

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 102 (1976)
Heft: 17

Artikel: Analyse des structures plissées inhomogènes anisotropes
Autor: Pflug, Léopold / Merazzi, Silvio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-72949>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Analyse des structures plissées inhomogènes anisotropes

par LÉOPOLD PFLUG et SILVIO MERAZZI, Lausanne

1. Introduction

Les structures plissées, constituées de plaques juxtaposées mais situées dans des plans différents, présentent un grand intérêt aussi bien quant à leurs propriétés de résistance qu'à leurs particularités constructives. En effet, la disposition spatiale des plaques qui les composent confère à l'ensemble une rigidité de forme propre aux coques. Constructivement, ce type de structure est caractérisé par la mise en œuvre d'éléments plans et rectilignes, de sorte que l'élaboration et l'assemblage de ces éléments ainsi que leur jonction à des composants voisins peuvent s'en trouver facilités.

L'objectif du présent travail est de proposer une méthode de calcul de ce type de structure. Dans chacun des pans qui constituent la structure plissée, l'influence de l'anisotropie du matériau peut être introduite. Cette anisotropie apparaîtra soit de manière globale sur un pan quelconque ou affectera de manière isolée chacun des feuillets dont l'empilement forme le plan lui-même.

L'introduction de l'anisotropie par feuillet nous paraît constituer une innovation appréciable car elle permet de disposer au mieux le matériau en fonction de la nature et du genre de sollicitation.

2. Etat du problème

Au cours de la dernière décennie, la mise en œuvre de nombreux ordinateurs de grande capacité a rendu possible puis favorisé l'analyse des structures à l'aide de méthodes numériques dont les plus performantes sont actuellement celle des éléments finis et celle des différences finies.

Chaque fois que le type de structure le permet, des méthodes spécifiques ont été développées; dans cette optique les structures plissées ont fait l'objet de bon nombre d'analyses recourant aux éléments finis notamment par Scordelis [1]¹ et Zienkiewicz et Cheung [2]. La technique de résolution basée sur les différences finies [3], [4], présente quelques inconvénients pour ce type d'étude; elle est en effet pénalisée par la difficulté que représente le problème de continuité des pentes aboutissant à l'arête commune de deux plaques successives, aussi la méthode proposée ici utilise-t-elle la technique des éléments finis, basée sur un modèle semi-analytique.

3. Déroulement de l'étude

Nous nous attacherons tout d'abord à établir la loi constitutive d'une couche, c'est-à-dire la relation qui permet de passer des contraintes aux allongements spécifiques et vice versa. On adaptera cette transformation au cas où les directions principales d'anisotropie ne coïncident pas avec les axes de référence.

Dans une deuxième étape, nous développerons les relations cinématiques entre le déplacement d'un point du feuillet moyen d'une plaque et le déplacement correspondant d'un point quelconque situé sur une normale à ce feuillet.

On cherchera ensuite l'expression de l'énergie interne emmagasinée dans la structure lors d'un déplacement arbi-

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

traire et l'énergie correspondante libérée par les charges extérieures. L'énergie interne s'obtient par combinaison des deux relations précédentes au niveau de chaque feuillet. La sommation sur l'ensemble des feuillets d'une plaque puis sur l'ensemble des plaques fournit l'énergie interne totale.

La phase suivante consiste à chercher une expression du déplacement susceptible de conduire à un nombre relativement faible d'inconnues. Il devient dès lors nécessaire de porter son choix sur un système mixte ou semi-analytique, dans lequel les expressions du déplacement sont discrétisées selon l'une des coordonnées seulement. La minimisation du potentiel élastique par rapport aux variables nous fournit les équations d'un élément.

Enfin, le champ des déplacements de la structure entière est obtenu par l'assemblage des éléments et par la résolution du système d'équations.

4. Loi constitutive

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations géométriques précisées dans la figure 1.

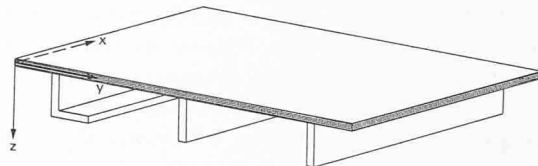


Fig. 1. — Type de structure examinée.

Les coordonnées d'un point quelconque sont repérées à l'aide d'un système global lié à la directrice polygonale de la structure.

La relation fondamentale d'une plaque orthotrope (fig. 2) peut se mettre sous la forme [5]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

ou encore $\{\varepsilon'\} = [C] \cdot \{\sigma'\}$

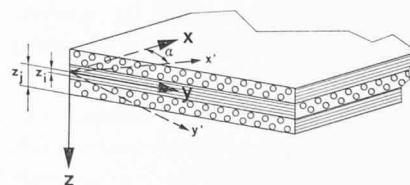


Fig. 2. — Définition des coordonnées locales et des directions d'orthotropie.

La matrice de transformation contrainte-déformation contient 5 constantes dont 4 indépendantes, car ces constantes doivent satisfaire à la relation $\nu_{xy} E_{yy} = \nu_{yx} E_{xx}$ en vertu du théorème de réciprocité.

A partir de l'expression (3.1) on pourrait obtenir les contraintes au moyen de la relation

$$\{\sigma'\} = [E] \cdot \{\varepsilon'\} \quad (3.2)$$

avec

$$[E] = [C]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta \cdot E_x & \beta \cdot \nu_{yx} \cdot E_x & 0 \\ \beta \cdot \nu_{xy} \cdot E_y & \beta \cdot E_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}; \quad \beta = \frac{1}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}}$$

Lorsque les axes d'orthotropie ne coïncident pas avec les axes de référence de la plaque (fig. 2), on obtiendra la relation contrainte-déformation selon ce dernier référentiel au moyen de la transformation [6].

$$\{\sigma\} = [T]_1^T \cdot [E] \cdot [T]_1 \cdot \varepsilon \quad (3.3)$$

5. Développement du modèle mathématique

Le développement de l'élément (fig. 3) est une procédure standard et on se restreindra donc à n'en montrer que les aspects particuliers. Les fonctions de déplacement

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_x(x, y) - z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) &= u_y(x, y) - z \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

sont substituées dans les expressions pour les allongements ε_x , ε_y et ε_{xy} [7]. On arrive donc à l'expression du potentiel élastique

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \int_0^1 \left\{ \{\varepsilon\}^T \cdot \{\kappa\}^T \right\} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \cdot b \cdot d\eta \cdot dx - \int_{Vol} \{p\}_V^T \cdot \{u\} \cdot \{d\} \cdot Vol - \int_S \{p\}_S^T \cdot \{u\} \cdot dS \quad (4.2)$$

où $\{\varepsilon\}$ est le vecteur des allongements dans le plan,

$\{\kappa\}$ est le vecteur des courbures

$\{u\}$ est le vecteur des déplacements

$\{p\}_V$ est le vecteur des forces de volume

$\{p\}_S$ est le vecteur des forces de surface

et

$$[Q] = \sum_k \begin{bmatrix} (z_j - z_i) \cdot [E] & \frac{1}{2} \cdot (z_j^2 - z_i^2) \cdot [E] \\ \frac{1}{2} \cdot (z_j^2 - z_i^2) \cdot [E] & \frac{1}{3} \cdot (z_j^3 - z_i^3) \cdot [E] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

qui représente la loi constitutive intégrée par rapport à z .

Les fonctions u_x , u_y et u_z sont maintenant approchées par

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \{u\}_x^T \cdot \{\psi\} \cdot \cos \lambda x \\ u_y &= \{u\}_y^T \cdot \{\psi\} \cdot \sin \lambda x \\ u_z &= \{u\}_z^T \cdot \{\varphi\} \cdot \sin \lambda x \end{aligned} \right\} \quad \lambda = \frac{\eta \cdot \pi}{l} \quad (4.4)$$

avec

$$\{\psi\}^T = \{1 - \eta, \eta\}$$

$$\{\varphi\}^T = \{1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \eta - 2\eta^2 + \eta^3, -\eta^2 + \eta^3, 3\eta^2 - 2\eta^3\}$$

Le vecteur des déplacements peut alors se mettre sous la forme

$$\{u\} = [H] \cdot \{d\} \quad (4.5)$$

où

$$\{d\}^T = \{u_x^1, u_x^2, u_y^1, u_y^2, u_z^1, u_z^2, u_z^3, u_z^4\} \quad (4.6)$$

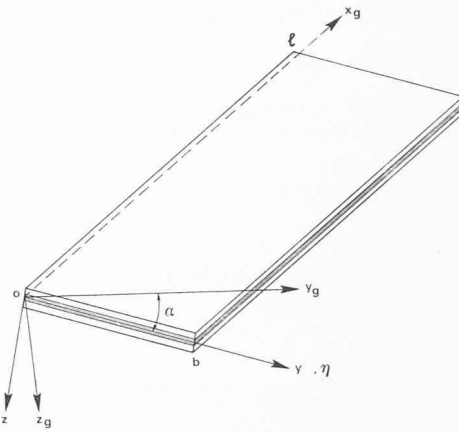


Fig. 3. — Définition du référentiel local et du référentiel global.

et similairement pour les allongements

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = [R] \cdot \{d\} \quad (4.7)$$

Dans le but de faciliter l'intégration numérique, on sépare $[R]$ en un terme où figure $\sin \lambda x$ et un terme en $\cos \lambda x$.

$$[R] = [R]_S + [R]_C \quad (4.8)$$

L'intégration de (4.2) se fait maintenant avec (4.7), (4.8) et (4.3) et l'on obtient, en tenant compte de l'orthogonalité des intégrales par rapport à x

$$\pi = \frac{bl}{4} \cdot \{d\}^T \cdot \left\{ \int_0^1 [R]_S^T \cdot [Q] \cdot [R]_S \cdot d\eta + \int_0^1 [R]_C^T \cdot [Q] \cdot [R]_C \cdot d\eta \right\} \cdot \{d\} - \int_0^l \int_0^1 \{p\}_S^T \cdot [H] \cdot \{d\} \cdot b \cdot d\eta \cdot dx \quad (4.9)$$

Par mesure de simplification les forces de volume P_v ont été omises, et P_s est développé en séries limitées [8]

$$\{p\}_S = \frac{4}{\pi} \cdot \begin{Bmatrix} p_x \cdot \cos \lambda x \cdot \cos \lambda c \cdot \cos \lambda d \\ p_y \cdot \sin \lambda x \cdot \sin \lambda c \cdot \sin \lambda d \\ p_z \cdot \sin \lambda x \cdot \sin \lambda c \cdot \sin \lambda d \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

L'intégration par rapport à η se fait numériquement avec une méthode de Simpson améliorée.

La dérivation de (4.9) par rapport à $\{d\}$ nous fournit le système d'équations d'un élément. On renonce ici à décrire les procédés d'assemblage des éléments et de résolution du système d'équations ainsi que les transformations dans un système global :

$$\{d\}_g = [T] \cdot \{d\}$$

Rappelons toutefois que les contraintes aux bords d'un élément pour la couche κ s'obtiennent par

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_i^k &= [E]_k \cdot \{\{\varepsilon\} + z_i \cdot \{\kappa\}\} \\ \{\sigma\}_j^k &= [E]_k \cdot \{\{\varepsilon\} + z_j \cdot \{\kappa\}\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les indices i et j se rapportent aux fibres supérieures et inférieures de la couche (fig. 2).

6. Etude des vibrations

Dans cette étude, nous admettons que la structure est exempte de précontrainte et nous négligerons de plus l'effet de l'amortissement.

Les déplacements demeurent en phase pendant la durée de l'observation de sorte que les déplacements peuvent s'exprimer à l'aide de

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

ou ω représente la fréquence circulaire.

La contribution à l'énergie totale du système prendra alors la forme

$$\pi_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \rho(x, y, z) \frac{\partial \{u\}^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial \{u\}}{\partial t} \cdot d\text{Vol} \quad (5.2)$$

où ρ représente la masse spécifique au point x, y, z . Par substitution des équations (5.1) dans (5.2) et avec (4.5) on obtient :

$$\pi_{\text{cin}} = -\frac{\omega^2}{2} \cdot e^{i\omega t} \cdot \{d\}^T \cdot \left\{ \int_{\text{Vol}} \rho(x, y, z) \cdot [H]^T \cdot [H] \cdot d\text{Vol} \right\} \cdot \{d\} \cdot e^{i\omega t} \quad (5.3)$$

ce qui, compte tenu de (4.9) donne l'énergie totale :

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot e^{i\omega t} \cdot \{d\}^T \cdot \left\{ \int_S [R]^T \cdot [Q] \cdot [R] \cdot dS \right\} \cdot \{d\} \cdot e^{i\omega t} + \Pi_{\text{cin}} \quad (5.4)$$

ou encore

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot e^{i\omega t} \cdot \{d\}^T \cdot [K] \cdot \{d\} \cdot e^{i\omega t} - \frac{\omega^2}{2} \cdot e^{i\omega t} \cdot \{d\}^T \cdot [M] \cdot \{d\} \cdot e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

avec $[K]$ = matrice de rigidité

$[M]$ = matrice des masses

$$M = \int_{\text{Vol}} \rho(x, y, z) \cdot [H]^T \cdot [H] \cdot d\text{Vol} \quad (5.6)$$

L'intégrale (5.6) représente la somme des masses spécifiques sur l'ensemble des couches orthotropes.

L'exécution pratique tient compte de la transformation (4.11) pour les éléments dont le référentiel ne coïncide pas avec le système global ; en dérivant par rapport aux variables on obtient :

$$[K] \cdot \{d\} = \omega^2 \cdot [H] \cdot \{d\} \quad (5.7)$$

Le calcul de la fréquence propre et des vecteurs d correspondants s'effectue pour chaque terme de Fourier. Ces valeurs propres sont calculées à l'aide d'une méthode d'itération développée à l'EPFL [9].

7. Application numérique et essais sur modèles

Le modèle d'analyse proposé ici a donné lieu à un programme de calcul par éléments finis [10]. Grâce à la mise en œuvre d'une technique de gestion par mémoire dynamique, l'occupation de la mémoire centrale est fort restreinte, ce qui permet d'abaisser sensiblement le coût de l'analyse de telles structures. Afin de s'assurer du comportement de la méthode proposée, nous avons confronté les résultats du calcul à l'ordinateur avec un essai sur modèle : ce dernier se compose d'un panneau mince anisotrope, constitué par des feuillets de graphite-epoxy et renforcé par des raidisseurs isotropes traités discrètement. Les détails de la disposition géométrique de cette structure sont précisés à la figure 4 et ses caractéristiques font l'objet du tableau 1.

Cette structure est divisée en 48 éléments ce qui signifie 196 variables.

La mesure des déformations s'effectue à l'aide de jauges de contraintes dont les séquences de lecture et de dépouillement sont programmables et livrent directement les compo-

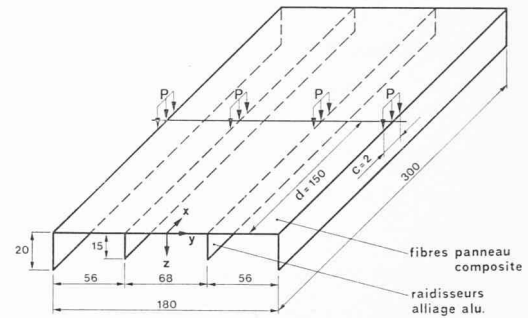


Fig. 4. — Disposition géométrique de l'essai.

TABLEAU I

feuillets	$t = 1,5 \text{ mm}$ $E_x = 13\,000 \text{ kg/mm}^2$ $E_y = 860 \text{ kg/mm}^2$ $G = 500 \text{ kg/mm}^2$ $\nu_{xy} = 0,29 \quad \nu_{yx} = 0,019$ $\rho = 1,75 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$	Panneau supérieur
Aluminium AlMg	$t = 1,0 \text{ mm}$ $E_x = E_y = 6500 \text{ kg/mm}^2$ $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0,3$ $\rho = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$	Raidisseurs

santes du tenseur des tensions selon des directions prescrites.

La comparaison entre les valeurs obtenues à l'aide de la méthode proposée et celles résultant de l'analyse expérimentale nous paraît satisfaisante, en particulier si l'on tient compte du fait que les charges appliquées au modèle sont ponctuelles ce qui conduit à une précision peu élevée si l'on n'augmente pas de manière sensible le nombre des termes de Fourier pris en compte.

Ainsi, dans l'exemple proposé, les exigences relatives à la convergence conduisent à prendre 71 termes au voisinage de la charge concentrée alors qu'une charge répartie ne demandait que 20 termes pour assurer la même précision au même point.

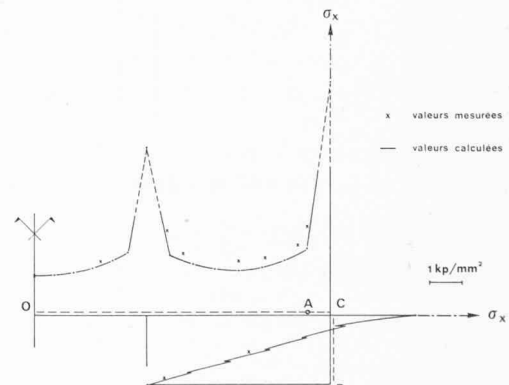


Fig. 5. — Distribution de la contrainte σ_x sur la fibre extrême le long de la droite OCB située au milieu de la portée.

La fig. 5 montre la répartition des contraintes σ_x le long de la couche extérieure (pointillée) pour $x = \frac{l}{z}$. La distribution des contraintes à l'intérieur de la plaque laminée est reportée dans la fig. 6.

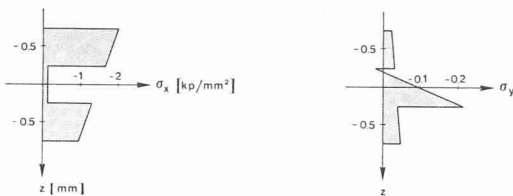


Fig. 6. — Distribution des contraintes calculées σ_x et σ_y dans l'épaisseur du panneau composite au point A.

Enfin, le résultat de l'étude des vibrations est visible sur la fig. 7, qui montre le deuxième mode symétrique transversal.

8. Conclusion

La méthode des déplacements appliquée à l'étude des structures plissées anisotropes permet de réaliser un modèle de calcul qui évite de trop longues opérations arithmétiques. Cet objectif est atteint en ce cas en choisissant un modèle semi-analytique.

Dans le stade actuel, cette méthode permet d'aborder les problèmes statiques impliquant de faibles déplacements et les problèmes de vibrations linéaires.

L'étude du comportement non linéaire sous l'influence des forces de compression est en cours d'exécution et devrait conduire à une meilleure connaissance de l'instabilité non linéaire.

Enfin, la réponse visco-élastique de la plupart des matériaux composites nous conduira à introduire ce type de réponse dans le modèle mathématique proposé.

9. Remerciements

Au terme du présent travail, les auteurs tiennent à exprimer leur vive reconnaissance au Fonds national suisse de la recherche scientifique qui, en le finançant, en a permis l'exécution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. C. SCORDELIS : *Analysis of Continuous Box Girder Bridges*. Univ. of California, Berkeley 1967.
- [2] O. C. ZIENKIEWICZ : *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill 1971.
- [3] B. O. ALMROTH et al : *User's Manual for STAGS*. Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Palo Alto 1973.
- [4] D. BUSHNELL : *Analysis of Buckling and Vibration of Ring-Stiffened Segmented Shells of Revolution*. Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 6, 1970, p. 157-181.
- [5] V. V. NOVOZILHOV : *Theory of Elasticity*. Pergamon Press Oxford, 1961.
- [6] ASHTON, HALPIN, PETIT : *A Primer on Composite Materials*. Technomic Publishing, Stamford, Conn., 1969.
- [7] A. S. WOLMIR : *Biegsame Platten und Schalen*. VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin 1962.
- [8] K. GIRKMANN : *Flächentragwerke*. Springer Verlag, Wien, 1954.
- [9] R. GRUBER : *Hymnia Band Matrix Package for Solving Eigenvalue Problems*. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1974.
- [10] S. MERAZZI : *Prisan. Manuel d'utilisateur*. Laboratoire de photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1974.

Adresse des auteurs :

Léopold Pflug, professeur
 Silvio Merazzi, assistant EPFL
 13, av. Mon-Loisir
 1006 Lausanne

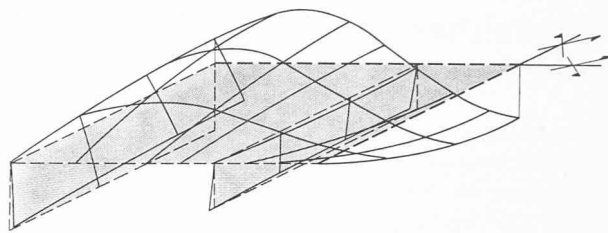


Fig. 7. — Aspect de la déformation d'un quart de plaque, lors d'une vibration de 144 Hz.

APPENDICE

Matrice H

$\psi_1 \cdot \cos \lambda x$	$\psi_2 \cdot \cos \lambda x$						
		$\psi_1 \cdot \sin \lambda x$	$\psi_2 \cdot \sin \lambda x$				
				$\phi_1 \cdot \sin \lambda x$	$\phi_2 \cdot b \cdot \sin \lambda x$	$\phi_3 \cdot \sin \lambda x$	$\phi_4 \cdot b \cdot \sin \lambda x$

Matrice R_s

$-\lambda \cdot \psi_1$		$-\lambda \cdot \psi_2$					
	$-1/b$		$1/b$				
				$\lambda^2 \cdot \phi_1$	$\lambda^2 \cdot b \cdot \phi_2$	$\lambda^2 \cdot \phi_3$	$\lambda^2 \cdot b \cdot \phi_4$
				$-1/b^2 \cdot \phi_1$	$-1/b \cdot \phi_2$	$-1/b^2 \cdot \phi_3$	$-1/b \cdot \phi_4$

()' = $\frac{\partial}{\partial y}$

Matrice R_c

$-\frac{1}{b}$	$\lambda \cdot \psi_1$	$\frac{1}{b}$	$\lambda \cdot \psi_2$				
				$\frac{2}{b} \cdot \lambda \cdot \phi_1$	$2 \cdot \lambda \cdot \phi_2$	$\frac{2}{b} \cdot \lambda \cdot \phi_3$	$2 \cdot \lambda \cdot \phi_4$

()' = $\frac{\partial}{\partial x}$

Matrice T_1

$$\begin{bmatrix} \cos^2 a & \sin^2 a & 2 \cdot \sin a \cdot \cos a \\ \sin^2 a & \cos^2 a & -2 \cdot \sin a \cdot \cos a \\ -\sin a \cdot \cos a & \sin a \cdot \cos a & (-\sin^2 a + \cos^2 a) \end{bmatrix}$$

Matrice T

1							
	$\cos a$	$-\sin a$					
	$\sin a$	$\cos a$					
			1				
				1			
					$\cos a$	$-\sin a$	
					$\sin a$	$\cos a$	
							1