

Zeitschrift:	Bulletin technique de la Suisse romande
Band:	101 (1975)
Heft:	5
Artikel:	Contribution à l'étude des problèmes géométriquement non linéaires des structures élastiques (suite et fin)
Autor:	Jirousék, Jaroslav
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-72545

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Editorial

Une information diffusée ces jours derniers nous apprend que la réduction des moyens accordés au Fonds national de la recherche scientifique aurait pour conséquence la suppression prochaine de quelque 250 postes de chercheurs. Parmi toutes les mesures d'austérité suscitées par la grande misère des finances fédérales, celle-là a peu de chance de connaître un grand retentissement. Ce n'est pas le chiffre de 250 chômeurs, en blouse blanche de surcroît, pour tout le pays qui frappe l'imagination sur le plan social. L'activité de ces chercheurs est pratiquement inconnue du grand public, sinon quelques exceptions citées pour mettre en doute la valeur pratique des travaux patrognés par le Fonds national. Il est donc à craindre que cette réduction se fasse sans grande opposition, sinon sans douleur.

Il serait dommage que la valeur de la recherche scientifique soit mesurée selon des critères utilitaires, alors que cette activité constitue une indispensable étape avant toute recherche orientée sur des buts précis. Il serait bon de se rappeler cette relation, au moment où l'on consacre tant d'efforts à des études intégrant les différents grands problèmes. Citons l'exemple de l'aménagement du territoire : son examen doit pouvoir se baser sur les résultats de spécialistes de domaines fort divers, dont les travaux ont souvent

été effectués depuis longtemps sans une motivation aussi précise. De plus, la science pure est l'un des fondements de notre culture, laquelle conditionne notre façon d'aborder et de résoudre les problèmes.

Les postes de chercheurs financés par le Fonds national constituent un appui précieux pour nos hautes écoles en leur fournissant les moyens d'entreprendre à terme certaines recherches sans surcharger de façon permanente leurs effectifs.

Le Fonds national permet par exemple à de jeunes ingénieurs de suivre et de développer leur goût de la recherche par des travaux au sein d'équipes expérimentées, disposant de moyens bien adaptés.

Finalement, les résultats constituent une monnaie d'échange universelle pour accéder aux travaux effectués dans d'autres pays et confronter l'acquis respectif dans nombre de domaines.

Il convient donc de tout entreprendre pour que des moyens importants restent assurés à une recherche scientifique indépendante des contraintes de l'industrie et de certaines limites de l'enseignement, car de son activité et de ses succès dépendent pour une grande part la qualité et la capacité de concurrence de toutes nos industries.

J.-P. WEIBEL.

Communication de la chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPF-L, Professeur M.-H. Derron

Contribution à l'étude des problèmes géométriquement non linéaires des structures élastiques (suite et fin)¹

par JAROSLAV JIROUSEK, Lausanne

Théorie du 2^e ordre des arcs élastiques

1. Introduction

A la différence des poutres droites soumises à des charges transversales, les déformations des arcs ont d'habitude une influence non négligeable sur les efforts internes. Ceci est essentiellement dû au fait que la ligne de poussée se situe le plus souvent tout près de l'axe de l'arc, de sorte que même une légère déformation de celui-ci entraîne une grande variation des moments fléchissants. Les déformations modifiant de manière appréciable le mode d'action des forces, l'hypothèse habituellement admise dans le calcul des structures, selon laquelle les conditions statiques peuvent être formulées sur la structure non déformée, n'est plus justifiée.

Dans le calcul des arcs, selon la théorie du second ordre, les conditions d'équilibre sont appliquées à la structure déformée ; on admet en même temps que les déplacements restent suffisamment faibles pour justifier certaines simplifications géométriques. Contrairement au cas d'une barre droite, l'application de ce procédé à un arc conduit à un calcul non linéaire. En général, on cherche à tourner cette difficulté en remplaçant le calcul direct du problème non linéaire par un calcul répété du problème linéarisé, constituant une suite d'approximations successives. Une méthode typique est exposée, par exemple, dans l'ouvrage du professeur Ping-Chun Wang [4].

Dans la théorie des barres courbes, on utilise d'habitude des relations plus ou moins approchées entre le moment fléchissant ou l'effort normal et les composantes du déplacement. Dans [4], on prend par exemple, par analogie avec les barres droites, simplement : $M = EI \frac{d^2\bar{w}}{ds^2}$ et $N = EF \frac{d\bar{u}}{ds}$, où \bar{w} et \bar{u} sont les composantes du déplacement, respectivement normale et tangentielle à l'axe de l'arc, et ds un élément de l'axe de l'arc. Dans notre étude, nous proposons des expressions plus rigoureuses de M et N , qui tiennent également compte de l'effet de la courbure initiale de l'arc et de sa variation le long de l'axe. En partant de ces expressions, nous développerons ensuite les équations différentielles des déplacements. En les transformant par la méthode des différences finies et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient un système d'équations ordinaires mais non linéaires que l'on peut résoudre à l'aide du programme SNOLIN.

La méthode s'adapte à des arcs de forme quelconque (plats, hauts, symétriques ou non) et quelles que soient leurs conditions d'appui (arcs à deux articulations, arcs encastrés à l'une des extrémités, arcs biencastres, etc.). En ce qui concerne la charge de l'arc, nous avons supposé que celle-ci garde sa direction, mais qu'elle se déplace en fonction de la déformation de l'arc, ce qui nous a paru pratiquement acceptable.

¹ Voir *Bulletin technique de la Suisse romande*, N° 24 du 21 novembre 1974.

quement plus intéressant que de supposer une position fixe des forces extérieures². La solution s'adapte d'ailleurs facilement à cette seconde possibilité, si l'on en a exceptionnellement besoin ; il suffit de supprimer les termes qui expriment l'effet du déplacement des points d'application des forces.

2. Principe de la solution et hypothèses de travail

Les équations différentielles des déplacements inconnus u et w s'obtiennent en exprimant le principe d'équivalence entre l'effort normal et la projection de forces extérieures et entre le moment fléchissant et le moment des forces extérieures. On tiendra compte des effets du second ordre en appliquant les forces extérieures à l'arc déformé.

Pour écrire les expressions de l'effort normal et du moment fléchissant des efforts internes (expressions de N et M en fonction des déplacements), on adoptera les hypothèses de travail suivantes :

— Après la déformation, les sections planes et perpendiculaires à l'axe de l'arc dans sa position initiale restent planes et perpendiculaires à l'axe déformé.

— Le rayon de courbure $r = r(x)$ de l'axe non déformé de l'arc est grand par rapport à la hauteur de la section $h = h(x)$. La différence de longueur initiale des fibres comprises entre deux sections voisines étant alors relativement faible sur la hauteur h , on n'en tiendra compte que de manière approchée.

— Les déplacements restent petits par rapport aux dimensions de l'arc. On peut, par conséquent, appliquer les simplifications géométriques courantes de la théorie des petits déplacements.

— Le matériau obéit à la loi de Hooke.

3. Géométrie de la déformation d'une barre courbe

Considérons un élément d'arc selon la figure 10. Dans les développements qui suivront, nous utiliserons les notations suivantes :

- ε_0 ... allongement spécifique de l'axe de l'arc passant par les centres de gravité des sections ;
- \bar{z} ... allongement spécifique des fibres à la distance \bar{z} de l'axe (voir la figure 10) ;
- φ ... rotation de la normale à l'axe de l'arc sous l'effet de la déformation de ce dernier ;
- Δr ... accroissement du rayon de courbure de l'axe sous l'effet de la déformation de l'arc ;
- \bar{u} ... projection du déplacement d'un point de l'axe sur la tangente à l'axe non déformé ;
- \bar{w} ... projection du déplacement d'un point de l'axe sur la normale à l'axe non déformé.

Selon la figure 10, l'allongement spécifique s'exprime en fonction des accroissements $d\alpha$ et Δr par

$$\varepsilon = \frac{(r + \Delta r - \bar{z})(d\alpha + d\varphi) - (r - \bar{z})d\alpha}{(r - \bar{z})d\alpha} \quad (15)$$

Dans la multiplication des deux premières parenthèses du numérateur, on peut négliger le produit $\Delta r \cdot d\alpha$. En effet, conformément aux hypothèses adoptées au paragraphe précédent, le produit de deux petites déformations est négligeable par rapport aux termes qui sont linéaires en les déformations. Après la simplification, on trouve alors :

² Cette dernière hypothèse semble pourtant adoptée dans [4] à moins qu'il ne s'agisse d'une erreur commise dans l'expression du moment des forces extérieures.

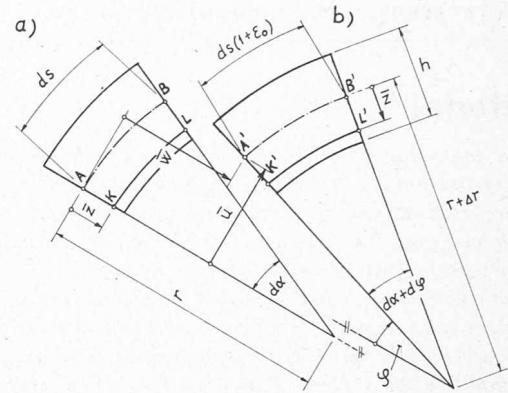


Fig. 10. — Élément de barre courbe avant la déformation (a) et après la déformation (b).

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\Delta r}{r - \bar{z}}. \quad (a)$$

En posant $\bar{z} = 0$, on en tire

$$\Delta r = r \left(\varepsilon_0 - \frac{d\varphi}{d\alpha} \right). \quad (b)$$

Par combinaison de (b) et (a), la dilatation ε s'exprime en fonction de ε_0 et φ :

$$\varepsilon = \frac{r}{r - \bar{z}} \varepsilon_0 - \frac{\bar{z}}{r - \bar{z}} \frac{d\varphi}{d\alpha}. \quad (16a)$$

Le premier terme du second membre peut encore être écrit de la manière suivante

$$\frac{r}{r - \bar{z}} \varepsilon_0 = \varepsilon_0 - \frac{r - \bar{z}}{r - \bar{z}} \varepsilon_0 + \frac{r}{r - \bar{z}} \varepsilon_0 = \varepsilon_0 + \frac{\bar{z}}{r - \bar{z}} \varepsilon_0,$$

ce qui donne :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 - \frac{d\varphi}{d\alpha} \right) \frac{\bar{z}}{r - \bar{z}}. \quad (16b)$$

Les relations (16a, b) montrent que la variation de la dilatation ε sur la hauteur de la section est, en général, non linéaire pour une barre courbe. Si l'on admet cependant (conformément aux hypothèses énoncées au paragraphe précédent), que la hauteur de la section h est petite vis-à-vis du rayon r , alors la déviation par rapport à une variation linéaire est relativement faible, et on peut la négliger. En négligeant \bar{z} par rapport à r au dénominateur du facteur $\bar{z}/(r - \bar{z})$ dans la relation (16b), on obtient une expression linéarisée de la dilatation ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 - \frac{d\varphi}{d\alpha} \right) \frac{\bar{z}}{r}. \quad (17)$$

Il est intéressant d'observer qu'en supprimant prématu-
rement \bar{z} au dénominateur du second membre de la relation (16a), c'est-à-dire avant d'avoir modifié la relation (16a) en (16b), on serait conduit à une expression moins précise,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{d\varphi}{d\alpha} \bar{z}.$$

Cette dernière expression (également admise dans de nombreuses théories de coques cylindriques et des coques de révolution) implique qu'un allongement ou un raccourcissement spécifique uniforme ($\varepsilon_0 = \text{const.}$, $d\varphi/d\alpha = 0$) de l'axe d'un anneau circulaire provoque une répartition uniforme de contraintes, $\sigma = E\varepsilon_0$, ayant pour résultante uni-

quement un effort normal $N = EF\epsilon_0$. En réalité, la longueur initiale des fibres variant linéairement avec \bar{z} , $\epsilon_0 = \text{const.}$ conduit à une répartition non uniforme des contraintes σ , ayant alors pour résultante non seulement un effort normal, mais également un moment fléchissant M . On remarquera que cette réalité est en revanche entièrement respectée par la relation (17) que nous avons proposée.

Pour les futures applications, il convient encore d'exprimer la dilatation ϵ en fonction des déplacements \bar{u} et \bar{w} de l'axe de l'arc. Selon la figure 10, on trouve facilement les expressions :

$$\epsilon_0 = \frac{d\bar{u}}{ds} - \frac{\bar{w}}{r}, \quad (18a)$$

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{r} + \frac{d\bar{w}}{ds}. \quad (18b)$$

En les portant dans la relation (17) et en posant $rd\alpha = ds$, on trouve pour la dilatation ϵ , après simplification

$$\epsilon = \frac{d\bar{u}}{ds} - \frac{\bar{w}}{r} - \left(\frac{d^2\bar{w}}{ds^2} + \frac{\bar{w}}{r^2} - \frac{\bar{u}}{r^2} \frac{dr}{ds} \right) \bar{z}. \quad (19)$$

4. Relations entre les efforts internes et les déplacements de l'axe de l'arc

Avec la convention de signes de la figure 11, l'effort normal et le moment fléchissant dans une section de l'arc seront définis par les relations suivantes :

$$N = \int_F \sigma dF \quad \text{et} \quad M = \int_F \sigma \bar{z} dF,$$

où F est l'aire de la section. Compte tenu de la loi de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, on trouve à partir de la relation (19) :

$$N = EF \left(\frac{d\bar{u}}{ds} - \frac{\bar{w}}{r} \right), \quad (20a)$$

$$M = -EI \left(\frac{d^2\bar{w}}{ds^2} + \frac{\bar{w}}{r^2} - \frac{\bar{u}}{r^2} \frac{dr}{ds} \right). \quad (20b)$$

Pour les futures applications, il est avantageux de transformer les relations (20a, b) en remplaçant les déplacements tangential \bar{u} et normal \bar{w} dont la direction varie d'une section à l'autre, par les déplacements u et w selon un système fixe d'axes orthogonaux x et z . Selon la figure 11, les déplacements locaux \bar{u} et \bar{w} s'obtiennent à partir des déplacements globaux u et w au moyen des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \cos \alpha + w \sin \alpha, \\ \bar{w} &= -u \sin \alpha + w \cos \alpha. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on exprimera les dérivées par rapport à la coordonnée curviligne s en fonction de la coordonnée

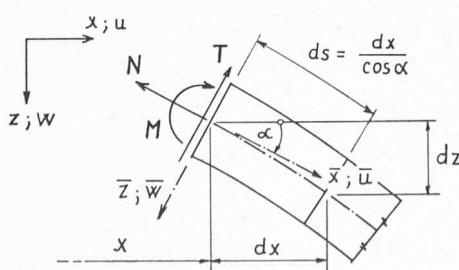


Fig. 11. — Composantes de la résultante des efforts internes dans une section de l'arc.

orthogonale x . Avec $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r}$ et $\frac{dz}{ds} = \cos \alpha$ (figure 11), nous avons :

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \cos \alpha.$$

En outre, en dérivant $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ par rapport à s , on trouve :

$$\frac{d \sin \alpha}{ds} = \frac{\cos \alpha}{r} \quad \text{et} \quad \frac{d \cos \alpha}{ds} = -\frac{\sin \alpha}{r}.$$

La transformation des équations (20a, b) conduit, après quelques modifications, à :

$$w' + w' \tan \alpha = \frac{N}{EF} \sec \alpha, \quad (21a)$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} \sec \alpha + \frac{1}{r} \frac{N}{EF} \sec \alpha (1 + \sec^2 \alpha) + \left(\frac{N}{EF} \right)' \tan \alpha, \quad (21b)$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons désigné les dérivées par rapport à x par des primes.

Il est intéressant de remarquer que la transformation directe de la seconde des équations (20) conduit à une équation contenant les dérivées secondes de u et de w . Puisque le système original d'équations différentielles (20) est du troisième ordre (et comme tel admet seulement trois conditions aux limites), il doit être possible de transformer la seconde équation à l'aide de la première de façon à éliminer l'une des secondes dérivées. En effet, en utilisant (21a) pour éliminer u'' , on aboutit à l'équation (21b).

5. Équations différentielles de la théorie du second ordre des arcs

Les équations (21a, b) peuvent être considérées comme équations différentielles de la théorie du premier ordre des arcs. En effet, en exprimant l'effort normal N et le moment fléchissant M à l'aide des forces extérieures, on obtient les équations différentielles de la ligne élastique, que l'on détermine par intégration en tenant compte des conditions aux limites.

Pour obtenir les équations différentielles de la théorie du second ordre, on doit tenir compte, pour exprimer les efforts N et M , de la déformation de l'arc et du déplacement des forces extérieures. Considérons le système fondamental d'un arc hyperstatique selon la figure 12, où X_1 , X_2 et X_3 sont les forces hyperstatiques généralisées. (Pour un arc à deux articulations, on a $X_2 = X_3 = 0$). Pour simplifier les calculs, on admettra que la charge de l'arc est représentée par un système de forces isolées verticales P_z et horizontales P_x . Compte tenu des déformations et avec la condition aux limites $u_A = 0$, la réaction V_A du système fondamental s'écrit

$$V_A = \frac{1}{l} [\sum P_z (l - x_P - u_P) - \sum P_x (z_B - z_P - w_P) - X_1 z_B - X_2 - X_3]. \quad (22)$$

L'effort normal et le moment fléchissant dans une section x ont pour expression :

$$N = \sin \alpha (V_A - \sum_{G} P_{zG}) - \cos \alpha (X_1 + \sum_{G} P_{xG}), \quad (22a)$$

$$M = V_A (x + u) + X_1 (z + w) + X_2 - \sum_{G} P_{zG} [(x + u) - (x_G + u_G)] + \sum_{G} P_{xG} [(z + w) - (z_G + w_G)], \quad (22b)$$

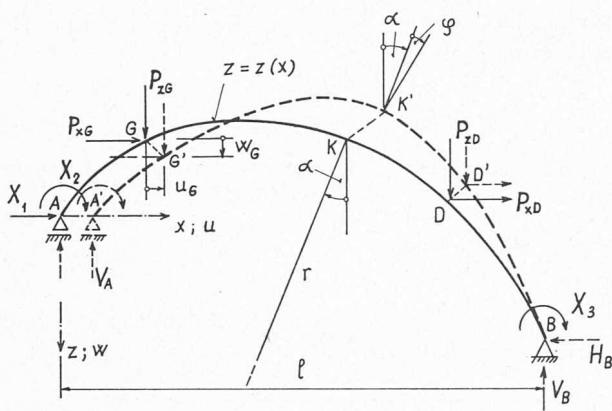


Fig. 12. — Système fondamental pour le calcul d'un arc bien-castré selon la théorie du second ordre.

où la somme \sum_G concerne toutes les forces P_z et P_x à gauche de la section x . Dans la première équation, conformément aux hypothèses énoncées au second paragraphe, nous avons négligé le petit effet de la rotation φ sur les fonctions trigonométriques de la tangente en posant :

$$\sin(\alpha + \varphi) \cong \sin \alpha \quad \text{et} \quad \cos(\alpha + \varphi) \cong \cos \alpha.$$

Les équations différentielles de la théorie du second ordre s'obtiennent maintenant en remplaçant dans les équations (21a, b) l'effort normal N et le moment fléchissant M par leurs expressions (22a, b).

Les équations différentielles dépendant aussi des forces hyperstatiques inconnues, il est nécessaire de formuler encore trois conditions supplémentaires pour les inconnues X_1 , X_2 et X_3 , en dehors des trois conditions aux limites (correspondant à l'ordre de ce système d'équations différentielles). Ces conditions supplémentaires concernent les déplacements généralisés associés aux forces hyperstatiques (voir le système fondamental de la figure 12).

A titre d'exemple, considérons l'arc de la figure 13, encastré à gauche et simplement appuyé à droite. L'hyperstatique X_3 étant nulle, on écrira en plus des trois conditions aux limites deux conditions de déformation pour les hyperstatiques X_1 et X_2 inconnues :

Conditions aux limites :

pour $x = 0 \dots w(0) = 0$,
 pour $x = l \dots u(l) = w(l) = 0$.

Conditions de déformation :

pour $x = 0 \dots u(0) = \varphi(0) = 0$.

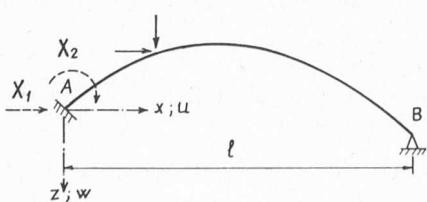


Fig. 13. — Exemple pour la formulation des conditions aux limites et des conditions de déformations nécessaires pour la résolution du système d'équations différentielles du problème.

Les conditions de déformation concernant la rotation φ = $\frac{\bar{u}}{r} + \frac{d\bar{w}}{ds}$ (équation (18b)) doivent être exprimées en fonction des déplacements u et w . Après quelques transformations nous obtenons :

$$\varphi = w' \cos^2 \alpha - u' \sin \alpha \cos \alpha. \quad (23)$$

Rappelons que dans les cas pratiques où la forme de l'arc est définie par l'équation $z = z(x)$, les fonctions trigonométriques de l'angle de la tangente sont données par des relations

$$\operatorname{tg} \alpha = z', \quad \sin \alpha = \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}. \quad (24a)$$

Par ailleurs, le rayon $r = r(x)$ s'obtient à partir de la relation

$$r = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} . \quad (24b)$$

La solution des équations différentielles du problème, avec les conditions aux limites et les conditions de déformation données, se complique du fait de la présence des termes non linéaires (en vertu de l'équation (22b), le moment M des forces extérieures est une fonction des déplacements inconnus u et w et aussi des forces hyperstatiques X_1 , X_2 , X_3 qui les multiplient). Pratiquement, on peut résoudre le problème par exemple par la méthode des différences finies (voir le paragraphe suivant), qui conduit à un système d'équations ordinaires mais non linéaires.

6. Application de la méthode des différences finies

Le principe de la méthode des différences finies étant suffisamment connu, on se bornera à quelques particularités :

1) Etant donné la forme géométrique des arcs, il est avantageux du point de vue de la précision des calculs, de répartir les points-pivots inégalement. En diminuant les intervalles Δx vers les extrémités de l'arc, on cherche à rendre approximativement égaux les segments correspondants Δs de l'axe de l'arc (figure 14). Il s'agit alors de trouver, pour une fonction $f = f(x)$ quelconque, les expressions aux différences finies avec des intervalles iné-

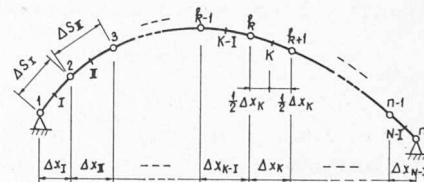


Fig. 14. — Répartition des points-pivots pour la solution par la méthode des différences finies.

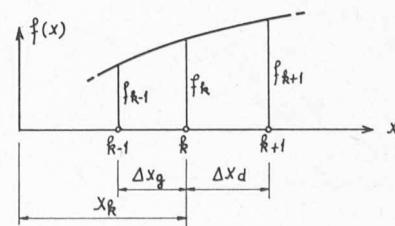


Fig. 15. — Différences finies avec des intervalles inégaux.

gaux (figure 15) des dérivées première et seconde. En faisant passer par les extrémités des ordonnées f_{k-1} , f_k et f_{k+1} un polynôme d'interpolation du second degré, on trouve :

$$\left. \begin{aligned} f'_k &= a_1 f_{k-1} + b_1 f_k + c_1 f_{k+1}, \\ f''_k &= a_2 f_{k-1} + b_2 f_k + c_2 f_{k+1}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{-\Delta x_d^2}{\Delta x_g \Delta x_d (\Delta x_g + \Delta x_d)} \\ b_1 &= \frac{-\Delta x_g^2 + \Delta x_d^2}{\Delta x_g \Delta x_d (\Delta x_g + \Delta x_d)} \\ c_1 &= \frac{\Delta x_g^2}{\Delta x_g \Delta x_d (\Delta x_g + \Delta x_d)} \end{aligned} \right\}, \quad (25a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{2 \Delta x_d}{\Delta x_g \Delta x_d (\Delta x_g + \Delta x_d)} \\ b_2 &= \frac{-2 (\Delta x_g + \Delta x_d)}{\Delta x_g \Delta x_d (\Delta x_g + \Delta x_d)} \\ c_2 &= \frac{2 \Delta x_g}{\Delta x_g \Delta x_d (\Delta x_g + \Delta x_d)} \end{aligned} \right\}. \quad (25b)$$

2) Considérons la subdivision de la projection horizontale d'un arc à deux articulations en $N-I$ intervalles inégaux Δx_1 , $\Delta x_{II} \dots \Delta x_{N-I}$ (figure 14). Les déplacements aux extrémités de l'arc, ainsi que les moments d'enca斯特ment, étant nuls, on a :

$$u_1 = w_1 = u_n = w_n = X_2 = X_3 = 0.$$

Les inconnues du problème sont alors :

les déplacements $u_2, u_3 \dots u_{n-1}$, soit $(n-2)$ inconnues,
les déplacements $w_2, w_3 \dots w_{n-1}$, soit $(n-2)$ inconnues,
la réaction hyperstatique X_1 , soit 1 inconnue,

$(2n-3)$ inconnues.

Pour avoir le même nombre d'équations que d'inconnues, nous pouvons écrire :

l'équation (21a)³

aux points I, II ... N-I, soit $(n-1)$ équations,

l'équation (21b)³

aux points 2,3 ... n-1, soit $(n-2)$ équations,

$(2n-3)$ équations.

La possibilité d'écrire des équations aux différences finies pour les centres I, II ... (N-I) des intervalles est due au fait que l'équation (21a) ne comprend que des dérivées premières. Leurs expressions aux différences finies dans le cas d'intervalles égaux ($\Delta x_g = \Delta x_d = \frac{1}{2} \Delta x_K$) ne dépendent pas des ordonnées en ces points, de sorte que pour un centre K quelconque

$$u'_K = \frac{1}{\Delta x_K} (u_{k+1} - u_k), \quad w'_K = \frac{1}{\Delta x_K} (w_{k+1} - w_k). \quad (26a, b)$$

Pour avoir les valeurs N_k de l'effort normal aux points d'application des forces isolées de remplacement, on prendra la moyenne arithmétique des valeurs N_K et

³ Avec les expressions (22a, b) de l'effort N et du moment M des forces extérieures.

N_{K-I} (exprimées aux centres des intervalles selon la relation (22a)) :

$$N_k = \frac{1}{2} (N_{K-I} + N_K). \quad (27a)$$

Par ailleurs, on posera :

$$\left(\frac{N}{EF} \right)_K = \frac{2}{\Delta x_{K-I} + \Delta x_K} \left(\frac{N_K}{EF_K} - \frac{N_{K-I}}{EF_{K-I}} \right). \quad (27b)$$

Remarquons que l'utilisation de ces expressions assez approchées se justifie du fait de l'influence relativement très faible des second et troisième termes du second membre de l'équation (21b), sur les résultats.

Au moyen des relations (25) à (27), les équations aux différences finies du problème s'écrivent :

$$\frac{1}{\Delta x_K} (u_{k+1} - u_k) + \frac{\operatorname{tg} \alpha_K}{\Delta x_K} (w_{k+1} - w_k) - N_K \frac{\sec^2 \alpha_K}{EF_K} = 0, \quad (28a)$$

$K = I, II \dots N-I$

$$\begin{aligned} a_2 w_{k-1} + b_2 w_k + c_2 w_{k+1} + M_k \frac{\sec \alpha_k}{EI_k} - \\ - \frac{\sec \alpha_k (1 + \sec^2 \alpha_k)}{2 r_k EF_k} (N_{K-I} + N_K) - \\ - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_k}{\Delta x_{K-I} + \Delta x_K} \left(\frac{N_K}{EF_K} - \frac{N_{K-I}}{EF_{K-I}} \right) = 0, \\ k = 2, 3 \dots n-1 \end{aligned} \quad (28b)$$

avec

$$N_K = \sin \alpha_K (V_A - \sum_{i=1}^k P_{zi}) + \cos \alpha_K (X_1 + \sum_{i=1}^k P_{xi}), \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} M_k = V_A (x_k + u_k) + X_1 (z_k + w_k) - \sum_{i=1}^{k-1} P_{zi} [(x_k + u_k) - \\ - (x_i + u_i)] + \sum_{i=1}^{k-1} P_{xi} [(z_k + w_k) - (z_i + w_i)], \end{aligned} \quad (29b)$$

et où

$$V_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{n-1} P_{zi} (l - x_i - u_i) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{n-1} P_{xi} (z_B - z_i - w_i) - \frac{z_B}{l} X_1. \quad (29c)$$

En écrivant toutes les équations (28a) et (28b), on obtient un système d'équations non linéaires (termes $X_1 w_k$ et $V_A u_k$ de l'équation (29b)). On peut le résoudre directement à l'aide du programme SNOLIN, en prenant par exemple comme première estimation de la valeur des inconnues :

$$u_2 = u_3 = \dots u_{n-1} = w_2 = w_3 = \dots w_{n-1} = X_1 = 0.$$

Selon nos expériences, la solution partant de ces valeurs initiales converge rapidement vers les résultats exacts. Il n'est alors pas nécessaire de chercher une estimation plus précise.

3) Dans le cas d'un arc encastré, on a, en plus de la force hyperstatique X_1 , deux nouvelles inconnues : X_2 et X_3 (ou une nouvelle inconnue si l'arc n'est encastré que d'un côté). Les expressions (29b) et (29c) doivent alors être complétées par les termes suivants (voir (22)) :

$$- \frac{1}{l} (X_2 + X_3) \text{ pour } V_A \text{ et } X_2 \text{ pour } M_k.$$

Les conditions supplémentaires pour calculer ces inconnues expriment les déformations $\varphi_A = 0$ et (ou) $\varphi_B = 0$, en fonction des déplacements au moyen de la relation (23).

Afin de ne pas devoir introduire les points-pivots fictifs 0 et $n+1$ à l'extérieur de l'arc pour remplacer les dérivées u'_1 , w'_1 et u'_n , w'_n aux extrémités de l'arc par les expressions aux différences finies, on utilisera un polynôme d'interpolation du troisième degré. En le faisant passer par les extrémités des ordonnées de la fonction $f = u(x)$ ou $f = w(x)$ en quatre points-pivots consécutifs 1, 2, 3, 4, on trouve, par exemple, l'expression suivante de la dérivée première en 1 :

$$f'_1 = \frac{bc}{ad} (c-b)(f_2-f_1) + \frac{ca}{bd} (a-c)(f_3-f_1) + \frac{ab}{cd} (b-a)(f_4-f_1) \quad (30)$$

avec

$$a = \Delta x_I, \quad b = \Delta x_I + \Delta x_{II}, \quad c = \Delta x_I + \Delta x_{II} + \Delta x_{III}, \quad (31a)$$

$$d = \frac{1}{2} [2b(c^2-a^2) + a(b^2-c^2) + c(a^2-b^2)]. \quad (31b)$$

La condition de déformation $\varphi_A = 0$ peut alors être remplacée par :

$$\begin{aligned} \frac{bc}{ad} (c-b)(w_2-u_2 \tan \alpha_1) + \\ + \frac{ca}{bd} (a-c)(w_3-u_3 \tan \alpha_1) + \\ + \frac{ab}{cd} (b-a)(w_4-u_4 \tan \alpha_1) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

De manière analogue, on peut exprimer la dérivée f'_n en fonction des ordonnées f_{n-3} , f_{n-2} , f_{n-1} et f_n , et exprimer la condition $\varphi_B = 0$ par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{bc}{ad} (c-b)(w_{n-1}-u_{n-1} \tan \alpha_1) + \\ + \frac{ca}{bd} (a-c)(w_{n-2}-u_{n-2} \tan \alpha_n) + \\ + \frac{ab}{cd} (b-a)(w_{n-3}-u_{n-3} \tan \alpha_n) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

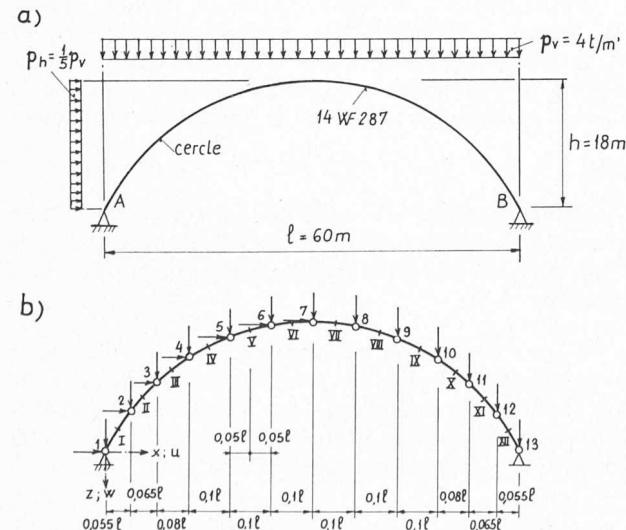


Fig. 16. — a) Géométrie et chargement de l'arc étudié. b) Répartition des points-pivots et introduction des forces concentrées de remplacement pour l'application de la méthode des différences finies.

avec

$$\begin{aligned} a = -\Delta x_{N-I}, \quad b = -\Delta x_{N-I} - \Delta x_{N-II}, \\ c = -\Delta x_{N-I} - \Delta x_{N-II} - \Delta x_{N-III}, \end{aligned} \quad (32a)$$

$$d = \frac{1}{2} [2b(c^2-a^2) + a(b^2-c^2) + c(a^2-b^2)]. \quad (32b)$$

7. Exemple d'application

Pour tester l'efficacité de la méthode, nous avons calculé l'arc à deux articulations de la figure 16a, constitué par une poutrelle américaine 14 WF 287 en acier A36 ($F = 84,37 \text{ in}^2 = 544,326 \text{ cm}^2$, $I = 3912,1 \text{ in}^4 = 162836 \text{ cm}^4$, $E = 2900000 \text{ lb/in}^2 = 2038894 \text{ kg/cm}^2$). Les dimensions ont été tirées de l'ouvrage du professeur Ping-Chun Wang [4]. Nous avons également adopté la même répartition de points-pivots (figure 16b).

Pour résoudre le système de 23 équations non linéaires du problème (inconnues X_1, u_2 à u_{12} et w_2 à w_{12}), et pour calculer les efforts normaux et les moments fléchissants, nous avons utilisé le programme SNOLIN (voir Appendice A). Nous n'entrerons pas dans les détails de calcul, très simple et rapide, et nous analyserons brièvement quelques résultats.

La figure 17 montre la comparaison des résultats de notre calcul avec ceux de la théorie du 1^{er} ordre (en pointillé). La différence entre les deux solutions est assez grande, malgré que les sollicitations restent encore relativement faibles par rapport à la capacité portante de la section (on

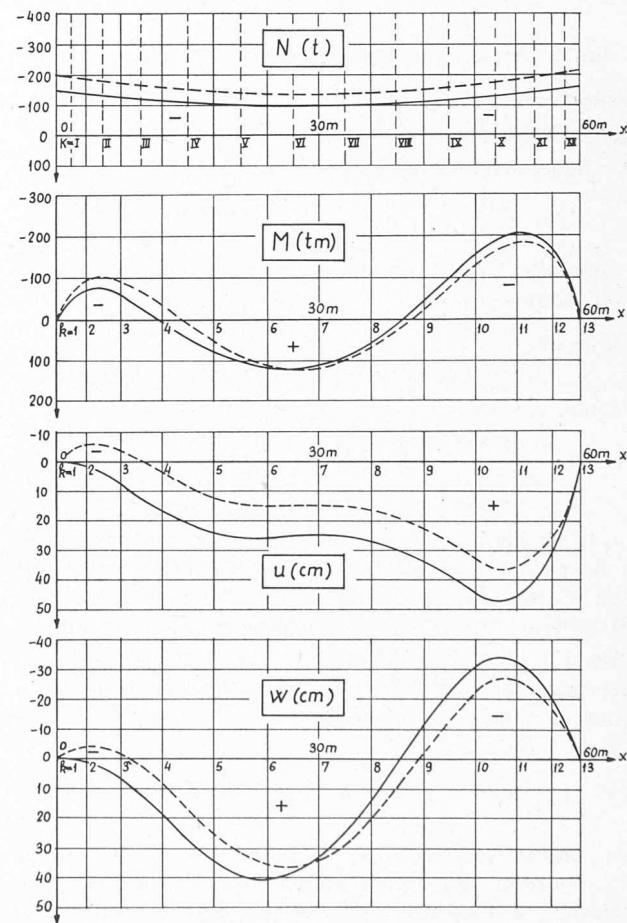


Fig. 17. — Influence des effets du 2^e ordre sur l'arc de la figure 16. Théorie du 2^e ordre : en ligne continue, théorie du 1^{er} ordre : en traitillé.

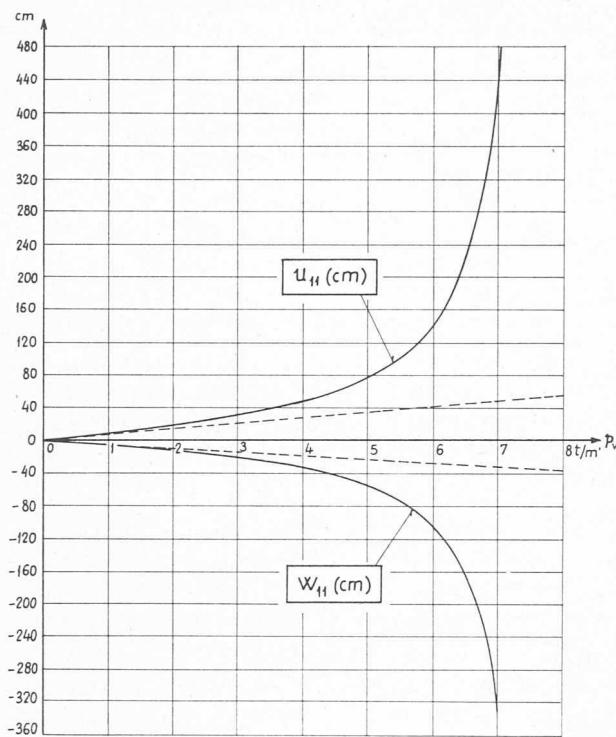


Fig. 18. — Variation des déplacements de l'arc de la figure 16a en fonction de l'intensité de la charge. Les diagrammes en traitillés représentent les résultats selon la théorie du 1^{er} ordre.

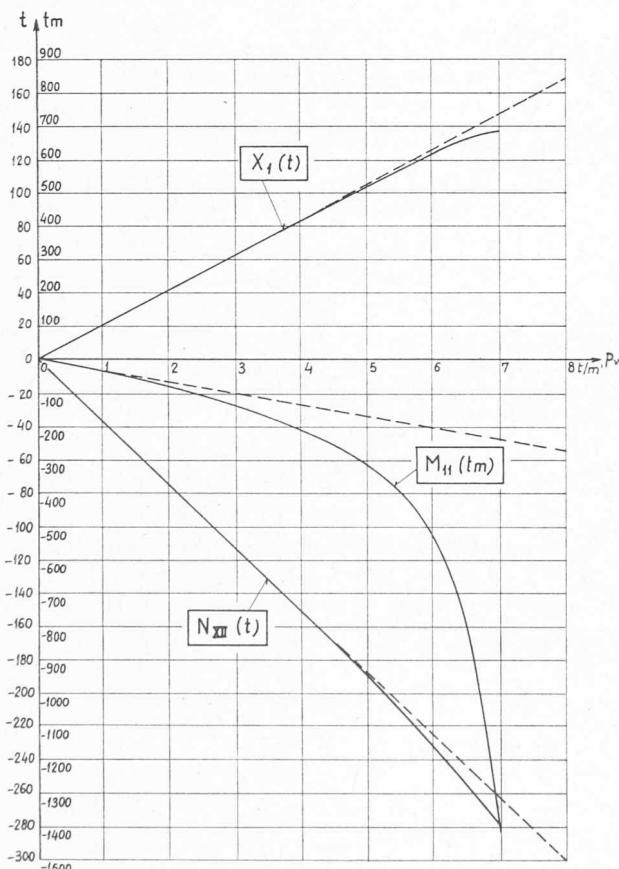


Fig. 19. — Variation de l'effort normal, du moment fléchissant et de la réaction horizontale gauche de l'arc de la figure 16a en fonction de l'intensité de la charge. Les diagrammes en traitillés représentent les résultats selon la théorie du 1^{er} ordre.

trouve par exemple dans les fibres inférieures de la section $k = 11$, une contrainte de compression de $0,456 \text{ t/cm}^2$ selon la théorie du 1^{er} ordre et de $0,377 \text{ t/cm}^2$ selon la théorie du 2^e ordre). Cette différence croît rapidement si l'on augmente l'intensité de la charge.

Les figures 18 et 19 montrent comment varient, dans la théorie du 2^e ordre, certains efforts et déplacements de l'arc en fonction de l'intensité de la charge p_v (la charge p_h étant toujours $\frac{1}{5}$ de p_v). Tandis que la variation de la réaction X_1 et de l'effort normal N_{11} est assez longtemps approximativement linéaire, le moment fléchissant M_{11} et les déplacements u_{11} et w_{11} croissent beaucoup plus rapidement. Autour de l'intensité de $p_v = 7 \text{ t/m}$ on remarquera un accroissement très rapide des déplacements et du moment fléchissant, ce qui semble indiquer que la charge est proche de son intensité critique de divergence. Cependant, cette conclusion ne devrait pas être acceptée sans réserve ; en effet, les déplacements étant déjà très importants, les simplifications géométriques adoptées dans la théorie du 2^e ordre ont pu entraîner une erreur non négligeable dans les résultats.

APPENDICE A

Description et emploi du programme SNOLIN

1. But du programme

Le but du programme SNOLIN est de résoudre un système de M équations non linéaires en partant de la valeur approchée ou estimée des inconnues.

2. Méthode utilisée

On utilisera la méthode d'itération de Newton (avec la formation numérique de la matrice Jacobienne), suivie du contrôle des résidus après chaque cycle d'itération. Le calcul s'arrête automatiquement dès que tous les résidus deviennent inférieurs à une valeur $\epsilon_{\text{admissible}}$ lue dans les données.

3. Structure du programme

Le programme SNOLIN est constitué de trois parties :

1. La partie standard, destinée à organiser et effectuer les calculs. Elle lit les données, calcule et, après chaque cycle d'itération, imprime les valeurs approchées des inconnues du système d'équations non linéaires défini dans la deuxième partie, semi-standard, du programme. Elle arrête automatiquement le calcul dès que les résidus deviennent inférieurs à une valeur $\epsilon_{\text{admissible}}$ choisie par l'utilisateur. Si on le désire, elle permet également de calculer et imprimer d'autres résultats, obtenus en fonction des inconnues selon les relations que l'utilisateur définira dans la deuxième partie (FORMFF).
2. Le sous-programme FORMFF, préparé par l'utilisateur du programme selon le paragraphe 5 ci-après. Ce sous-programme sert à définir le système d'équations non linéaires, ainsi que d'autres résultats que l'on désirerait éventuellement obtenir en fonction des inconnues du système.
3. Les données, préparées par l'utilisateur. La structure des données est précisée dans le paragraphe 6. Elles comprennent notamment les noms et les valeurs estimées des inconnues du système.

4. Utilisation du programme SNOLIN

Le programme SNOLIN fait partie de la bibliothèque des programmes GC INFO du département de Génie Civil de

3. Sous-programme FORMFF pour le programme SNOLIN

Pour exprimer les dérivées première et seconde de W dans la relation (13a), on utilisera les relations (14a, b). Pour les dérivées premières de U et W dans (13b), on appliquera la formule (14c). Afin de faciliter la programmation du vecteur FF , on formera les sous-programmes de fonctions suivants :

$$D1(F, K) = D1(f) \dots 1^{\text{re}} \text{ dérivée en } k \text{ selon (14a)}$$

$$D2(F, K) = D2(f) \dots 2^{\text{e}} \text{ dérivée en } k \text{ selon (14b)}$$

$$DD1(F, KK) = D1(f) \dots 1^{\text{re}} \text{ dérivée en } K \text{ selon (14c)}$$

Pour la dérivée seconde, on écrira par exemple :

```
FUNCTION D2(F, K)
DIMENSION F(10)
COMMON /BN/DEL
D2 = (F(K-1)-2.*F(K) + F(K+1))/DEL**2
RETURN
END
```

A l'aide de ces sous-programmes de fonction, celui de FORMFF peut être présenté, par exemple, sous la forme simple suivante :

```
SUBROUTINE FORMFF(FF, XX, LM, IMP)
***** ****
DIMENSION FF(LM), XX(LM), W(10), U(10)
COMMON /BN/DEL
REAL LAMBDA, MO
C
C DONNEES ET VALEURS AUXILIAIRES
C
ALPHA=1.15
LAMBDA=1000.
DEL=L
PI=3.141592
C1=ALPHA*.25*PI**2
C2=C1/LAMBDA**2
C
C DEFINITION DES INCONNUES
C
00 51 K=1,10
W(K)=XX(K)
I=K+10
51 U(K)=XX(I)
C
C DEFINITION DU VECTEUR DES RESIDUS
C
FF(1)=2.*W(1)/DEL**2-C1*W(10)
FF(2)=(-2.*W(1)+W(2))/(DEL**2*SQRT(1.-(.5*W(2)/DEL)**2))
1 +C1*(W(1)-W(10))
00 52 K=2,9
I=K+1
52 FF(I)=02(W,K)/SQRT(1.-D1(W,K)**2)+C1*(W(K)-W(10))
FF(11)=U(1)/DEL+.5*(U(1)/DEL)**2+.5*(W(1)/DEL)**2
1 +C2*SQRT(1.-(W(1)/DEL)**2)
00 53 KK=2,10
I=K+1
53 FF(I)=D01(U,KK)+.5*D01(U,KK)**2+.5*D01(W,KK)**2
1 +C2*SQRT(1.-D1(W,KK)**2)
C
C CALCUL ET IMPRESSION DU MOMENT D'ENCASTREMENT
C
IF(IMP.EQ.0) GOTO 999
C
MO=-ALPHA*W(10)
PRINT 101, MO
101 FORMAT(45X,13HMO/(PCR*L) = ,E12.5, /45X,25(1H*)//)
C
999 CONTINUE
RETURN
END
```

Dans le sous-programme ci-dessus, on a remplacé la lettre minuscule k par K et la lettre majuscule K par KK . On remarquera que, pour les points K ou KK suffisamment éloignés de l'extrémité gauche de la barre, les équations correspondantes s'obtiennent par l'application d'une boucle appliquée à une équation rédigée pour une valeur indéterminée de K ou de KK . La définition du système d'équations non linéaire devient ainsi encore plus simple que la définition d'une matrice de coefficients telle qu'on l'utilise dans la plupart des programmes de résolution de systèmes d'équations linéaires.

Notons encore que, dans le sous-programme FORMFF ci-dessus, on a prévu des valeurs particulières des paramètres α et λ (voir 12b) définissant la charge et l'élancement de la barre : $\alpha = P/P_{cr} = 1,15$, $\lambda = l/i = 1000$. Par ailleurs, en plus du calcul des déplacements W_k et U_k , on calcule également le moment d'encastrement que l'on exprime en fonction du produit $P_{cr}l$:

$$M_0 = -P_{w10} = -\alpha W_{10} \cdot P_{cr}l$$

4. Première estimation des inconnues et résultats du calcul

Dans de nombreuses applications du programme SNOLIN aux problèmes non linéaires, il suffit de prendre pour point de départ les valeurs nulles des inconnues. Dans notre cas, ceci n'est pas possible, puisque les valeurs nulles des déplacements transversaux constituent l'une des solutions possibles ; solution qui correspond à l'équilibre instable de la barre. Pour éviter cette solution triviale, on peut par exemple assimiler la déformée à un segment de cercle de longueur l et de rayon r , et l'on obtient, pour la première estimation des déplacements relatifs W_k et U_k , les relations

$$W_k = \frac{r}{l} \left[1 - \cos \left(\frac{1}{10} k \frac{l}{r} \right) \right],$$

$$U_k = \frac{r}{l} \sin \left(\frac{1}{10} k \frac{l}{r} \right) - \frac{1}{10} k.$$

En partant des valeurs que l'on trouve en prenant, par exemple, $r = l$ (ces valeurs sont lues sur les cartes des données) et en admettant une erreur $\epsilon = 0.000001$, on obtient après six cycles d'itération les résultats suivants :

```
CALCUL DE LA COLONNE SOUMISE A UNE CHARGE POST-CRITIQUE
P = 1.15*PCR , L/I = 1000
*****
NOMBRE D'EQUATIONS M= 20
***** ERREUR ADMIS. EPS= .1E-05
*****
CYCLE D'ITERATION NO 6
*****
MO/(PCR*L) = -.68678E+00
*****
I= I RACINES XX(I)= I RESIDUS FF(I)=
-----
1 I W1 = .84728E-02 I -.71054E-14
2 I W2 = .33416E-01 I -.14211E-13
3 I W3 = .73486E-01 I .35527E-13
4 I W4 = .12670E+00 I -.71054E-13
5 I W5 = .19074E+00 I -.21316E-13
6 I W6 = .26320E+00 I .92371E-13
7 I W7 = .34187E+00 I -.15632E-12
8 I W8 = .42460E+00 I .78515E-12
9 I W9 = .51338E+00 I -.38725E-12
10 I W10 = .59720E+00 I .53113E-12
11 I U1 = -.35987E-03 I -.12035E-16
12 I U2 = -.35209E-02 I .16316E-15
13 I U3 = -.11901E-01 I .13739E-14
14 I U4 = -.27237E-01 I -.20539E-14
15 I U5 = -.50427E-01 I .25535E-14
16 I U6 = -.81512E-01 I .12434E-13
17 I U7 = -.11978E+00 I -.10658E-13
18 I U8 = -.16391E+00 I .13767E-13
19 I U9 = -.21217E+00 I .12434E-13
20 I U10 = -.26255E+00 I .62172E-14
```

RÉFÉRENCES

- [1] TIMOSHENKO, S.: *Théorie de la stabilité élastique*. Dunod, Paris 1966, p. 77-82.
- [2] JIROUSEK, J.: *Eléments de calcul non linéaire des structures élastiques*. Publication à tirage limité de la Chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPFL, n° 3, 163 pages.
- [3] JIROUSEK, J.: *Introduction à la statique des surfaces porteuses, Tome I*. Publication à tirage limité de la Chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPFL, n° 6, 222 pages.
- [4] PING-CHUN WANG: *Calcul des structures par des méthodes numériques et matricielles*. Dunod, Paris 1969, p. 26-39.

Adresse de l'auteur :

Jaroslav Jirousek, Dr ès sc. techn.
Professeur à l'EPFL

Chaire de statique et de résistance des matériaux
23, avenues Dapples, 1006 Lausanne