Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 102 (1976)

Heft: 2

Artikel: Etude d'une famille d'éléments spatiaux de barre courbe de section rectangulaire variable

Autor: Derron, Maurice-H. / Jirousék, Jaroslav

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-72903

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Communication de la chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPFL, professeur M.-H. Derron

Etude d'une famille d'éléments spatiaux de barre courbe de section rectangulaire variable

par MAURICE-H. DERRON et JAROSLAV JIROUŠEK, Lausanne (suite et fin) [1]

II. Considérations statiques

II.1 *Généralités*

Considérons l'élément courbe de la figure 5a repéré dans un système global de coordonnées cartésiennes x, y et z. En un nœud quelconque L de l'élément, on admettra six degrés de liberté :

les déplacements u, v, w selon les axes x, y, z,

les rotations α, β, γ autour des axes x, y, z.

Pour simplifier l'écriture, on définira le sous-vecteur des déplacements nodaux généralisés (ou simplement déplacements nodaux)

$$\delta_L = \begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \\ \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \end{Bmatrix}, \tag{20}$$

et on attribuera le symbole s_L au sous-vecteur des forces nodales équivalentes associé à δ_L. Par ailleurs, on désignera respectivement par $\{\Delta\}$ et $\{S\}$ le vecteur des déplacements nodaux et le vecteur des forces nodales constitués respectivement par tous les sous-vecteurs δ_L et par tous les sous-vecteurs s_L de l'élément. Afin de pouvoir convenablement tenir compte des effets du poids propre, de la variation de température et des déformations initiales, la relation forces-déplacements de l'élément sera exprimée sous la forme

$$\underline{\underline{\{S\} = \{\bar{S}\} + [K]\{\Delta\},}} \tag{21}$$

où $\{\bar{S}\}$ est le vecteur des forces nodales primaires équivalentes de l'élément. On remarquera que la matrice $[K]$ est d'ordre $6M$, où M est le nombre de nœuds.

La situation représentée sur la figure 5a sera considérée comme cas fondamental. Lorsque le vecteur $\{\bar{S}\}$ et la matrice $[K]$ sont connus, d'autres cas peuvent en être dérivés par des transformations appropriées. Dans les applications concernant les structures constituées uniquement de barres, seuls les nœuds des extrémités interviendront dans le processus d'assemblage. Par ailleurs, si à la suite d'une forte différence entre les dimensions des sections les axes des barres ne se coupent pas aux croisements des barres, on peut être amené à considérer des éléments présentant des nœuds de liaison excentrés vis-à-vis de leur axe. L'élément type représenté sur la figure 5b satisfait à toutes ces exigences.

On peut éliminer les déplacements nodaux δ_2 à δ_{M-1} des nœuds intermédiaires en égalant les sous-vecteurs des forces nodales équivalentes s_L en ces nœuds aux sous-vecteurs p_L de charges nodales connues. En posant, pour simplifier,

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_M \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_M \end{Bmatrix}, \tag{22a}$$

on aboutit alors à la relation forces-déplacements suivante :

$$\underline{\underline{\{s\} = \{\bar{s}\} + [k]\{\delta\},}} \tag{22}$$

avec

$$\{\bar{s}\} = \bar{S}_e + K_{ee} K_{ii}^{-1} (P_i - \bar{S}_i), \tag{22b}$$

$$[k] = K_{ee} - K_{ei} K_{ii}^{-1} K_{ei}^T. \tag{22c}$$

Dans ces relations, le vecteur P_i est formé de sous-vecteurs des charges nodales données en $L = 2,3 \ldots M-1$

$$P_i = \begin{Bmatrix} p_2 \\ | \\ | \\ | \\ p_{M-1} \end{Bmatrix}, \tag{23a}$$

tandis que la signification des autres termes découle de la partition suivante de la relation matricielle (21) :

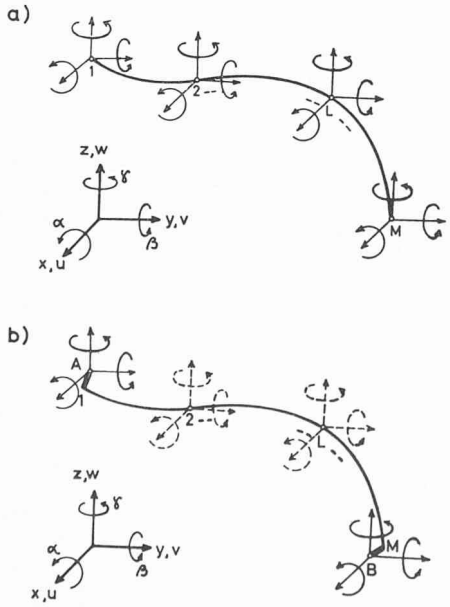

Fig. 5. — Elément spatial de barre courbe et ses forces nodales.
a) Cas fondamental : tous les nœuds sont considérés comme nœuds de liaison et se situent sur l'axe de l'élément.
b) Exemple d'un cas dérivé du cas fondamental : les nœuds A et B sont seuls considérés comme nœuds de liaison. (Ils peuvent être excentrés par rapport à l'axe.) Les degrés de liberté des nœuds internes (en traitillé) sont éliminés de la relation forces-déplacements.

[1] Voir *Bulletin technique de la Suisse romande* n° 21 du 9 octobre 1975.

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_M \\ \hline s_2 \\ \vdots \\ s_{M-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_e \\ \hline S_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_e \\ \hline \bar{S}_i \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} K_{ee} & K_{ei} \\ \hline K_{ie} & K_{ii} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \hline \Delta_i \end{Bmatrix} . \quad (23b)$$

Pour passer à l'élément avec nœuds de liaison excentrés, on admettra que ces nœuds sont liés aux extrémités de l'axe par des barres rigides (fig. 5b). Les déplacements δ_1, δ_M et les déplacements δ_A, δ_B seront alors liés par des relations linéaires du type

$$\delta_1 = T_1\, \delta_A, \quad \delta_M = T_M\, \delta_B ,$$

où les matrices de transformation T_1 et T_M découlent de simples considérations géométriques. La matrice T_1, par exemple, a pour expression :

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta z_1 & -\Delta y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta z_1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y_1 & -\Delta x_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] , \quad (24a)$$

avec

$$\Delta x_1 = x_1 - x_A , \quad \Delta y_1 = y_1 - y_A , \quad \Delta z_1 = z_1 - z_A . \quad (24b)$$

Pour obtenir la matrice T_M, il suffit de remplacer les indices 1 et A par M et B. En définissant maintenant les vecteurs

$$\{\delta_{\text{exc}}\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} , \quad \{s_{\text{exc}}\} = \begin{Bmatrix} s_A \\ s_B \end{Bmatrix} , \quad (25a)$$

et en appliquant le théorème des travaux virtuels, $\delta \{\delta_{\text{ext}}\}^T \{s_{\text{ext}}\} = \delta \{\delta\}^T \{s\}$, on transformera la relation (22) en la relation matricielle forces-déplacements suivante :

$$\underline{\underline{\{s_{\text{exc}}\} = \{\bar{s}_{\text{exc}}\} + [k_{\text{exc}}] \{\delta_{\text{exc}}\} ,}} \quad (25)$$

avec

$$\{\bar{s}_{\text{exc}}\} = [T]^T \{\bar{s}\} , \quad (25b)$$

$$[k_{\text{exc}}] = [T]^T [k] [T] , \quad (25c)$$

et

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_M \end{bmatrix} . \quad (25d)$$

II.2 *Définition du champ des déplacements*

Afin d'exprimer la réalité physique aussi correctement que possible, le champ des déplacements de l'élément doit être choisi de manière conforme aux hypothèses de déformation généralement admises, lesquelles se résument principalement à ce qui suit :

a) les sections, rigides dans leur plan, peuvent gauchir sous l'effet du cisaillement ou de la torsion,

b) les allongements des fibres parallèles à l'axe varient linéairement entre les plans perpendiculaires à l'axe,

c) on ne tient pas compte de l'effet du coefficient de Poisson.

Il est évident qu'en vertu de *b)*, le gauchissement ne modifie pas la loi linéaire de l'allongement des fibres. Un modèle de calcul permettant de tenir compte de l'effet du cisaillement consiste à admettre qu'une section plane avant

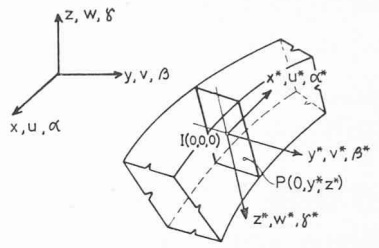

Fig. 6. — Coordonnées, déplacements et rotations globaux et locaux.

déformation restera plane après déformation, mais que son plan ne sera plus nécessairement perpendiculaire à l'axe déformé de la barre. Bien que ce modèle ne tienne pas compte du gauchissement des sections, il donne déjà une image correcte des déplacements et des rotations suivant lesquels travaillent les composantes de la résultante des efforts internes associés à l'axe de la barre ; il permet, par conséquent, d'obtenir une expression correcte de l'énergie de déformation de l'élément.

Compte tenu du modèle de déformation choisi, la déformation sera donnée de manière univoque par trois composantes de déplacement u_o, v_o, w_o du centre de la section selon les axes globaux x, y, z et par trois composantes de rotation α, β, γ de la section autour de ces axes. En choisissant en tout point nodal L six degrés de liberté u_L, v_L, w_L, α_L, β_L, γ_L, on peut définir les déplacements u_o, v_o, w_o en tout point de l'axe et les rotations α, β, γ de toute section de manière analogue à celle que l'on a utilisée pour les coordonnées globales (équation (2)) :

$$\begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \end{Bmatrix} . \quad (26a, b)$$

On remarquera que, conformément au modèle de déformation adopté, les rotations des sections sont indépendantes de la déformée de l'axe.

Bien que ce ne soit pas nécessaire pour la suite des opérations conduisant aux relations forces-déplacements de l'élément, il est utile de développer les expressions des déplacements en un point quelconque $P(\xi, \eta, \zeta) \equiv P(0, y^*, z^*)$ de l'élément pour mieux illustrer le présent modèle.

Affectons d'un astérisque (fig. 6) les déplacements et les rotations repérés dans le système d'axes local. Dans le mode de déformation adopté, les déplacements locaux du point P auront pour expression :

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_o^* \\ v_o^* \\ w_o^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z^* & -y^* \\ -z^* & 0 & 0 \\ y^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{Bmatrix} ,$$

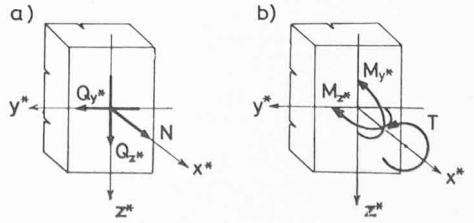

Fig. 7. — Composantes de la résultante des efforts internes agissant sur la face positive de la section.

d'où l'on tire, en tenant compte de (26a, b) et en utilisant les transformations (18) :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \left(\begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{Bmatrix} + [\Theta] \begin{bmatrix} 0 & z^* & -y^* \\ -z^* & 0 & 0 \\ y^* & 0 & 0 \end{bmatrix} [\Theta]^T \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \end{Bmatrix} \right).$$

Tandis que les coordonnées x, y, z, définies par (3) dépendent de $9M$ paramètres (x_L, y_L, z_L, x'_L, y'_L, z'_L, x''_L, y''_L, z''_L pour $L = 1, 2 \ldots M$), les déplacements u, v, w s'expriment en fonction de $6M$ paramètres seulement (u_L, v_L, w_L, α_L, β_L, γ_L pour $L = 1, 2 \ldots M$). L'élément est du type superparamétrique, c'est-à-dire que la variation de la géométrie est plus générale que celle du champ des déplacements.

II.3 *Vecteur des efforts internes de l'élément*

Les composantes de la résultante des efforts internes (que nous appellerons simplement « efforts internes ») dans une section de l'élément sont définies dans la figure 7. Ces efforts seront exprimés ci-après en fonction des déformations de l'élément.

Puisque la longueur initiale des fibres comprises entre deux sections consécutives de l'élément est inégale, l'hypothèse que les allongements des fibres varient linéairement entre deux sections consécutives n'implique pas une variation linéaire des allongements relatifs ε, et partant des contraintes σ. En général, la petite déviation de la linéarité est toutefois négligée ; en effet, elle devient insignifiante si le rayon de courbure de l'axe non déformé de la barre est suffisamment grand vis-à-vis des dimensions transversales (b et h) de la section. Cette condition étant en règle générale très bien remplie en pratique, nous admettrons que les contraintes normales varient linéairement sur la section. En partant des hypothèses énoncées au paragraphe précédent, on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_{x^*} \\ Q_{y^*} \\ Q_{z^*} \\ T_{x^*} \\ M_{y^*} \\ M_{z^*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EF & & & & & \\ & \frac{5}{6}GF & & & & 0 \\ & & \frac{5}{6}GF & & & \\ & & & GJ & & \\ & 0 & & & EI_{y^*} & \\ & & & & & EI_{z^*} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \frac{du_o}{dx^*} \\ \frac{dv_o}{dx^*} - \gamma^* \\ \frac{dw_o}{dx^*} + \beta^* \\ \frac{d\alpha^*}{dx^*} \\ \frac{d\beta^*}{dx^*} \\ \frac{d\gamma^*}{dx^*} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^o\varepsilon_{x^*} \\ {}^o\delta_{y^*} \\ {}^o\delta_{z^*} \\ {}^o\vartheta_{x^*} \\ {}^o\kappa_{y^*} \\ {}^o\kappa_{z^*} \end{Bmatrix} \right), \qquad (27)$$

où F, I et J désignent respectivement l'aire de la section, son moment d'inertie et son moment d'inertie à la torsion. Par ailleurs ${}^o\varepsilon_{x^*}$, ${}^o\delta_{y^*}$, ${}^o\delta_{z^*}$, ${}^o\vartheta_{x^*}$, ${}^o\kappa_{y^*}$, ${}^o\kappa_{z^*}$ sont les déformations initiales. Dans le cas d'une variation uniforme ΔT de la température, par exemple, ces déformations prennent les valeurs suivantes : ${}^o\varepsilon_{x^*} = \alpha_T \Delta T$, ${}^o\delta_{y^*} = {}^o\delta_{z^*} = {}^o\vartheta_{x^*} = {}^o\kappa_{y^*} = {}^o\kappa_{z^*} = 0$. Pour simplifier l'écriture, nous écrirons symboliquement la relation (27) sous la forme

$$\{M\} = [D]\,(\{\kappa\} - \{{}^o\kappa\})\,, \qquad (27)'$$

où $\{M\}$ désigne le vecteur des efforts internes, $[D]$ la matrice de transformation déformations-efforts internes, $\{\kappa\}$ le vecteur des déformations totales et $\{{}^o\kappa\}$ le vecteur des déformations initiales.

La relation (27) appelle quelques commentaires. On remarquera que les déformations $\delta_{y^*} = \frac{dv_o^*}{dx^*} - \gamma^*$ et $\delta_{z^*} = \frac{dw_o^*}{dx^*} + \beta^*$ représentent les composantes de la déviation de la normale n à la section par rapport à la tangente t à l'axe (fig. 8). Par ailleurs, le coefficient 5/6 qui multiplie le produit GF sur la diagonale principale de la matrice $[D]$ caractérise la correction de l'énergie de déformation due à la variation parabolique des contraintes tangentielles sur la section de la barre. Enfin dans les deux dernières relations (27), la dérivée seconde coutumière de la flèche v_o^* ou w_o^* est remplacée par la dérivée première des rotations β^* ou γ^*, ce qui montre que la rotation d'une section n'a plus aucun rapport direct avec la dérivée première de la ligne élastique de l'élément.

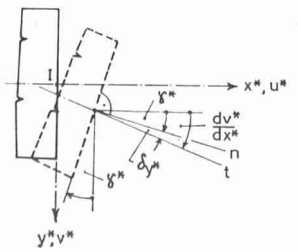

Fig. 8. — Positions relatives d'une section et de l'axe d'un élément déformé, compte tenu de l'effet du cisaillement.

II.4 *Expression de la relation forces-déplacements de l'élément*

Le vecteur $\{\kappa\}$ défini au paragraphe précédent peut être exprimé en fonction des déplacements nodaux, au moyen des relations (26a, b) et de la transformations (19). En remplaçant dans cette dernière les dérivées partielles $\delta/\delta x^*$ par d/dx^*, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{du_o^*}{dx^*} \\ \frac{dv_o^*}{dx^*} \\ \frac{dw_o^*}{dx^*} \end{Bmatrix} = c\,[\Theta]^T \begin{Bmatrix} \frac{du_o}{d\xi} \\ \frac{dv_o}{d\xi} \\ \frac{dw_o}{d\xi} \end{Bmatrix} = c\,[\Theta]^T \sum_{L=1}^{M} N'_L(\xi) \begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\alpha^*}{dx^*} \\ \frac{d\beta^*}{dx^*} \\ \frac{d\gamma^*}{dx^*} \end{Bmatrix} = c\,[\Theta]^T \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha}{d\xi} \\ \frac{d\beta}{d\xi} \\ \frac{d\gamma}{d\xi} \end{Bmatrix} = c\,[\Theta]^T \sum_{L=1}^{M} N'_L(\xi) \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma^* \\ \beta^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{Bmatrix} = [A]\,[\Theta]^T \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \end{Bmatrix},$$

avec

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N'_L(\xi) = \frac{dN_L(\xi)}{d\xi}. \tag{28a}$$

Si l'on utilise ces expressions pour définir $\{\kappa\}$, on aboutit à

$$\{\kappa\} = \sum_{L=1}^{M} \left[\begin{array}{c|c} cN'_L\,[\Theta]^T & N_L\,[A]\,[\Theta]^T \\ \hline 0 & cN'_L\,[\Theta]^T \end{array}\right] \delta_L = \sum_{L=1}^{M} b_L \cdot \delta_L. \tag{28}$$

Ecrivons encore cette dernière relation en introduisant le vecteur $\{\Delta\}$ des déplacements nodaux de l'élément :

$$\underline{\underline{\{\kappa\} = [B]\,\{\Delta\},}} \tag{29}$$

avec

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_M \\ \hline \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{M-1} \end{Bmatrix} \tag{29a}$$

et

$$\underline{[B] = [b_1\; b_M \,|\, b_2 \cdots b_{M-1}]\,.} \tag{29b}$$

Pour calculer l'effet du poids propre du matériau, de poids spécifique γ, introduisons maintenant les vecteurs

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{d_o\} = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{Bmatrix}.$$

Les éléments du premier vecteur sont les composantes du poids spécifique γ selon les axes globaux x, y et z. Le second vecteur peut encore s'écrire à partir de (26a), en fonction de $\{\Delta\}$:

$$\{d_o\} = [c_1\; c_M \,|\, c_2 \cdots c_{M-1}]\,\{\Delta\} = [C]\,\{\Delta\}, \tag{30}$$

avec

$$c_L = N_L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{30a}$$

Si l'on fait appel aux expressions (21) et (27) à (30), le vecteur des forces nodales primaires équivalentes $\{\bar{S}\}$ et la matrice de rigidité $[K]$ de l'élément s'obtiennent aisément par l'un des procédés bien connus, par exemple, en choisissant le théorème de stationnarité de l'énergie potentielle totale Π :

$$\delta\Pi = \delta V + \delta U = 0\,.$$

Dans ce cas, la variation du potentiel des forces extérieures et la variation de l'énergie de déformation s'écrivent sous la forme

$$\delta V = -\delta\,\{\Delta\}^T\,\{S\} - \int_o^l \delta\,\{d_o\}^T\, bh\,\{\gamma\}\, ds\,,$$

$$\delta U = \int_o^l \delta\,\{\kappa\}^T\,\{M\}\, ds\,.$$

Par substitution des expressions (21), (27)′, (29) et (30) dans ces relations, on obtient finalement :

$$\{\bar{S}\} = -\int_o^l [B]^T\,[D]\,\{{}^o\kappa\}\, ds - \int_o^l bh\,[C]^T\,\{\gamma\}\, ds\,,$$

$$[K] = \int_o^l [B]^T\,[D]\,[B]\, ds\,.$$

Au moyen de la relation (17), il est aisé de remplacer les intégrales suivant l'axe de l'élément par des intégrales selon la coordonnée curviligne ξ entre les bornes -1 et $+1$, de sorte que l'on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \{\bar{S}\} &= -\int_{-1}^{+1} t\,[B]^T\,[D]\,\{{}^o\kappa\}\, d\xi - \int_{-1}^{+1} t\,bh\,[C]^T\,\{\gamma\}\, d\xi\,, && (31a) \\ [K] &= \int_{-1}^{+1} t\,[B]^T\,[D]\,[B]\, d\xi\,. && (31b) \end{aligned}}$$

On calcule numériquement les intégrales en appliquant par exemple la quadrature de Gauss. Notons que les quantités F, I_{y^*}, I_{z^*} et J de la matrice $[D]$ s'obtiennent à partir des dimensions b et h des sections, dimensions que l'on trouve par l'application des relations (7) ou (12).

II.5 *Calcul des efforts internes*

Une fois les déplacements nodaux $\{\Delta\}$ connus, les efforts internes des éléments peuvent être calculés au moyen des relations (27) et (28), d'où l'on tire :

$$\{M\} = -[D]\,\{{}^o\kappa\} + [D] \sum_{L=1}^{M} b_L\,\delta_L\,. \tag{32}$$

Quand la relation $\{S\} = \{\bar{S}\} + [K]\,\{\Delta\}$ ne sert que de point de départ pour développer les relations forces-déplacements telles que (22) ou (25), la résolution de l'assemblage des éléments ne fournit que les sous-vecteurs δ_1, δ_M ou δ_A, δ_B. En partant de (23b) et en remarquant que $\{\delta\} = [T]\,\{\delta_{\text{exc}}\}$ (où la matrice $[T]$ est définie par les relations (24a) et (25d)), on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_M \end{Bmatrix} = \{\delta\} = [T]\,\{\delta_{\text{exc}}\}\,, \tag{33a}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{M-1} \end{Bmatrix} = -K_{ii}^{-1}\,\bar{S}_i - K_{ii}^{-1}\,K_{ei}^T\{\delta\} = -K_{ii}^{-1}\,\bar{S}_i - K_{ii}^{-1}\,K_{ei}^T\,[T]\,\{\delta_{\text{exc}}\}. \tag{33b}$$

Bien que la famille d'éléments présentée dans cette étude donne généralement avec une très bonne précision les déplacements et les forces nodales des éléments pour tous les $M \geqq 3$, l'expérience montre que les efforts internes obtenus avec les membres inférieurs de la famille (élément quadratique $M = 3$ et élément cubique $M = 4$) ne sont pas suffisamment précis, à moins que les éléments soient relativement courts. Ceci est dû au fait que les fonctions de base de ces éléments ne sont pas suffisamment riches pour représenter convenablement certaines variations des efforts internes. Il est intéressant de remarquer que, dans ces cas-là, on obtient toutefois d'excellents résultats en partant des forces nodales équivalentes et en appliquant les conditions d'équivalence statique. Pour les efforts internes aux extrémités d'un élément, on obtient par exemple les formules suivantes :

$$\{M_1\} = -[\Theta_1]\, s_1 = -[T_1]\,[\Theta_1]\, s_A\,, \qquad (34a)$$

$$\{M_M\} = [\Theta_M]\, s_M = [T_M]\,[\Theta_M]\, s_B\,. \qquad (34b)$$

La bonne qualité des résultats obtenus de cette manière s'explique par le fait que les forces nodales intervenant dans ces relations sont plus directement optimisées par l'application du théorème variationnel ($\delta\Pi = 0$) sur lequel se fondent les calculs.

III. Applications

III.1 *Programme pour l'ordinateur*

En partant de la théorie développée aux chapitres I et II, nous avons écrit un sous-programme standard inclus sous le nom ELEMO3 dans la bibliothèque des éléments du programme ELFIN *.

Le sous-programme ELEMO3 permet de choisir le nombre de nœuds M entre 3 et 6 ; il permet par la suite de traiter les éléments quadratique, cubique, quartique et quintique. Le sous-programme élimine automatiquement les degrés de liberté associés aux nœuds intermédiaires de l'élément et, au besoin, effectue les transformations relatives à l'excentricité des nœuds de liaison de l'élément (fig. 5b). Le calcul des efforts internes s'effectue de deux manières différentes (relations (32) et (34)). Le nombre de points de Gauss pour l'intégration numérique peut être spécifié par l'utilisateur, à défaut de quoi un nombre standard est adopté en fonction de M. Le sous-programme permet d'éviter un calcul répété des éléments dans le cas où la structure comprend plusieurs éléments identiques dont l'emplacement dans la structure diffère par un mode de déplacement rigide.

Pour éviter à l'utilisateur de devoir spécifier un nombre relativement élevé de nœuds géométriques L' et L'', le sous-programme permet de définir l'élément de manière plus simple et mieux adaptée à la pratique. Il suffit d'indiquer les données suivantes (fig. 9) :

a) les coordonnées des points nodaux $L = 1, 2 \ldots M$ situés sur l'axe de l'élément ;

b) les largeurs b et les hauteurs h des sections nodales ;

c) le « dévers » représenté par l'angle φ entre le plan xy et l'axe local y^* des sections nodales.

Le sous-programme ELEMO3 génère alors automatiquement les nœuds géométriques L' et L'' de manière à rendre les sections nodales perpendiculaires à l'axe de l'élément.

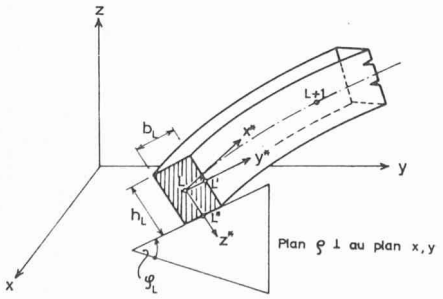

Fig. 9. — Définition géométrique d'une section nodale pour le sous-programme ELEMO3. L'utilisateur spécifie les valeurs x_L, y_L, z_L et b_L, h_L, φ_L. Les nœuds géométriques L' et L'' sont générés automatiquement par le sous-programme.

* ELFIN est un programme général pour la méthode des éléments finis. Il a été développé dans les années 1973-1974 à la chaire de statique et de résistance des matériaux pour les besoins de la recherche [8].

Les relations mathématiques relatives à cette phase de calcul sont données dans l'Appendice.

III.2 *Etude de la convergence*

Pour examiner l'efficacité de la famille d'éléments proposée, nous avons étudié la poutre hélicoïdale de section constante représentée à la figure 10, sous deux cas de charge :

a) le poids propre de la poutre $\gamma = 2{,}5$ t/m^3,

b) une force isolée verticale $P = 10$ t au milieu de la longueur de la poutre.

Les figures 11 et 12 montrent les diagrammes typiques des efforts internes obtenus pour chacun de deux cas de charge.

L'étude de la convergence a été effectuée par comparaison des résultats obtenus avec des éléments quadratiques ($M = 3$), cubiques ($M = 4$), quartiques ($M = 5$) et quintiques ($M = 6$) et pour un nombre N d'éléments également variable. Les tableaux 1 et 3 montrent quelques résultats caractéristiques de cette étude. Leur analyse montre clairement qu'avec les éléments quartiques et quintiques, des résultats pratiquement exacts s'obtiennent déjà avec un nombre très restreint d'éléments. Par contre, des éléments quadratiques ou cubiques doivent être pris en plus grand nombre pour donner des résultats de la même qualité. La raison tient non seulement à la relative pauvreté des fonctions de déplacements de ces éléments, mais également à leur impossibilité de représenter géométriquement avec une précision suffisante les éléments obtenus par une forte distorsion de l'élément parallélépipède de base. L'expérience montre que les éléments quadratique et cubique sont aussi notablement moins économiques sur la plan de la préparation des données et du temps de calcul.

Les efforts internes indiqués dans les tableaux 1 et 3 ont été calculés à partir des relations (34). La supériorité de ce mode de calcul vis-à-vis du calcul direct des efforts à partir des déformations (relations (32)), est mise en évi-

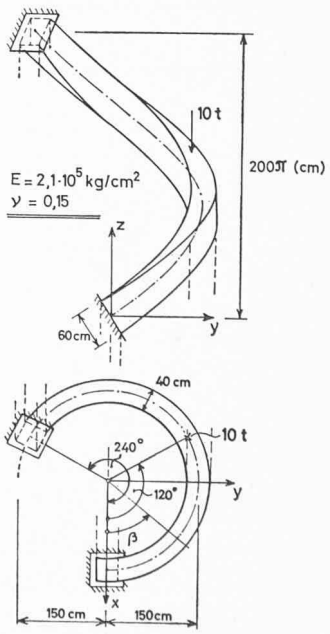

Fig. 10. — Poutre hélicoïdale. Exemple considéré dans l'étude de la convergence.

Tableau 1

Etude de la convergence. Poutre hélicoïdole (fig. 10)
Effet du poids propre $\gamma = 2{,}5\ t/m^3$

Variables	M \ N	2	4	8	12	16	32	Unités
w ($\beta = 120^0$)	3	-0,0548	-0,2328	-0,3507	-0,3634	-0,3658	-0,3669	mm
	4	-0,2861	-0,3644	-0,3670	-0,3670	-0,3670	-0,3670	
	5	-0,3615	-0,3670	-0,3670	-0,3670	-0,3670		
	6	-0,3665	-0,3670	-0,3670				
N_{max} ($\beta = 240^0$)	3	2,060	2,158	2,147	2,152	2,153	2,156	t
	4	2,138	2,152	2,157	2,157	2,157	2,158	
	5	2,169	2,158	2,158	2,158	2,158		
	6	2,160	2,158	2,158				
Q_{z*max} ($\beta = 0^0$)	3	1,688	1,627	1,628	1,621	1,617	1,613	t
	4	1,625	1,616	1,613	1,612	1,612	1,612	
	5	1,599	1,611	1,612	1,612	1,612		
	6	1,610	1,612	1,612				
T_{max} ($\beta = 240^0$)	3	0,103	0,172	0,251	0,256	0,256	0,255	tm
	4	0,249	0,270	0,257	0,256	0,255	0,255	
	5	0,249	0,255	0,255	0,255	0,255		
	6	0,251	0,255	0,255				
M_{y*max} ($\beta = 120^0$)	3	0,514	0,633	0,798	0,813	0,815	0,816	tm
	4	0,763	0,814	0,816	0,816	0,816	0,816	
	5	0,813	0,816	0,816	0,816	0,816		
	6	0,816	0,816	0,816				
M_{y*min} ($\beta = 0^0$)	3	-1,515	-1,704	-2,025	-2,054	-2,058	-2,060	tm
	4	-1,815	-2,048	-2,059	-2,060	-2,061	-2,060	
	5	-2,027	-2,060	-2,060	-2,060	-2,060		
	6	-2,060	-2,060	-2,060				

Tableau 2

Comparaison de deux modes de calcul des efforts internes.
Moment M_{y*max} de la poutre hélicoïdale (fig. 10)
chargée par son poids propre ($\gamma = 2{,}5\ t/m^3$)

Equation	M \ N	2	4	8	12	16	32
(32)	3	-0,078	0,403	0,771	0,811	0,817	0,817
	4	0,584	0,875	0,825	0,818	0,817	0,816
	5	1,009	0,827	0,816	0,816	0,816	
	6	0,836	0,816	0,816			
(34)	3	0,514	0,633	0,798	0,813	0,815	0,816
	4	0,763	0,814	0,816	0,816	0,816	0,816
	5	0,813	0,816	0,816	0,816	0,816	
	6	0,816	0,816	0,816			

Tableau 3

Etude de la convergence. Poutre hélicoïdale (fig. 10)
Effet d'une force isolée $P = 10\ t$ au milieu de la poutre.

Variables	M \ N	2	4	8	12	16	32	Unités
w ($\beta = 120^0$)	3	-0,2808	-0,9454	-1,4136	-1,4628	-1,4721	-1,4764	mm
	4	-1,1184	-1,4674	-1,4767	-1,4767	-1,4767	-1,4767	
	5	-1,4550	-1,4764	-1,4767	-1,4767			
	6	-1,4737	-1,4766	-1,4767				
N_{max} ($\beta = 240^0$)	3	5,054	4,748	4,586	4,580	4,582	4,584	t
	4	4,638	4,578	4,586	4,586	4,586	4,587	
	5	4,609	4,588	4,587	4,587	4,587		
	6	4,591	4,587	4,587				
Q_{z*max} ($\beta = 0^0$)	3	2,376	2,422	2,509	2,502	2,495	2,488	t
	4	2,500	2,498	2,486	2,485	2,484	2,484	
	5	2,452	2,482	2,484	2,484	2,484		
	6	2,478	2,484	2,484				
T_{max} ($\beta = 240^0$)	3	0,115	0,530	0,745	0,755	0,754	0,749	tm
	4	0,809	0,789	0,752	0,749	0,748	0,747	
	5	0,711	0,746	0,747	0,747	0,747		
	6	0,736	0,747	0,747				
M_{y*max} ($\beta = 120^0$)	3	4,706	5,351	6,008	6,066	6,077	6,082	tm
	4	5,803	6,074	6,082	6,082	6,082		
	5	6,070	6,081	6,082	6,082	6,082		
	6	6,079	6,082	6,082				
M_{y*min} ($\beta = 0^0$)	3	-2,344	-3,565	-4,739	-4,840	-4,857	-4,865	tm
	4	-4,017	-4,826	-4,861	-4,864	-4,865	-4,865	
	5	-4,743	-4,863	-4,865	-4,865	-4,865		
	6	-4,862	-4,865	-4,865				

Tableau 4

Comparaison de deux modes de calcul des efforts internes.
Moment M_{y*mox} de la poutre hélicoïdale (fig. 10)
soumise à une force isolée $P = 10\ t$ au centre.

Equation	M \ N	2	4	8	12	16	32
(32)	3	-1,456	2,652	5,349	5,822	5,957	6,059
	4	3,080	6,005	6,080	6,080	6,080	6,082
	5	6,657	6,118	6,082	6,082	6,082	
	6	6,204	6,081	6,082			
(34)	3	4,706	5,351	6,008	6,066	6,077	6,082
	4	5,803	6,074	6,082	6,082	6,082	6,082
	5	6,070	6,081	6,082	6,082	6,082	
	6	6,079	6,082	6,082			

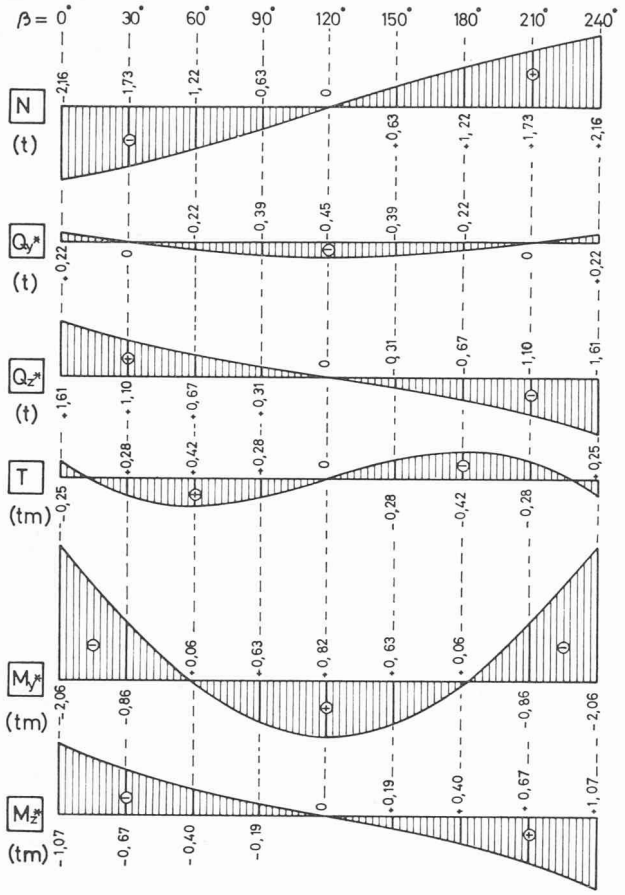

Fig. 11. — Efforts internes de la poutre hélicoïdale de la figure 10. Effet du poids propre $\gamma = 2{,}5$ t/m³.

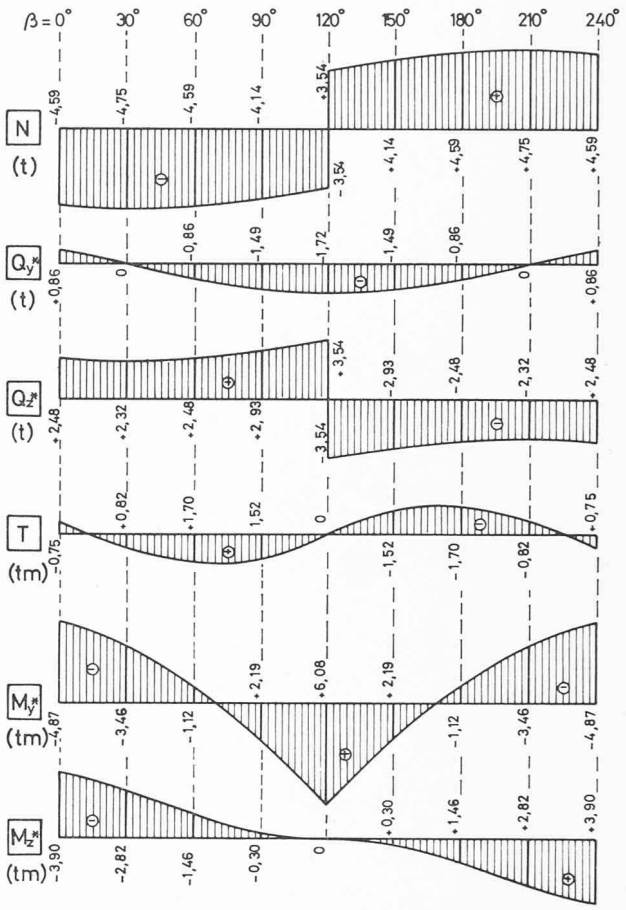

Fig. 12. — Efforts internes de la poutre hélicoïdale de la figure 10. Effet d'une force isolée $P = 10$ t au milieu de la poutre.

dence dans les tableaux 2 et 4. Conformément au raisonnement tenu au paragraphe II.3, le gain de précision est appréciable surtout dans les cas où la structure considérée est remplacée par un petit nombre d'éléments du type quadratique ou cubique.

III.3 *Calcul d'une rampe hélicoïdale*

La figure 13 montre une autre application pratique de la famille d'éléments proposée. Le système porteur est formé d'une poutre hélicoïdale encastrée aux extrémités et d'un système d'entretoises radiales disposées de manière à donner un dévers radial de 6 % et surélevées à chaque intersection de 20 cm par rapport à l'axe de la poutre hélicoïdale ; l'angle φ des axes locaux y^* des sections des entretoises est égal à la pente longitudinale de la rampe, et l'angle φ des axes locaux y^* des sections de la poutre correspond au dévers radial de la rampe.

Pour le calcul, la structure a été décomposée en 15 éléments. Pour les 8 tronçons de la poutre hélicoïdale, nous avons appliqué les éléments quintiques ($M = 6$), tandis que pour les 7 entretoises nous nous sommes contentés d'éléments quartiques ($M = 5$). Le calcul a été effectué pour plusieurs cas de charge. La figure 14 montre par exemple les diagrammes des efforts internes engendrés par une force verticale $P = 1$ t appliquée au nœud 6.

Pour étudier l'effet de l'excentricité des poutres aux intersections, nous avons également calculé la même structure en admettant que les axes des entretoises coupent l'axe de la poutre hélicoïdale. Les résultats obtenus sont représentés en traitillé dans la figure 14. On constate notamment une très forte diminution des efforts normaux dans toutes les barres. Remarquons qu'en renversant le sens de l'excentricité (entretoises surbaissées par rapport à la poutre hélicoïdale) et en la choisissant suffisamment grande, on parviendrait à provoquer des efforts de compression dans les barres.

IV. Remarques finales

Bien que, pour ne pas allonger cet exposé, nous ayons renoncé à montrer d'autres applications pratiques, l'intérêt de la famille d'éléments proposée paraît évident. On objectera peut-être que nous nous sommes bornés aux

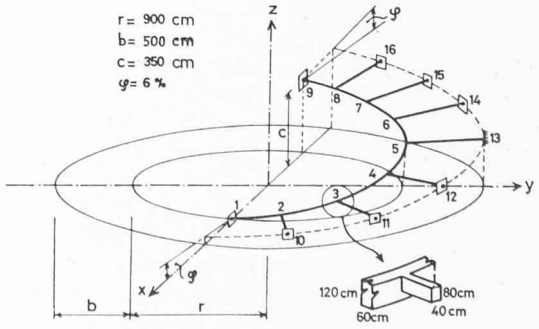

Fig. 13. — Rampe hélicoïdale. La numérotation des nœuds correspond à la subdivision de la structure en éléments finis.

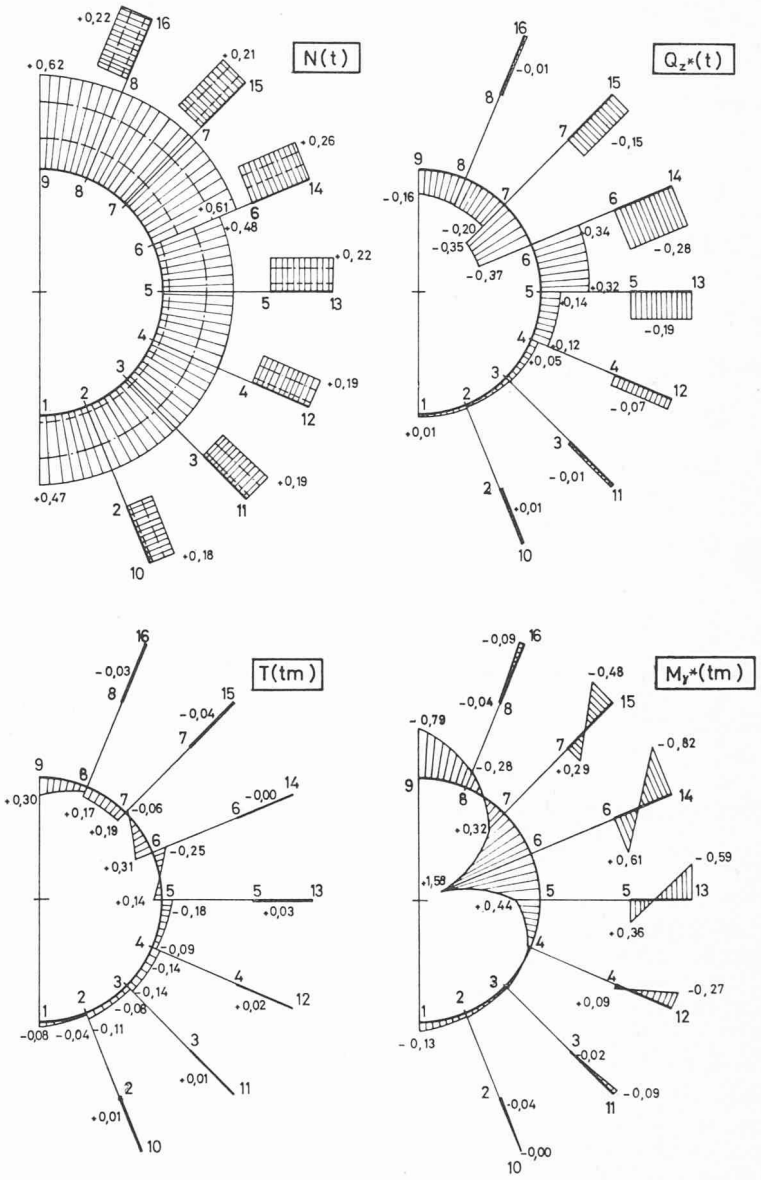

Fig. 14. — Efforts internes engendrés dans la rampe hélicoïdale de la figure 13 par une force $P = 1$ t appliquée au nœud 6.
——— entretoises surélevées de 20 cm par rapport à l'axe de la poutre hélicoïdale
–·–·– les axes des entretoises coupent l'axe de la poutre hélicoïdale
– – – – entretoises surabaissées de 20 cm par rapport à l'axe de la poutre hélicoïdale

éléments de section rectangulaire, tandis que dans la pratique on sera certainement amené à considérer également d'autres formes de section. Il est facile, toutefois, de lever cette restriction si, au lieu des nœuds géométriques L' et L'', on spécifie directement les valeurs nodales de l'angle φ et des constantes F, F_{y*}, F_{z*}, I_{y*}, I_{z*} et J, que l'on fait ensuite varier en fonction de la coordonnée curviligne ξ le long de l'axe de l'élément. Les résultats de l'étude de cette famille généralisée d'élements de section quelconque seront publics dans notre prochain article.

A côté des éléments basés sur la méthode directe des rigidités, nous avons également essayé, en partant de la même représentation géométrique, de développer la relation force-déplacement par inversion de la relation déplacements-forces. Bien que ce procédé puisse paraître préférable pour une barre, puisque la seule approximation consiste alors dans la représentation de la géométrie de l'élément, il est plus difficile à mettre en œuvre et plus coûteux en temps de calcul lorsque les intégrales doivent être effectuées numériquement. Ceci provient du fait que l'expression de l'effet des charges locales implique l'évaluation numérique d'une série d'intégrales entre les bornes $\xi = -1$ et $\xi = \xi_G$, où la seconde borne, variable, prend successivement les valeurs des coordonnées de tous les points de Gauss lorsqu'on intègre sur la longueur totale de l'élément.

V. Appendice

Dans certains cas pratiques, on trouve avantage à définir la géométrie de l'élément en spécifiant les angles φ_L et les dimensions b_L, h_L des sections nodales au lieu des coordonnées des nœuds auxiliaires L' et L''. Pour se ramener au cas fondamental, il s'agira de déterminer la position des nœuds L' et L'' correspondants, ou de calculer directement les vecteurs

$$\{B_L\} = \begin{Bmatrix} x_{L'}-x_L \\ y_{L'}-y_L \\ z_{L'}-z_L \end{Bmatrix}, \quad \{C_L\} = \begin{Bmatrix} x_{L''}-x_L \\ y_{L''}-y_L \\ z_{L''}-z_L \end{Bmatrix},$$

qui constituent les matrices géométriques $[G_B]$ et $[G_C]$ (équations (4) et (4a)). Les relations nécessaires pour ce passage sont données ci-après. Remarquons encore qu'en donnant le « dévers » φ, on ne peut pas dépasser le complément à $\frac{\pi}{2}$ de l'angle de la tangente par rapport au plan xy (il est facile de s'en convaincre par une simple analyse géométrique). L'angle φ doit alors satisfaire à la condition suivante :

$$|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{|t_{zL}|}{\sqrt{t_{xL}^2 + t_{yL}^2}}, \tag{35}$$

où t_{xL}, t_{yL} et t_{zL} sont les coordonnées du vecteur-tangent,

$$\vec{t}_L = \begin{Bmatrix} t_{xL} \\ t_{yL} \\ t_{zL} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^{M} N'_K(\xi=\xi_L)\vec{r}_K = \sum_{K=1}^{M} N'_K(\xi=\xi_L) \begin{Bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{Bmatrix}. \tag{36}$$

V.1 *Calcul des vecteurs* $\{B_L\}$

Les éléments des vecteurs $\{B_L\}$ peuvent être calculés à partir des relations suivantes :

a)
$$z_{L'}-z_L = \frac{1}{2} b_L \sin \varphi_L, \tag{37}$$

b)
$$y_{L'}-y_L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ avec } \pm\sqrt{\ } \text{ pour } t_x \lessgtr 0, \tag{38}$$

et où

$$\left.\begin{aligned} a &= t_{xL}^2 + t_{yL}^2, \quad b = t_{yL} \cdot t_{zL}\, b_L \sin \varphi_L, \\ c &= \frac{1}{4} b_L^2 (t_{zL}^2 \sin^2 \varphi_L - t_{xL}^2 \cos^2 \varphi_L). \end{aligned}\right\} \tag{38a}$$

On remarquera que dans la relation (38), la racine carrée est nulle si $t_x = 0$.

c)
$$x_{L'}-x_L = -\frac{t_{yL}}{t_{xL}}(y_{L'}-y_L) - \frac{t_{zL}}{t_{xL}}(z_{L'}-z_L), \tag{39}$$

ou encore, si $t_x = 0$,

$$\left.\begin{aligned} x_{L'}-x_L &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (y_{L'}-y_L)^2 - (z_{L'}-z_L)^2} \\ &\text{avec } \pm\sqrt{\ } \text{ pour } t_y \gtrless 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

La formule (38) n'est pas applicable si $t_{xL} = t_{yL} = 0$, d'où la restriction suivante : en aucun des points nodaux L l'axe de l'élément ne doit être parallèle à l'axe z.

Notons que la relation (37) découle directement de la figure 9. Par ailleurs, les relations (38) à (40) s'obtiennent par la résolution du système de deux équations vectorielles :

$$\vec{t} \cdot (\vec{r}_{L'} - \vec{r}_L) = 0,$$

et

$$|\vec{r}_{L'} - \vec{r}_L| = \frac{1}{2} b_L,$$

dont la première exprime le fait que le nœud auxiliaire L' se trouve dans un plan normal à l'axe de l'élément et la seconde donne la longueur du vecteur LL'.

V.2 *Calcul des vecteurs* $\{C_L\}$

Les coordonnées du vecteur $\{C_L\}$ s'obtiennent au moyen du produit vectoriel $\vec{t}_L \times \vec{B}_L$ le vecteur ainsi défini étant ramené à la longueur $\frac{1}{2} h_L$. On trouve alors :

$$\{C_L\} = \frac{1}{2} \frac{h_L}{D_L} \begin{Bmatrix} D_{xL} \\ D_{yL} \\ D_{zL} \end{Bmatrix}, \tag{41}$$

avec

$$\begin{Bmatrix} D_{xL} \\ D_{yL} \\ D_{zL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{yL} \cdot B_{zL} - t_{zL} \cdot B_{yL} \\ t_{zL} \cdot B_{xL} - t_{xL} \cdot B_{zL} \\ t_{xL} \cdot B_{yL} - t_{yL} \cdot B_{xL} \end{Bmatrix} \text{ et } D_L = \sqrt{D_{xL}^2 + D_{yL}^2 + D_{zL}^2}. \tag{41a, b}$$

Remerciements

Cet article fait partie d'un travail de recherche sur les systèmes spatiaux de poutres curvilignes croisées et les coques nervurées, financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique. Les auteurs remercient MM. Fawaz Tarazi et Raymond Schäffer de leur aide lors des calculs numériques sur l'ordinateur de l'EPFL.

Références

[1] Baron, F. : *Matrix Analysis of Structures Curved in Space.* Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 87, No. ST3, March 1961, p. 17-38.

[2] Li, Shu-t'ien : *Metallic Dome-Structure Systems.* Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 88, No. ST 6, December 1962, p. 201-226.

[3] Eisemann, K., Who, L., Namyet, S. : *Space Frame Analysis by Matrices and Computers.* Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 88, No. ST 6, December 1962, p. 245-268.

[4] Jiroušek, J. : *Kruhové rošty a prostorové rotační rámy* (Circular Grillages and Circular Cylindrical Frames). Sborník Vysokého učení technického v Brně (Bulletin of the Technical University Brno, Czechoslovakia), 1963, No. 1-4, p. 31-71.

[5] Hutton, C. R. : *Curvilinear Grid Frames.* Engineering Journal, July 1964, Vol. 1, No. 3, AISC.

[6] Michalos, J. : *The Structural Analysis of Space Networks.* Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, September 1966.

[7] Fenton, D. L. : *Matrix Computer Analysis of Curvilinear Grid Systems.* Dissertation for the degree of Ph. D. in Civil Engineering, University of Missouri at Rolla, 1967.

[8] Jiroušek, J. : *ELFIN-Programme de calcul des structures par la méthode des éléments finis*, tome 1. Publication de la chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPFL, n° 7, rédaction provisoire 1974.

Adresse des auteurs :

Professeur Maurice-H. Derron et
Professeur Jaroslav Jiroušek, Dr ès sc.
Chaire de statique et de résistance
des matériaux de l'EPFL
av. Dapples 23, 1006 Lausanne