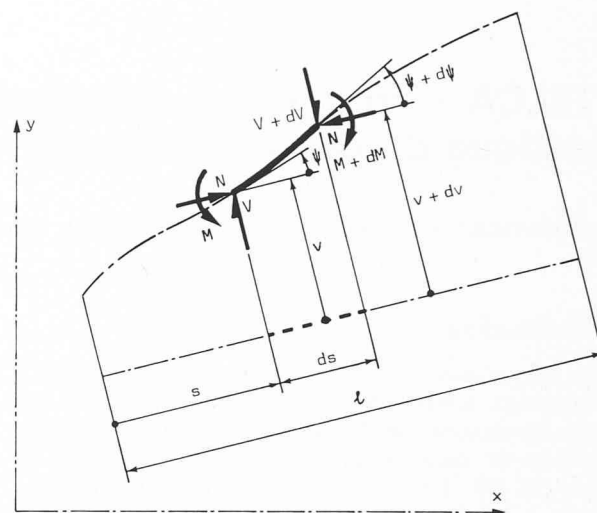


Fig. 3. — Equilibre d'un élément  $ds$  d'une barre.

En écrivant l'équilibre de l'élément  $ds$  de la barre, nous obtenons les relations cherchées qui peuvent s'écrire sous forme matricielle (fig. 3) :

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ji} \\ V_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ij} & D_{ij} & K_{ji} & C_{ji} & -D_{ji} \\ D_{ij} & G_{ij} & D_{ji} & -G_{ji} & \\ K_{ij} & C_{ij} & D_{ij} & K_{ji} & -D_{ji} \\ -D_{ij} & -G_{ij} & -D_{ji} & G_{ji} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{ij} \\ v_{ij} \\ \psi_{ji} \\ v_{ji} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où  $K, C, D, G$  sont les fonctions de stabilité définies par :

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \frac{EJ}{l} S_{ij}, & K_{ji} &= \frac{EJ}{l} S_{ji}, \\ C_{ij} &= \frac{(\varphi - \sin \varphi)}{(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)} = C_{ji}, \\ D_{ij} &= \frac{K_{ij}}{l} (1 + C_{ij}) = D_{ji}, \\ G_{ij} &= \left( \frac{2 D_{ij}}{l} - \frac{N}{l} \right) = G_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

avec :  $S_{ij} = \frac{\varphi (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{(2 - 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)} = S_{ji},$   
 $\varphi^2 = \frac{N_{ij} l^2}{EJ} = \frac{N_{ji} l^2}{EJ};$

$\varphi$  : constante de la barre  $i-j$  pour un état de charge donné.

Lorsque l'effort normal  $N$  tend à devenir nul, on a :

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= 4 \frac{EJ}{l} = K_{ji}, \\ C_{ij} &= \frac{1}{2} = C_{ji}, \\ D_{ij} &= 6 \frac{EJ}{l^2} = D_{ji}, \\ G_{ij} &= 12 \frac{EJ}{l^3} = G_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Pour déterminer les fonctions de stabilité d'une barre à liaisons d'extrémité particulières, il suffit d'écrire les relations d'efforts ou de déformation correspondantes. Par exemple, pour la figure 4, on a :

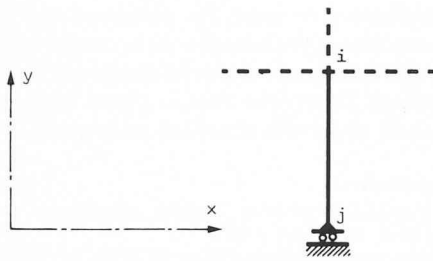


Fig. 4. — Cas particulier d'un appui libre de se déplacer selon l'axe  $x$ .

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ji} &= 0, \\ V_{ji} &= 0 = V_{ij}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

d'où on déduit facilement :

$$\left. \begin{aligned} K_{ij}' &= K_{ij} - \frac{D_{ij}^2}{G_{ij}}, \\ C_{ij}' &= \frac{1}{K_{ij}'} \left( K_{ij} C_{ij} - \frac{D_{ij}^2}{G_{ij}} \right), \\ G_{ij}' &= 0, \\ D_{ij}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

#### b) Constitution de la matrice de rigidité d'un cadre

En utilisant les hypothèses du paragraphe 3.1, le nombre de degrés de liberté d'un cadre est réduit à  $m = n + e$  où  $n$  est le nombre de nœuds libres et  $e$  le nombre d'étages de la structure. Il nous suffit donc d'écrire  $m$  équations d'équilibre : les  $n$  équations d'équilibre des moments aux  $n$  nœuds libres et les équations d'équilibre des efforts tranchants pour les  $e$  étages.

En utilisant la notation matricielle on obtient :

$$\left. \begin{aligned} R_{\psi\psi} \vec{D}_\psi + R_{\psi v} \vec{D}_v &= 0, \\ R_{v\psi} \vec{D}_\psi + R_{vv} \vec{D}_v &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\vec{D}_\psi$  : vecteur colonne des rotations  $\psi_i$  des  $n$  nœuds libres,

$\vec{D}_v$  : vecteur colonne des déplacements horizontaux  $v_{ei}$  des  $e$  étages,

$R_{\psi\psi}$  : matrice carrée  $n \times n$  formée par assemblage des  $K_{ij}$  et  $C_{ij}$  de chaque barre,

$R_{\psi v}$  : matrice  $n \times e$  formée par assemblage des  $D_{ij}$  de chaque barre,

$R_{vv}$  : matrice carrée  $e \times e$  formée par assemblage des  $G_{ij}$  de chaque barre,

$R_{v\psi}$  : transposée de  $R_{\psi v}$ .

En contractant les termes, on obtient :

$$\begin{bmatrix} R_{\psi\psi} & R_{\psi v} \\ R_{v\psi} & R_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{D}_\psi \\ \vec{D}_v \end{bmatrix} = 0, \quad (7)$$

et :

$$R \vec{D} = 0. \quad (8)$$

Ce système d'équations possède deux solutions possibles :

$\vec{D} = 0$  : ce qui correspond à la forme d'équilibre fondamentale du cadre (cadre stable),

dét.( $R$ ) = 0 : la matrice est singulière et le système (8) admet  $\vec{D} \neq 0$  (cadre instable).

L'équation de stabilité s'écrit :

$$\det.(R) = \Delta = 0. \quad (9)$$

#### c) Evaluation de la charge critique

Nous avons établi ci-dessus la relation permettant de déterminer les efforts critiques du cadre (9) ; il reste donc à établir une relation entre les charges du cadre et les efforts intérieurs des barres lorsque le cadre est stable (non déformé).

Les hypothèses n'autorisent que des charges verticales concentrées aux nœuds. La détermination des efforts normaux se réduit alors à sa plus simple expression.

Pour tenir compte de la présence de charges invariables (poids propre), les charges à chaque nœud sont formées des deux termes  $P_c$  (charge invariable) et  $P_v$  (surcharge variable). La charge totale  $P_t$  à un nœud  $i$  s'écrit :

$$P_{ti} = P_{ci} + \lambda P_{vi}. \quad (10)$$

Nous pouvons donc exprimer la matrice  $R$  en fonction de  $\lambda$  et la condition de stabilité devient :

$$\Delta = f(\lambda) = 0. \quad (11)$$

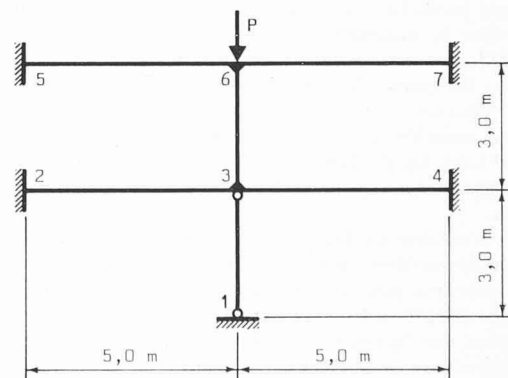
La méthode consiste donc à déterminer par itérations successives la plus petite valeur de  $\lambda$  ( $\lambda_{cr}$ ) annulant le déterminant  $\Delta$ . L'état de charge critique est alors défini en écrivant à chaque nœud  $i$  :

$$P_{cri} = P_{ci} + \lambda_{cr} P_{vi}. \quad (12)$$

#### 3.3 Quelques remarques

Le modèle utilisé est essentiellement caractérisé par l'absence de moments primaires et un matériau linéaire. La seule non linéarité est géométrique dans le domaine des petites déformations. La charge ultime déterminée à l'aide de ce modèle est donc une charge critique de bifurcation pure ; cette charge représente une borne supérieure pour la charge limite d'un cadre rectangulaire dans le domaine élastique.

L'instabilité telle qu'elle est définie ici pour un cadre, représente soit un déplacement d'étage, soit une rotation de nœud (en l'absence de moments primaires) ; il n'est pas



Barres 2-3, 3-4, 5-6, 6-7 et 3-6 :  $I = 10\,000 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ .

Barre 1-3 :  $I = 2000 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ .

$P_{cr \text{ cadre}} = 5215 \text{ t}$ .

$P_{cr \text{ 3-1}} = 461 \text{ t}$ .

Fig. 5. — Exemple d'instabilité locale d'une barre.

tenu compte des déplacements d'autres points de la structure. Il existe donc certains cas particuliers d'instabilité locale sans que l'ensemble du cadre ait perdu sa stabilité (au sens défini ci-dessus). La figure 5 représente un de ces cas particuliers.

Si l'on compare ce modèle relativement simple à d'autres plus récents et plus complets, il faut reconnaître que les deux limitations importantes admises ici :

- matériau parfaitement et infiniment élastique,
- pas de moments de flexion primaires,

sont des limitations de taille. En admettant que l'on peut obtenir une bonne approximation de la charge ultime d'un cadre plan à l'aide d'un modèle de bifurcation et d'un modèle rigide-plastique, l'approche choisie prend alors tout son sens et le choix d'une telle simplicité est justifié.

(à suivre)

Adresse des auteurs :

Sriramulu Vinnakota, Dr ès sc., adjoint scientifique  
Jean-Pierre Beer, ingénieur EPFL  
Institut de la construction métallique (ICOM) de l'EPFL  
Chemin des Délices 9, 1006 Lausanne

## Bibliographie

**Chimie générale**, de M. Garric. — Un vol. 20×24,5 cm de 400 pages, 2<sup>e</sup> édition 1976, Dunod, Paris. Prix broché : 79 fr. fr.

Issu du « Cours de chimie » en deux volumes du même auteur, cet ouvrage est conçu pour permettre à l'étudiant en chimie d'acquérir une connaissance approfondie de la chimie moderne. L'élève en classe préparatoire aux grandes écoles scientifiques et l'étudiant du premier cycle universitaire y trouveront un cours englobant et étendant leurs programmes.

C'est un ouvrage de niveau élevé, très moderne, précis et suffisamment documenté pour permettre une étude sérieuse de la chimie moderne. De plus, il trouvera une large utilisation comme source de documentation particulièrement à jour et très étendue.

Plusieurs dizaines d'exercices et de problèmes résolus illustrent et complètent l'ouvrage tandis que de nombreuses tables numériques ajoutent à sa valeur documentaire.

On peut recommander cet excellent ouvrage aux ingénieurs et aux physiciens désirant se documenter, en dehors de leur spécialité, sur les bases fondamentales de la chimie générale.

### Sommaire :

1. L'atome. Structure atomique. La classification périodique des éléments. — 2. L'édifice chimique. Edifices métalliques, ioniques, covalents. Composés de coordination. Associations moléculaires. — 3. La réaction chimique. — 4. Exercices de statique chimique. — 5. Cinétique chimique. — 6. Applications de la statique et de la cinétique chimique à quelques systèmes réactionnels. — 7. Exercices de cinétique chimique.

**Strahlenschutz durch Abschirmung. Tabellen zur Berechnung der Abschirmung von Gamma-Strahlung**, de P. F. Sauermann. — Un vol. 13×20 cm, 183 pages, Edition Karl Thiemig, Munich 1976. Prix cartonné : 19.80 DM.

Le but principal de la protection contre les radiations, c'est-à-dire le maintien de la dose personnelle maximale admissible, ne peut souvent être atteint qu'au moyen d'un bouclier. Le calcul de telles protections est en général très long à effectuer.

Grâce toutefois aux tables contenues dans ce volume, presque tous les problèmes de protection rencontrés dans le maniement des rayons  $\gamma$  peuvent être résolus en quelques minutes.

On y trouvera les facteurs d'atténuation en fonction de l'énergie des rayons  $\gamma$  pour tous les matériaux de protection usuels ainsi que pour un grand nombre de sortes de béton, d'alliages plomb-antimoine et de verres de protection.

En plus, les facteurs d'atténuation de divers matériaux de construction sont également donnés.

L'usage des tables est indiqué par un grand nombre d'exemples rencontrés dans la pratique de la protection contre les radiations.

### Sommaire :

1. Introduction. — 2. Grandeurs et unités de la dosimétrie des radiations ionisantes. — 3. Exigences légales concernant le dimensionnement des boucliers. — 4. Protection contre les rayons  $\gamma$ . — 5. Littérature. — 6. Figures. — 7. Tables.

## Congrès

### LIGNUM : Assemblée générale 1977

L'assemblée générale ordinaire de LIGNUM, Union suisse en faveur du bois, aura lieu le mardi 7 juin 1977 à 11 h., à la cabane Nüegg, dans le val Diemtig (environs de Spiez).

Documentation et inscriptions : Office romand de LIGNUM, Caroline 11 bis, 1003 Lausanne, tél. (021) 23 79 21.

## Postes à pourvoir

Poste	Référence	Lieu de travail	Renseignements
<i>Agence spatiale européenne</i>			
Ingénieur mécanicien au Département « Développement et Technologie »	21/77	Noordwijk (Pays-Bas)	1
Ingénieur en chef chargé du détecteur de photons de la chambre à objets faibles, pour le projet Télescope spatial	24/77	Noordwijk (Pays-Bas)	1
Ingénieur spécialiste de l'optique	25/77	Noordwijk (Pays-Bas)	1
Ingénieur électronicien « Systèmes » pour le projet Télescope spatial	22/77	Noordwijk (Pays-Bas)	1
Ingénieur responsable de l'assemblage, de l'intégration, des essais et des interfaces pour le réseau solaire du projet Télescope spatial	23/77	Noordwijk (Pays-Bas)	1
Ingénieur « Structures » au Département « Développement et Technologie »	20/77	Noordwijk (Pays-Bas)	1
Chef de la Section Trésorerie		Paris (France)	2

<sup>1</sup> Chef du personnel de l'ESTEC, Domeinweg, Noordwijk (Pays-Bas).

<sup>2</sup> Chef du Département du Personnel, ASE/ESA, 8-10, rue Mario Nikis, 75015, Paris (France).

L'UNESCO met au concours un poste d'architecte, spécialiste des installations éducatives, à son Bureau régional pour l'éducation en Afrique, à Dakar (Sénégal).

Le titulaire devra parler couramment l'anglais ou le français, et avoir bonne connaissance pratique de l'autre langue.

Engagement pour une période initiale de deux ans.

Adresser les candidatures au Bureau du personnel de l'Unesco, 7, place de Fontenoy, 75700 Paris (France) avec un curriculum vitae rédigé en anglais ou en français.

Rédacteur : J.-P. WEIBEL, ingénieur

### DOCUMENTATION GÉNÉRALE

Voir pages 8 et 9 des annonces.

### DOCUMENTATION DU BATIMENT

Voir page 2 des annonces