Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 101 (1975)
Heft: 6

Artikel: Théorie des jauges électriques d'extensométrie
Autor: Xenophontidis, Nicolas
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-72547

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie des jauges électriques d'extensométrie

par NICOLAS XENOPHONTIDIS, Lausanne

1. Généralités

Un état de déformation peut être défini par six composantes dans un système d'axes arbitraire ou par les trois déformations principales avec les directions correspondantes.

Nous avons vu [1] que les déformations selon les axes x, y et z ainsi que les déformations de cisaillement sont données par les relations :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(1) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Dans la plupart des cas on mesure les déformations sur la surface libre d'un corps. Ainsi l'état bidimensionnel des déformations en surface peut être exprimé au moyen des trois déformations ε_x, ε_y et γ_{xy}.

Les relations (1) montrent que, si on arrive à déterminer les deux déplacements u et v, les déformations peuvent être calculées directement. Dans quelques cas, la détermination des déformations et des contraintes peut se faire facilement au moyen des déplacements. C'est le cas de la poutre fléchie. On a en effet :

$$\varepsilon_x = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ainsi

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{y}{r} = -E\, y \frac{d^2y}{dx^2}$$

avec

r = rayon de courbure de la poutre ;
y = distance du point considéré à l'axe neutre de la poutre.

Par conséquent, la connaissance de la ligne élastique $y(x)$ permet la détermination des déformations et des contraintes.

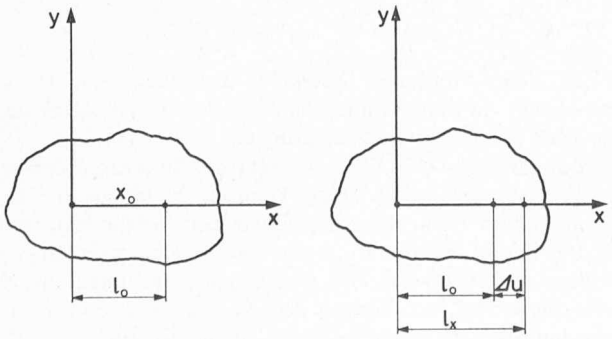

Fig. 1. — Déplacement d'une longueur l_o lors de la déformation d'un corps.

Dans le cas général on devrait calculer les pentes des surfaces de déplacement u et v (voir équation (1)). Ceci étant très laborieux on se contente de mesurer le déplacement d'une petite partie du corps considéré le long d'un segment de droite (figure 1).

Le déplacement mesuré est converti en déformation au moyen de l'expression :

$$(2) \qquad \varepsilon_x = \frac{l_x - l_o}{l_o} = \frac{\Delta_u}{\Delta_x}$$

Il est évident que la déformation ainsi obtenue n'est pas exacte du fait qu'elle correspond à la longueur l_o et non au point x_o. Ultérieurement (3.2.5) on verra l'ordre de grandeur de l'erreur commise.

2. Différents types d'extensomètres et leurs caractéristiques fondamentales

L'examen de la figure 1 montre que le problème fondamental lors de la détermination d'une déformation est la mesure du déplacement de deux points distants de l_o. Dans ce but, différents principes physiques ont été utilisés et servent de base pour la classification des divers extensomètres. On distinguera des extensomètres :

— mécaniques,
— optiques,
— électriques,
— acoustiques,
— pneumatiques.

Chaque type d'extensomètre possède un certain nombre de caractéristiques parmi lesquelles on peut citer la base de mesure l_o, la sensibilité et le domaine de mesure.

Base de mesure l_o

Nous avons déjà décrit la signification de la longueur l_o. Dans un champ de formation non uniforme l'erreur de mesure due à la longueur l_o sera mise en évidence au paragraphe 3.2.5. Lors du choix d'un extensomètre pour une application particulière, cette longueur (longueur de l'extensomètre) a une importance fondamentale.

Sensibilité

Par sensibilité de l'extensomètre on entend le rapport entre le signal de sortie et la déformation. On peut augmenter la sensibilité par un amplificateur, mais divers facteurs parasites introduisant de grandes erreurs limitent finalement l'exactitude. Il ne faut donc pas confondre la sensibilité avec l'exactitude.

Domaine de mesure

Le domaine de mesure de l'extensomètre est la valeur maximale de la déformation qui peut être lue sans remise à zéro et sans déplacement de celui-ci. La sensibilité et le domaine de mesure sont deux caractéristiques dépendant l'une de l'autre. Pour une chaîne de mesure donnée, le domaine de mesure diminue avec la sensibilité de l'extensomètre utilisé.

3. Les jauges électriques

Au cours des dernières décennies, l'emploi des extensomètres électriques s'est généralisé au point de dominer toute l'extensométrie. Dans quelques cas particuliers des extensomètres d'autre nature sont encore utilisés.

Parmi les extensomètres électriques, également appelés jauges électriques, on distingue les jauges à fil résistant, les jauges capacitives et les jauges inductives. Les deux derniers types sont presque exclusivement utilisés pour la réalisation de capteurs. Le principe de fonctionnement de la jauge à fil résistant a été découvert par Lord Kelvin. En 1856, il a remarqué que la résistance électrique de deux fils, l'un en acier et l'autre en cuivre, soumis à un certain effort de traction, augmentait avec la valeur de cet effort. Les variations de résistance furent mesurées à l'aide d'un pont Wheatstone. Lors de ses expériences, Lord Kelvin a constaté trois points importants qui ont grandement contribué à l'évolution de l'extensométrie soit :

— la résistance des fils est une fonction de la déformation ;

— les divers matériaux se comportent différemment ;

— le pont de Wheatstone peut être utilisé pour des mesures de précision.

Bien que les premières expériences aient été effectuées au milieu du dix-neuvième siècle, ce n'est qu'en 1935 que les premières jauges furent construites. Elles étaient constituées d'un fil métallique replié plusieurs fois sur lui-même.

Actuellement, on trouve sur le marché différents types de jauges. Toutes utilisent un élément sensible qui transforme une variation de longueur en variation de résistance électrique. Parmi ces types, on distingue (voir figure 2) :

— *jauge à fil résistant :* utilise un fil de section ronde, replié ou bobiné et collé sur un support isolant ;

— *jauge à trame pelliculaire :* l'élément sensible est une pellicule de métal, fixée sur un support isolant ;

— *jauge à semi-conducteur :* ces jauges mettent en œuvre l'effet de piézo-résistance et utilisent comme matériaux le germanium ou le silicium.

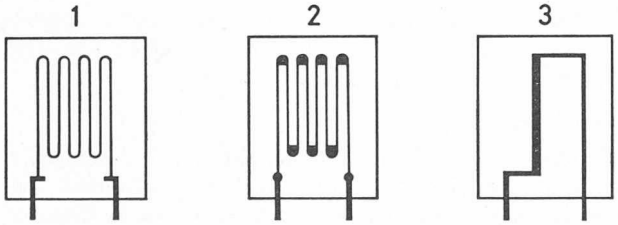

Fig. 2. — 1 : jauge à fil résistant ;
2 : jauge à trame pelliculaire ;
3 : jauge à semi-conducteur.

3.1 *Principe de fonctionnement*

On admet que la jauge subit les mêmes déformations que la surface sur laquelle elle est collée et que le fil (trame) subit les mêmes déformations que s'il était tendu par ses extrémités.

Le principe de fonctionnement est basé sur l'expression de la résistance d'un conducteur :

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{3}$$

avec

R = résistance du conducteur ;

ρ = résistivité du métal ou de l'alliage utilisé ;

l = longueur du fil ;

S = section du fil.

En différentiant la relation (3) (on suppose la température constante), on trouve

$$\frac{dR}{R} = K \frac{dl}{l} \tag{4}$$

avec

$$K = 1 + 2\,\nu = \frac{\dfrac{d\rho}{\rho}}{\dfrac{dl}{l}}$$

ν étant le coefficient de Poisson.

Le coefficient K s'appelle facteur de jauge. Le terme $\frac{d\rho/\rho}{dl/l}$ est positif pour la plupart des matériaux et pratiquement nul pour certains autres. Dans très peu de cas il est négatif. Pour les cas où $\frac{d\rho/\rho}{dl/l} \approx 0$, on trouve que $K \approx 2$ puisque ν varie dans les limites 0,25 et 0,44.

3.2.1 *Effet de la température*

a) *Compensation thermique*

La variation de la température au cours d'un essai tensométrique provoque l'apparition des déformations. Par exemple, une élévation de température de 50°C crée, dans une barre d'acier libre de se dilater, le même allongement qu'une traction de 100 bar.

Lorsque la température varie, trois facteurs importants conditionnent la variation de la résistance d'une jauge :

1. Le coefficient de dilatation thermique du matériau à essayer

$$\alpha_{t1} \left(\frac{\mu}{m\ °C}\right)$$

2. Le coefficient de dilatation thermique du matériau de la jauge

$$\alpha_{t2} \left(\frac{\mu}{m\ °C}\right)$$

3. Le coefficient thermique α de la résistivité $\rho = \rho_o + \alpha\,\Delta t$

Les trois effets cumulés donnent, selon la relation (4) :

$$\left(\frac{\Delta R}{R_{\Delta t}}\right) = (\alpha_{t1} - \alpha_{t2})\,K\,\Delta t + \alpha\,\Delta t \tag{5}$$

Pour $\Delta t = 1$°C la relation (5) donne une déformation apparente :

$$\varepsilon_{ap} = \alpha_{t1} - \alpha_{t2} + \frac{\alpha}{K} \tag{6}$$

En examinant la relation (5) on constate que pour éliminer l'influence de la température on devrait avoir :

$$\alpha_{t1} = \alpha_{t2} \quad \text{et} \quad \alpha \approx 0$$

Les jauges normales portent la valeur ε_{ap} sur leurs emballages. Les jauges autocompensées ont une valeur de ε_{ap} égale à ± 1 microdéformation/°C.

Pour éliminer l'effet de la température un autre procédé est couramment utilisé : c'est l'emploi de la « jauge de compensation ». La compréhension de cette méthode nécessite une initiation aux circuits de mesures extensométriques. Notons seulement que l'on utilise une jauge identique à celle qui servira aux mesures de déformation et collée sur un échantillon du même matériau que la structure.

Pour éliminer l'effet de température on peut donc agir soit sur la jauge même, soit sur le circuit de mesure.

b) *Domaine d'utilisation en température*

La température d'utilisation dépend de l'adhésif du support et de l'alliage de la jauge. La limite supérieure de température est plus élevée pour les mesures dynamiques (fluage faible) que pour les mesures statiques. Aux basses températures la limite inférieure est déterminée par le fait que la résine ou l'adhésif deviennent cassants.

Les jauges les plus couramment utilisées se comportent correctement pour des températures comprises entre −200 et +100°C.

Les jauges à support époxy pour haute température permettent de mesurer jusqu'à +200°C.

Une élévation de température a pour effet de provoquer une chute d'isolement. Cette question prend toute son importance dans le domaine des très hautes températures où l'on utilise des céramiques pour la fixation des jauges.

3.2.2 *Choix de la résistance, courant limite, élongation maximum*

Choix de la résistance

La valeur la plus couramment utilisée est 120 Ω. D'autres valeurs beaucoup moins courantes sont 300, 600 et 1000 Ω. Ces valeurs ont été pratiquement imposées par les fabricants américains. Le choix de la résistance se fait suivant des considérations électriques ou électroniques (équipements électroniques associés). On remarque en effet que pour des résistances de valeurs inférieures les signaux sont trop faibles pour être exploités. Pour des résistances plus élevées, l'influence des tensions parasites devient trop importante.

Courant limite

Une jauge électrique de résistance R, branchée sur un circuit de mesure, est parcourue par un courant I. La puissance dissipée a pour valeur

$$P = I^2 R$$

L'élévation de température correspondante dépend de cette puissance et de la dissipation de la jauge (type, dimension et support de la jauge, adhésif utilisé, nature et dimension de la structure). Pour éviter des accroissements de température sensibles, il faut surtout agir sur la tension d'alimentation que l'on situe en général autour de 5 V ; pour chaque type de jauge, elle est indiquée par le fabricant. Cette valeur peut être modifiée en fonction de la température au point de mesure, de la conductibilité thermique du matériau et également en fonction de la sensibilité désirée.

Elongation maximum

Les jauges normales peuvent supporter des allongements de 1 à 5 %. De tels allongements permettent de résoudre pratiquement tout problème de variations de contraintes dans le domaine élastique. Pour des investigations dans le domaine plastique on peut utiliser les jauges à grand allongement.

Les facteurs dont dépend l'allongement maximal d'une jauge sont de natures diverses :

— ductilité du matériau,
— malléabilité du support,
— malléabilité de l'adhésif,
— géométrie de la jauge,
— cohésion entre jauge et adhésif,
— cohésion entre adhésif et structure.

3.2.3 *Effet d'une sollicitation alternée*

Le comportement d'une jauge sous l'effet d'une charge dynamique se manifeste de deux manières différentes. Au début, on remarque des phénomènes d'hystérèse et de dérive du zéro. Après un nombre de cycles important apparaît un phénomène de fatigue.

L'hystérèse a comme conséquence une non-linéarité de la réponse. La dérive du zéro pendant les premiers cycles provient d'un changement de résistivité. Des dérives de 35 à 50 microdéformations sont courantes pour des déformations de l'ordre de 2000.

Ces deux phénomènes peuvent provoquer des erreurs de l'ordre de 7 %. Ceci est valable pour les premières sollicitations. En principe, pour stabiliser une jauge il faut la soumettre à un certain nombre de sollicitations au moins égales à la contrainte recherchée.

Le phénomène de fatigue apparaît après un nombre élevé de cycles à un certain niveau. Notons ici que la jauge à trame pelliculaire présente une meilleure résistance à la fatigue que la jauge à fil.

Une dérive du zéro apparaît aussi après un grand nombre de cycles. Initialement son importance et sa vitesse d'évolution dépendent de l'amplitude de la déformation et du nombre de cycles. Cette dérive est sans importance pour des mesures dont l'objet serait uniquement de donner les amplitudes du phénomène vibratoire. Par contre elle devient critique lorsque toutes les mesures se font à partir d'une valeur de référence, généralement le zéro.

3.2.4 *Influence de la fréquence*

Même pour les fréquences les plus élevées, les jauges de contraintes donnent des résultats excellents. Une limitation de leur possibilité de suivre les déformations rapides serait à rechercher dans le mécanisme du transfert de la déformation par la colle et le support de la jauge. D'autre part, lors de sollicitations dues à un choc ou à une onde stationnaire, le signal fourni par la jauge peut dépendre fortement de sa géométrie.

a) *Le cas d'un choc*

Supposons qu'une jauge de longueur l_o soit placée sur une éprouvette qui transmet un choc rectangulaire d'amplitude a_o, de durée t_o et de vitesse v (voir figure 3).

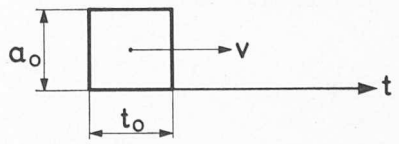

Fig. 3. — Choc rectangulaire.

Le front de l'onde traversera la jauge dans un temps $t_t = l_o/v$. Par son principe de fonctionnement la jauge fournira un signal linéaire au fur et à mesure que l'onde progresse.

Supposons, à titre d'exemple, que le temps de transition soit un multiple de la durée de l'onde : $t_t = kt_o$. La jauge donnerait un signal égal à a_o si elle était sollicitée par cette valeur simultanément sur toute sa longueur. Pour l'exemple choisi, à la fin du temps t_o elle donnera une valeur maximale égale à a_o/k. Par la suite et pendant le temps $kt_o - t_o = t_o\ (k-1)$, elle fournira une valeur constante a_o/k. Finalement la déformation diminuera pendant le temps t_o. Nous remarquerons que le temps total pendant lequel la jauge donne une déformation est égal à $(k+1)\ t_o$.

Dans l'exemple considéré l'effet de la longueur l_o se manifeste par une diminution de l'amplitude $\left(\text{facteur } \frac{1}{k}\right)$ et une augmentation de la durée t_o (facteur $k+1$). Cette distorsion du signal est fonction du rapport t_t/t_o et tend vers zéro en même temps que ce rapport.

b) *Cas d'une onde stationnaire*

Considérons l'onde sinusoïdale de la figure 4.

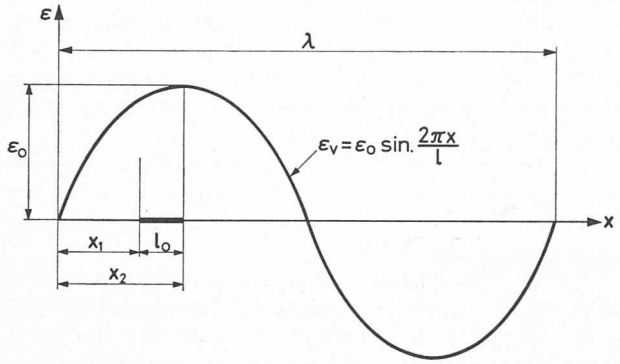

Fig. 4. — Jauge de longueur l_o, utilisée pour la mesure des déformations à un endroit sollicité par une onde stationnaire.

Pour la mesure des déformations une jauge est placée comme indiqué sur la figure 4. L'information fournie par la jauge aura pour valeur :

$$\varepsilon_{\text{moy}} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_o \sin \frac{2\pi x}{l}\, dx}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{\lambda}{2\pi}\varepsilon_o}{l_o}\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}x_2 - \cos\frac{\pi}{\lambda}x_1\right)$$

La déformation recherchée étant celle du point d'abscisse $\frac{x_2 + x_1}{2}$, où

$$\varepsilon_v = \varepsilon_o \sin\frac{2\pi}{l}\cdot\frac{x_1 + x_2}{2}$$

on constate que l'erreur commise est égale à

$$\text{erreur} = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_{\text{moy}}}{\varepsilon_v} = 1 + \frac{\frac{\lambda}{2\pi l_o}\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 + l_o) - \cos\frac{2\pi}{\lambda}x_1\right)}{\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_1 + \frac{l_o}{2}\right)}$$

En examinant la dernière relation on voit que l'erreur commise dépend du rapport l_o/λ et du paramètre x_1 déterminant la position de la jauge.

3.2.5 *Effet du gradient de déformation*

Comme nous l'avons déjà observé, la relation (2) : $\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{\Delta_u}$, donne des déformations qui ne correspondent pas à un point, comme la définition l'exige, mais à un segment. De ce fait, on peut avoir des erreurs non négligeables quand le champ de déformation varie brutalement. En admettant que la déformation mesurée est celle du milieu du segment considéré l_o, et que la déformation varie selon la direction x, on estime l'erreur qu'il peut en résulter dans quelques cas particuliers :

a) soit

$$\varepsilon_x = \text{constant} = c$$

dans ce cas il n'y a pas d'erreur,

b) soit

$$\varepsilon_x = c_1 x + c_2$$

La déformation moyenne s'obtient par intégration :

$$(\varepsilon_x)_{\text{moy}} = \frac{\int_o^{l_o} (c_1 x + c_2)\, dx}{l_o} = \frac{c_1 l_o}{2} + c_2$$

La déformation au point $x_1 = l_o/2$ a pour valeur

$$(\varepsilon_x)\, l_o/2 = c_1 \frac{l_o}{2} + c_2$$

De nouveau l'erreur est nulle.

c) soit finalement

$$\varepsilon_x = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

La déformation a pour valeur :

$$(\varepsilon_x)_{\text{moy}} = \frac{\int_o^{l_o} (c_1 x^2 + c_2 x + c_3)\, dx}{l_o} = \frac{c_1 l_o^2}{3} + \frac{c_2 l_o}{2} + c_3$$

Au point $x_1 = l_o/2$ nous obtenons :

$$(\varepsilon_x)\, l_o/2 = \frac{c_1 l_o^2}{2} + \frac{c_2 l_o}{2} + c_3$$

La différence entre ces deux valeurs donne l'erreur :

$$(\varepsilon_x)_{\text{moy}} - (\varepsilon_x)_{l_o/2} = \frac{c_1 l_o^2}{12}$$

Dans cet exemple l'erreur commise dépend de c_1 et l_o. Ainsi elle peut devenir importante si le gradient de déformation est élevé (coefficient c_1), à moins que la longueur l_o ne soit considérablement réduite.

3.2.6 *Effet de la pression et de l'humidité*

Au cours des essais rapides effectués en laboratoire, les jauges peuvent ne pas être protégées. Pour les essais de plus longue durée et dans tous les cas de travaux extérieurs, il faut les protéger, en particulier contre la pression et l'humidité.

Influence de la pression

L'effet d'une surpression se traduit par une variation de la résistivité dans la jauge et par conséquent modifie la résistance totale de celle-ci. Par exemple, une pression de 70 bar fait apparaître un signal de -15 microdéformations. La géométrie de la jauge joue aussi un rôle et, de ce fait, des jauges à trame pelliculaire sont préférables. Toujours dans la même optique, il est recommandé de diminuer les dimensions de tous les éléments annexes entourant la jauge pour minimiser l'influence de la pression. Ainsi l'épaisseur de la colle doit être très faible.

Remarquons enfin que lors d'un essai extensométrique il ne faut pas placer les jauges de compensation à l'endroit des hautes pressions. En effet, la déformation que subit l'éprouvette sur laquelle est collée la jauge de compensation est importante, comme le montre l'expression ci-dessous :

$$\varepsilon = \frac{p}{E}(1 - 2\nu) \tag{7}$$

avec

p = pression exercée sur l'éprouvette ;

E = module élastique de l'éprouvette ;

ν = coefficient de Poisson.

La relation (7) pour un acier de construction et une pression de 100 bar donne 20 microdéformations.

Influence de l'humidité

L'humidité affecte l'installation d'une jauge de plusieurs façons.

D'abord elle diminue l'isolation de la jauge et modifie la rigidité et la résistance du support. D'autre part, l'adhésif perd une partie de son efficacité quant à la transmission des déformations. Notons encore que des déformations parasites peuvent apparaître pendant la contraction ou la dilatation de l'adhésif. Ce comportement se manifeste quand il sèche ou lorsqu'il s'humidifie.

3.2.7 *Effet du temps*

Le facteur temps a une importance capitale lors de mesures de longue durée, sans possibilité de retour à zéro. En effet, des dérives appréciables du zéro peuvent apparaître, si certaines précautions ne sont pas prises pour les limiter. Le choix de la jauge et l'utilisation correcte de l'appareillage sont les deux facteurs dont dépend le succès des mesures.

Les jauges à trame pelliculaire autocompensées, utilisées avec une colle appropriée, sont recommandées. Pendant les mesures il est bon de croiser les positions des jauges actives et de compensation en prenant la moyenne des indications mesurées. Préalablement il faut toujours laisser l'installation sous tension pendant un temps suffisant pour obtenir la stabilité de la température des jauges.

Notons finalement qu'il est indiqué de mettre les appareils de mesure dans un local tempéré.

3.2.8 *Influence du champ magnétique*

Il est connu qu'un conducteur se déplaçant dans un champ magnétique est soumis à une force électromotrice. Ainsi le filament d'une jauge se déplaçant dans un tel champ donnera naissance à une tension. Le signal obtenu sera superposé à celui dû à la déformation mécanique. Cette erreur apparaît lors des essais extensométriques sur des structures sollicitées par un vibreur électrodynamique.

4. Calcul des contraintes

Le calcul des contraintes, à partir des allongements mesurés, diffère selon l'état de tension : monoxial ou biaxial et selon les connaissances a priori ou non des directions principales.

a) *Etat monoxial à direction connue*

Dans ce cas nous avons

$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = 0$$

En plus la direction de σ_x est connue. Une seule jauge placée selon la direction x suffit pour la détermination du champ :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \tag{8}$$

avec

σ_x = contrainte,

ε_x = déformation spécifique sans dimension,

E = module d'élasticité du matériau.

b) *Etat biaxial indéterminé*

Dans ce cas nous avons

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_1 = \sigma_2$$
$$\tau_{xy} = 0$$

Les contraintes peuvent être déterminées en utilisant une seule jauge, sa direction ne jouant aucun rôle.

Nous obtenons pour ce cas

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu}\,\varepsilon \tag{9}$$

c) *Etat biaxial à directions principales connues à priori*

Les jauges collées selon ces directions donnent directement les deux déformations principales à partir desquelles les relations suivantes permettent le calcul des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_2 + \nu\,\varepsilon_2) \\ \sigma_2 = \dfrac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_2 + \nu\,\varepsilon_1) \end{cases} \tag{10}$$

avec les mêmes symboles que pour la relation (8) et

ν = coefficient de Poisson.

d) *Etat biaxial à directions principales inconnues*

Dans ce cas, on utilise un ensemble de trois jauges (appelé rosette). La nécessité d'un tel dispositif apparaît en examinant la relation :

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cdot \cos\theta \tag{11}$$

(voir article [1]).

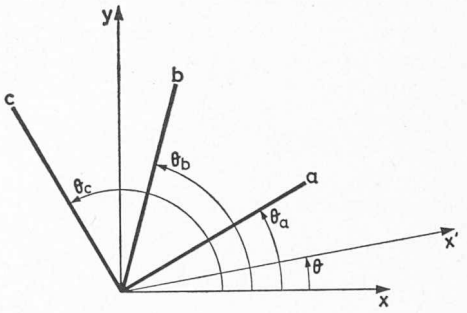

Fig. 5. — Position de trois jauges a, b et c par rapport à l'axe x.

Cette relation donne la déformation selon la direction x' en fonction des ε_x, ε_y et γ_{xy}.

Les jauges a, b et c placées selon la figure 5 donnent les déformations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2\theta_a + \varepsilon_y \sin^2\theta_a + \gamma_{xy} \sin\theta_a \cdot \cos\theta_a \\ \varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2\theta_b + \varepsilon_y \sin^2\theta_b + \gamma_{xy} \sin\theta_b \cdot \cos\theta_b \\ \varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2\theta_c + \varepsilon_y \sin^2\theta_c + \gamma_{xy} \sin\theta_c \cdot \cos\theta_c \end{cases} \tag{12}$$

La résolution de ce système donne les ε_x, ε_y et γ_{xy} en fonction des ε_a, ε_b et ε_c.

Les déformations, selon les directions principales, sont alors obtenues par les relations :

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{13}$$

$$\tan 2\phi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \tag{14}$$

avec

ϕ = angle entre la direction principale 1 et l'axe des x.

Les contraintes correspondantes peuvent alors être calculées par les relations (10).

Dans la pratique, on utilise des rosettes ayant une disposition définitive des jauges. La rosette utilisée le plus couramment est la rosette rectangulaire. Cette dernière a trois jauges placées à 0, 45° et 90° comme représenté sur la figure 6.

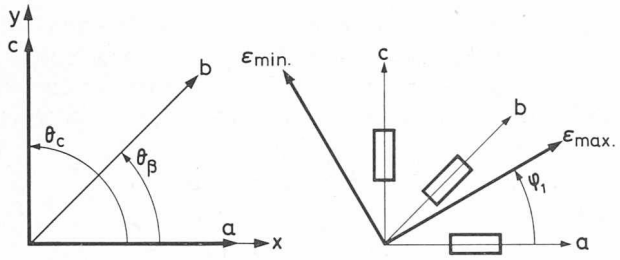

Fig. 6. — Position des jauges sur une rosette rectangulaire.

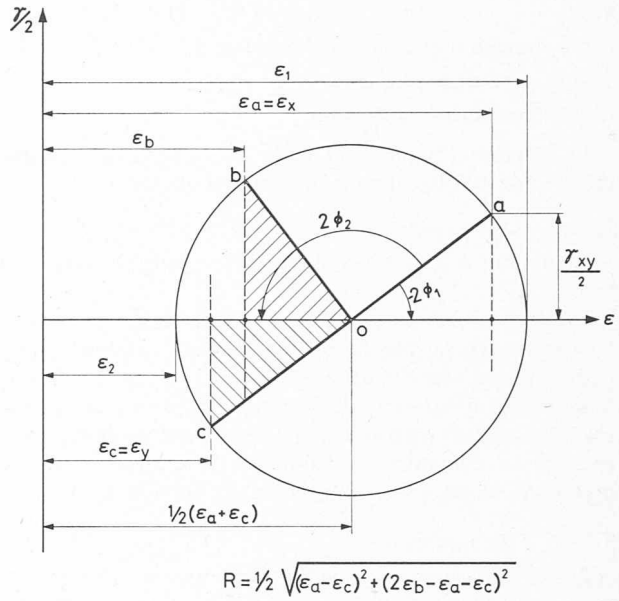

Fig. 7. — Cercle de Mohr de déformations.

Pour cette disposition des jauges, les relations (12) donnent :

$$(15)\qquad \begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_x \\ \varepsilon_b = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}) \\ \varepsilon_c = \varepsilon_y \end{cases}$$

En retournant aux relations (13) et (14) nous obtenons :

$$(16)\qquad \varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\,\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}$$

$$(17)\qquad \tan 2\,\phi = \frac{2\,\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

Pour les contraintes principales il vient :

$$(18)\qquad \sigma_{1,2} = E\left(\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2(1-\nu)} \pm \frac{1}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}\right)$$

La relation (17) donne deux valeurs pour l'angle ϕ. L'une ϕ_1 correspond à la direction principale maximale par rapport à l'axe x et l'autre ϕ_2 à la direction principale minimale par rapport au même axe.

En examinant le cercle de Mohr de déformations (voir fig. 7) on voit que :

$$0 < \phi_1 < 90° \text{ quand } \varepsilon_b > \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

$$-90° < \phi_1 < 0 \text{ quand } \varepsilon_b < \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

$$\phi_1 = 0 \quad \text{quand } \varepsilon_a > \varepsilon_c \text{ et } \varepsilon_a = \varepsilon_1$$

$$\phi_1 = \pm 90° \quad \text{quand } \varepsilon_a < \varepsilon_c \text{ et } \varepsilon_a = \varepsilon_2$$

Les relations (16) et (17) permettent de déterminer analytiquement les déformations principales ε_1 et ε_2 ainsi que leur direction. C'est la méthode qu'il faut utiliser dans le cas d'un grand nombre de mesures. Quand on désire obtenir les résultats rapidement pour quelques points seulement, il est avantageux de recourir à une méthode graphique, celle du cercle de Mohr de déformations est la plus couramment utilisée. La construction de ce cercle se fait de la manière suivante :

— Sur un système d'axes rectangulaires (voir figure 7) on choisit les directions ε, γ et on porte les valeurs ε_a, ε_b et ε_c sur l'axe des ε. Par les points ainsi déterminés, on trace ensuite des perpendiculaires à cet axe.

La déformation de cisaillement γ_{xy} est calculée par la relation $\gamma_{xy} = 2\,\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$ (relation (15)). La valeur $\gamma_{xy/2}$ est portée sur la perpendiculaire correspondant à la valeur a (vers le bas si la valeur γ_{xy} est positive et vers le haut si elle est négative). On arrive ainsi à déterminer le rayon et le centre du cercle des déformations, obtenant finalement les valeurs ε_1 et ε_2 et l'angle ϕ, comme indiqué sur la figure (à remarquer que l'angle $2\phi_1$ est négatif si le point a se situe en dessus de l'axe ε).

Bibliographie

R. I. Butter and M. McWhirter : *Current practices in shock and vibration sensors*. Mars 1967.

H. W. Fricke : *Die Dehnungsmessstreifen und ihre Anwendung*. 1967.

Guide to strain gauges. Philips.

Manuel d'analyse expérimentale des contraintes. 1967. Budd SA.

Mémento d'extensométrie. Juin 1967. Hottinger Baldwin Messtechnik.

Strain gage Handbook. April 1967. BLH Electronics Inc.

Technique d'extensométrie. SEDEME.

[1] N. D. Xenophontidis : *Bases théoriques des méthodes extensométriques*. Bulletin technique de la Suisse romande, avril 1972.

Adresse de l'auteur :

Nicolas Xenophontidis, ingénieur, Chef de section
Institut des métaux et machines de l'EPFL
Chemin de Bellerive 34, 1007 Lausanne