

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 101 (1975)
Heft: 24

Artikel: Méthode générale de calcul élastique et aux états limites ultimes des sections rectangulaires de béton armé, à simple ou double armature, en flexion simple ou composée
Autor: Aribert, J.M. / Wattecamps, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-72596>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Méthode générale de calcul élastique et aux états limites ultimes des sections rectangulaires de béton armé, à simple ou double armature, en flexion simple ou composée

par J. M. ARIBERT et C. WATTECAMPS, Rennes

Introduction et notations

Le présent essai a pour but de réaliser une synthèse de nombreuses méthodes de calcul de pièces rectangulaires en béton armé existant dans la littérature tout en étendant leur champ d'application à la flexion composée. On a tenté d'aboutir à une méthode simple, rapide et aussi générale que possible. Cette méthode consiste à passer par l'intermédiaire de tables de paramètres adimensionnels, valables aussi bien en flexion simple que composée, pour les sections rectangulaires à simple et double armature. Un autre avantage de ces tables est que leur principe d'utilisation reste le même, aussi bien dans un concept de calcul élastique que dans celui d'un calcul aux états limites ultimes. Dans une autre publication, on montrera que la méthode peut être généralisée au cas des poutres en T et à la rigueur de forme quelconque.

Pour parvenir à cette fin, on s'est fixé comme règle de n'utiliser que les hypothèses classiques de la résistance des matériaux et du calcul en béton armé. Ces hypothèses sont les suivantes :

- a) la résistance du béton tendu est négligée ;
- b) les armatures subissent la même variation linéaire que la gaine de béton qui les entoure ;
- c) les sections restent planes après application des efforts (hypothèse de Bernoulli) ; cette hypothèse entraîne certaines relations de similitude entre les déformations des fibres du béton et des armatures ; seules seront mentionnées par la suite les relations utiles à l'exposé ;

d) les efforts perpendiculaires à l'axe de la pièce ne sont pas pris en considération.

Vu que par la suite on n'étudiera que des sections présentant un plan de symétrie, on peut faire les commentaires suivants :

α) Le cisaillement et la torsion n'étant pas étudiés ici, la section est en équilibre sous l'action de forces répondant aux deux équations fondamentales d'équilibre ci-après :

$$\Sigma N = 0 ; \text{ la somme des efforts normaux à la section est nulle.}$$

$$\Sigma M = 0 ; \text{ la somme des moments agissant sur la section est nulle.}$$

β) Une autre conséquence de l'hypothèse d) est qu'il est toujours possible de représenter l'ensemble des efforts s'exerçant sur la section par une force unique N plus ou moins excentrée par rapport à cette section ; le cas de la flexion simple correspond alors au cas limite d'une force $N = 0$ située à l'infini par rapport à la section. En outre, la force N sera dans le plan de flexion de la pièce qui est également son plan de symétrie.

Principales notations :

- N — Résultante des forces normales à la section ;
- M — Moment s'exerçant sur la section (réduit au centre de gravité des aciers A) ;
- h — Hauteur utile de la section ;
- h_t — Hauteur totale de la section ;
- $b(y)$ — Largeur de la section au niveau y ;
- B — Surface totale du béton de la section ;
- B' — Surface comprimée de la section ;
- A — Section totale des aciers les plus tendus ;
- A' — Section totale des aciers les moins tendus ;
- σ_a — Contrainte moyenne des aciers A (positive ou négative) ;
- σ'_a — Contrainte moyenne des aciers A' (positive ou négative) ;
- $\bar{\sigma}_b$ — Contrainte maximale admissible du béton sollicité en compression simple (négative) ;

- σ'_{bm} — Compression moyenne du béton (négative) ;
- σ'_{bs} — Compression de la fibre supérieure du béton (négative) ;
- σ'_{bi} — Compression de la fibre inférieure du béton (négative) ;
- ε_a — Déformation linéique relative de l'acier A ;
- ε'_a — Déformation linéique relative de l'acier A' (avec $\varepsilon'_a \leq \varepsilon_a$) ;
- ε'_b — Déformation linéique relative du béton ;
- ε'_{bs} — Déformation linéique relative de la fibre supérieure du béton ;
- ε'_{bi} — Déformation linéique relative de la fibre inférieure du béton ;
- y_1 — Distance de l'axe neutre à la fibre supérieure 0 ;
- gy_1 — Distance à 0 de la résultante des contraintes de compression du béton respectivement pour

$$y_1 \leq h_t \text{ et } y_1 > h_t ;$$

$$\delta = y_1/h ;$$

$$\delta' = h_t/y_1 ;$$

d, d' — Distances A et A' respectivement à 0 et H (fig. 1.a) ;

l — Distance de N à A ;

θ — Rotation de la section après application de N .

En ce qui concerne les relations de comportement des matériaux, non nécessairement linéaires, on écrira de manière très générale :

$$\text{— pour le béton : } \sigma'_b = f_b(\varepsilon'_b) \quad (1)$$

— pour les aciers A et A' :

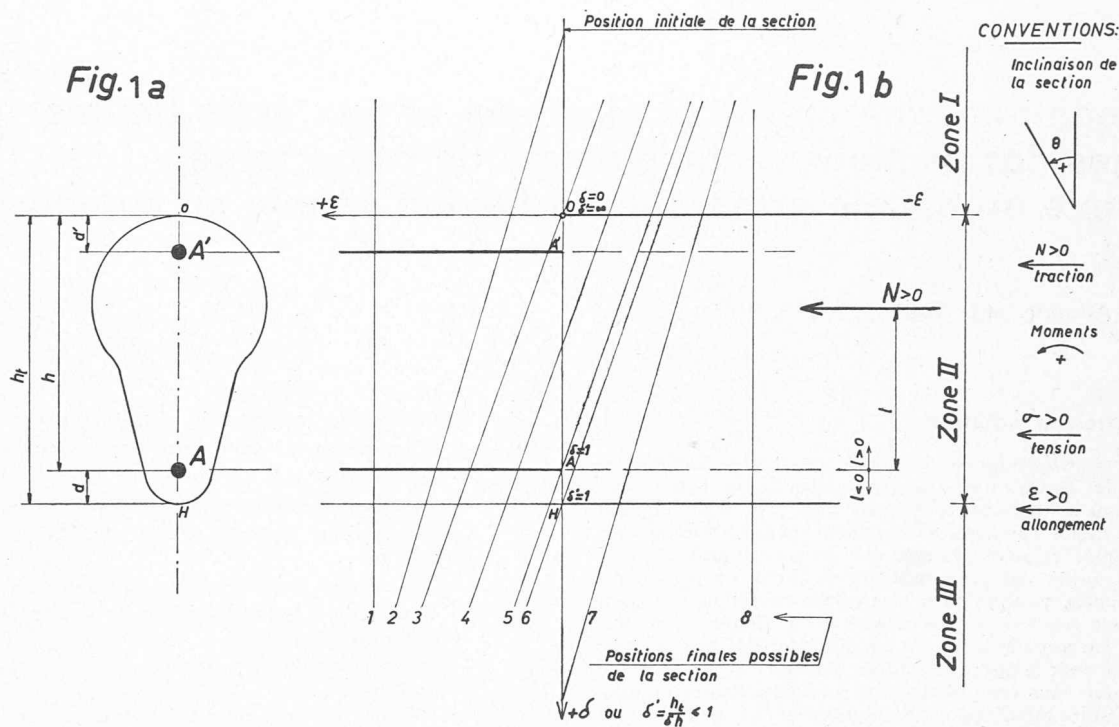
$$\sigma_a = f_a(\varepsilon_a) \text{ et } \sigma'_a = f'_a(\varepsilon'_a) \quad (2)$$

1. Formulation générale de la pièce armée

1.1 Conventions et classification

Soit figure 1.a, une section perpendiculaire à l'axe moyen d'une pièce en béton armé de forme symétrique par rapport à son plan de flexion OH . Cette pièce comporte deux groupes d'armatures, supposées conventionnellement concentrées en leur centre de gravité et dont les sections ont pour valeurs A et A' . Ces deux lettres servent aussi à repérer les armatures de la figure 1. A est le groupe qui subit, après application des efforts, soit le plus grand allongement unitaire, soit le plus petit raccourcissement unitaire : $\varepsilon_a \geq \varepsilon'_a$. Il en résulte que, lors de l'application des efforts, le pivotement de la section θ sera toujours ≤ 0 avec la convention indiquée sur la figure.

Sur la figure 1.b, la position initiale de la section est donnée par l'axe OH , ayant son origine au point 0 et compté positivement vers A . Cet axe est gradué suivant la variable sans dimension $\delta = y_1/h$. Le point A correspond ainsi à la valeur $\delta = 1$. Les déformations unitaires ε sont portées sur un axe horizontal, les tractions étant considérées comme positives. Quel que soit le mode de sollicitation en flexion composée, on peut toujours considérer que la section est soumise à l'action d'une force N unique (comptée positive pour une traction et négative pour une com-



pression), à une distance l du centre de gravité des aciers A . On conviendra de donner au moment (NI) le signe positif s'il fait tourner la section dans le sens trigonométrique.

Après application de la force N , la section prend, par rapport à sa position initiale, une des positions n° 1 à 8 indiquées à la figure 1.b qui peuvent se grouper en 3 zones distinctes suivant l'ordonnée de leur intersection avec l'axe des δ .

1.2 Zone n° I

C'est le cas de la position 2, comprise entre les positions extrêmes 1 et 3; $(-\infty \leq \delta \leq 0)$. Toutes les fibres de la section sont allongées et donc soumises à une traction. Dans ce cas, le béton n'intervient pas et la force N , qui est nécessairement une traction, est équilibrée par les forces de traction $A\sigma_a$ et $A'\sigma'_a$ existant dans les armatures A et A' . La coexistence de A et A' est indispensable. De plus, N se situe nécessairement entre A et A' et (NI) est ≥ 0 .

Les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} N = A\sigma_a + A'\sigma'_a & (3.N) \\ (NI) = A'\sigma'_a(h-d') & (3.M) \end{cases}$$

A noter que pour δ fixé, les taux de travail σ_a et σ'_a ne sont pas indépendants; en effet, on a d'après l'hypothèse de Bernoulli la relation de similitude géométrique suivante (avec $\delta \leq 0$) :

$$\frac{1-\delta}{(d'/h-\delta)} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon'_a} \quad (4)$$

où, d'après (2): $\varepsilon_a = f_a^{-1}(\sigma_a)$ et $\varepsilon'_a = f_a'^{-1}(\sigma'_a)$.

La position 1 est celle où $\varepsilon_a = \varepsilon'_a$, soit : $\delta = -\infty$.

La position 3 est celle où $\delta = 0$, soit : $\varepsilon'_a = \varepsilon_a \frac{d'}{h}$.

Bien que le calcul en zone I soit aisé, le projecteur devra tenir compte que les valeurs ε_a et ε'_a sont limitées par le règlement de béton armé à des valeurs maximales liées au

danger de fissuration du béton et aux conséquences fâcheuses qui peuvent en résulter.

1.3 Zone n° II

Cette zone est comprise entre les positions 3 ($\delta = 0$) et 6 ($\delta = \frac{h_t}{h}$). Elle est caractérisée par le fait que le béton est partiellement comprimé. L'existence de l'acier A' n'est théoriquement nécessaire que lorsque les cas étudiés au paragraphe (1.3.1) ci-après n'équilibrent pas la force N dans des conditions de sécurité suffisantes : l'acier A' vient alors compenser une insuffisance de béton.

La zone II est la plus rencontrée en calcul de béton armé. Elle intervient lorsque :

- une traction est située en dessous de A ((NI) négatif);
- une compression est située au-dessus du noyau central (de la section hétérogène), côté de 0 ((NI) est négatif);
- un moment négatif simple est appliqué; (il correspond à une force N nulle appliquée à $\delta = -\infty$).

On peut écrire l'équilibre des efforts dans la zone II, soit dans le cas de l'existence de A seul, soit dans le cas de l'existence simultanée de A et de A' .

1.3.1 Zone II sans A'

Les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} N = A\sigma_a + B'\sigma'_{bm} & (5.N) \\ (NI) = B'\sigma'_{bm}h(1-g\delta) & (5.M) \end{cases}$$

On a également la relation de similitude suivante :

$$\delta = \frac{-\varepsilon'_{bs}}{\varepsilon_a - \varepsilon'_{bs}}$$

soit :

$$\delta = \frac{1}{1 + \gamma} \quad (6)$$

en posant :

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon'_{bs}} \quad (7)$$

Dans le cas particulier très courant d'une section rectangulaire ($b = c^{te}$), on a :

$$B' = b \delta h ;$$

le système des équations d'équilibre peut être résolu de la manière suivante :

$$(5.M) \Rightarrow \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{(NI)} = \frac{1}{(1-g) \delta} = \beta ; \quad (8.M)$$

$$(5.M) \text{ et } (5.N) \Rightarrow \frac{(N-A \sigma_a) h}{(NI)} = \frac{1}{1-g \delta} = \alpha . \quad (8.N)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres adimensionnels.

1.3.2 Zone n° II avec A'

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} N = A \sigma_a + A' \sigma'_a + B' \sigma'_{bm} \\ (NI) = A' \sigma'_a (h-d') + B' \sigma'_{bm} h (1-g\delta) \end{cases} \quad (9.N)$$

$$(9.M)$$

A et A' sont des paramètres qui ne jouent aucun rôle dans l'architecture de la pièce. Ils sont donc tout désignés, étant donné qu'ils interviennent linéairement dans les formules, pour constituer les deux inconnues du problème. La poutre à double armature est donc, en principe, relativement assez facile à calculer. Il faut cependant tenir compte que σ_a est lié à σ'_a puisque les déformations relatives ε_a et ε'_a obéissent toujours à la relation de similitude géométrique (avec maintenant $\delta \geq 0$) :

$$\frac{1-\delta}{\delta-d'/h} = -\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon'_a} \quad (10)$$

Rappel pratique :

Il est peu probable que les valeurs optimales de σ_a, σ'_a et σ'_{bm} soient atteintes simultanément. Dans la plupart des cas, c'est l'armature A' qui est utilisée avec un σ'_a médiocre. De plus, les barres comprimées donnent lieu à des problèmes de flambement exigeant la pose d'armatures transversales de soutien.

On aura donc recours à l'usage de barres comprimées A' lorsqu'il ne sera pas possible de résoudre le problème en augmentant b ou h.

Dans le cas particulier de la section rectangulaire, les formules (8.N) et (8.M) se généralisent sous la forme :

$$\alpha = \frac{1}{1-g \delta} = \frac{(N-A \sigma_a - A' \sigma'_a) h}{(NI) - A' \sigma'_a (h-d')} \quad (11.N)$$

et

$$\beta = \frac{1}{(1-g \delta) \delta} = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{(NI) - A' \sigma'_a (h-d')} \quad (11.M)$$

1.4 Zone n° III

Cette zone correspond au cas : $\frac{h_t}{h} \leq \delta \leq \infty$ et aux positions de section comprises entre 6 et 8 (fig. 1.b).

Afin d'éviter d'utiliser dans les calculs de trop grandes valeurs de δ , on remplacera δ par δ' tel que :

$$\delta = \frac{h_t}{\delta' h} ; \quad (12)$$

la zone n° III est alors définie par : $1 \geq \delta' \geq 0$.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} N = A \sigma_a + A' \sigma'_a + B \sigma'_{bm} \end{cases} \quad (13.N)$$

$$(NI) = A' \sigma'_a (h-d') + B \sigma'_{bm} (h-g' h_t) \quad (13.M)$$

On a posé ici $g' = g y_1/h_t$.

Les fibres supérieure et inférieure du béton sont soumises respectivement à des compressions σ'_{bs} et σ'_{bi} .

Remarque :

L'hypothèse $\varepsilon_a \geq \varepsilon'_a$ avec sa conséquence $\theta \leq 0$ a été admise uniquement pour clarifier l'exposé. En particulier, la zone III peut être envisagée avec $\theta \geq 0$.

Si, dans ce cas, tout ou partie de la force de compression, soit $|N_1| \leq |N|$, provient artificiellement d'une traction initiale des armatures A et A', ces armatures auront des allongements relatifs initiaux ε_a^0 et $\varepsilon'_a{}^0$ correspondant à des tensions σ_a^0 et $\sigma'_a{}^0$.

Les formules (13.N) et (13.M) restent valables en tenant compte que :

$$\varepsilon_a = f_a(\sigma_a) - f_a(\sigma_a^0) \text{ et } \varepsilon'_a = f'_a(\sigma'_a) - f'_a(\sigma'_a{}^0) \quad (14)$$

et que :

$$\begin{cases} -N_1 = A \sigma_a^0 + A' \sigma'_a{}^0 \\ -(N_1 l) = A' \sigma'_a{}^0 (h-d') \end{cases} \quad (15)$$

Les deux dernières formules (15) s'apparentent à celle de la zone n° I.

On touche ici au domaine du béton précontraint qui sort du cadre de la présente étude.

2. Première application : la méthode dite « élastique »

2.1 Rappel [1]¹

La méthode élastique est la plus ancienne. Elle est basée sur la loi de Hooke, les relations (1) et (2) devenant :

$$\begin{cases} \sigma'_b = E_b \varepsilon'_b ; \\ \sigma_a = E_a \varepsilon_a \text{ et } \sigma'_a = E_a \varepsilon'_a . \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{On pose : } n = \frac{E_a}{E_b} . \quad (17)$$

En France, $n = 15$ par convention (mais d'autres valeurs pourraient être attribuées à n).

On prend généralement : $E_a = 2.000.000$ bars.

Il est également convenu dans cette méthode que, si $\bar{\sigma}_b$ est la tension maximale admissible de calcul en compression simple, on doit avoir impérativement :

$$|\sigma'_{bm}| \leq |\bar{\sigma}_b| .$$

2.2 Sections rectangulaires

2.2.1 Zone n° I

Les formules (3.N) et (3.M) sont directement applicables.

2.2.2 Zone n° II (avec ou sans armature A' comprimée).

La répartition des contraintes dans le béton étant triangulaire, on a :

$$g = 1/3 = 0,333 \quad (18)$$

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

et :

$$\sigma'_{bm} = \frac{\sigma'_{bs}}{2} \quad (19)$$

où on rappelle que σ'_{bs} est la compression du béton de la fibre supérieure.

Les formules (6) et (7) donnent ici :

$$\gamma = \frac{1}{\delta} - 1 = -\frac{\sigma_a}{n \sigma'_{bs}} = -\frac{\sigma_a}{2n \sigma'_{bm}} \quad (20)$$

Les formules (11.N) et (11.M) deviennent respectivement :

$$\alpha = \frac{1}{1-\delta/3} = \frac{(N-A \sigma_a - A' \sigma'_a) h}{(NI) - A' \sigma'_a (h-d')} \quad (21.N)$$

$$\beta = \frac{1}{(1-\delta/3) \delta} = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{(NI) - A' \sigma'_a (h-d')} \quad (21.M)$$

Dans certains problèmes, on peut être amené à se fixer σ_a et non σ'_{bm} ; il est alors utile de substituer σ_a à σ'_{bm} dans la relation (21.M) à l'aide de (20), ce qui conduit à la définition d'un nouveau coefficient adimensionnel :

$$\beta' = \frac{2(1-\delta)}{(1-\delta/3) \delta^2} = -\frac{b h^2 \sigma_a}{n [(NI) - A' \sigma'_a (h-d')]} \quad (21'.M)$$

On notera que dans le cas particulier de la flexion simple (N nul situé à l'infini et $(NI) = M \leq 0$) et en l'absence d'armature comprimée, le rapport

$$k = \alpha/\beta' \quad (22)$$

redonne une valeur classique employée dans la littérature :

$$k = \frac{n A}{b h} \quad (23)$$

Les valeurs des paramètres α , β , β' , γ et k peuvent être tabulées aisément en fonction de δ ; (Table n° 1), par exemple : pour l'intervalle

$$0 \leq \delta \leq 1,25.$$

2.2.3 Zone n° III

La répartition des contraintes dans le béton étant trapézoïdale, on a :

$$g' = \frac{1}{3} \frac{\sigma'_{bs} + 2 \sigma'_{bi}}{\sigma'_{bs} + \sigma'_{bi}} \quad (24)$$

et :

$$\sigma'_{bm} = \frac{\sigma'_{bs} + \sigma'_{bi}}{2} \quad (25)$$

Ces valeurs sont celles à prendre en considération dans les équations (13.N) et (13.M) qui s'écrivent en section rectangulaire :

$$\begin{cases} N = A \sigma_a + A' \sigma'_a + b h_t \sigma'_{bm} & (26.N) \\ (NI) = A' \sigma'_a (h-d') + b h_t \sigma'_{bm} (h-g' h_t). & (26.M) \end{cases}$$

Les taux de travail des aciers et du béton dans ces équations ne sont évidemment pas indépendants puisque les relations de similitude géométrique suivantes :

$$\frac{\epsilon'_{bs}}{\delta h} = \frac{\epsilon'_a}{\delta h - d'} = \frac{\epsilon_a}{h(\delta-1)} = \frac{\epsilon'_{bi}}{\delta h - h_t}$$

entraînent :

$$\frac{n \sigma'_{bs}}{\delta h} = \frac{\sigma'_a}{\delta h - d'} = \frac{\sigma_a}{h(\delta-1)} = \frac{n \sigma'_{bi}}{\delta h - h_t},$$

c'est-à-dire en introduisant $\delta' = h_t/\delta h$:

$$\frac{n}{h_t} \sigma'_{bs} = \frac{1}{h_t - d'} \sigma'_a = \frac{1}{h_t - h \delta'} \sigma_a = \frac{n}{h_t(1-\delta')} \sigma'_{bi} \quad (27)$$

Remarque :

On peut exprimer aisément g' en fonction de δ' . Des deux termes extrêmes de (27), on tire :

$$\sigma'_{bi} = \sigma'_{bs} (1-\delta'),$$

d'où en reportant dans (24) :

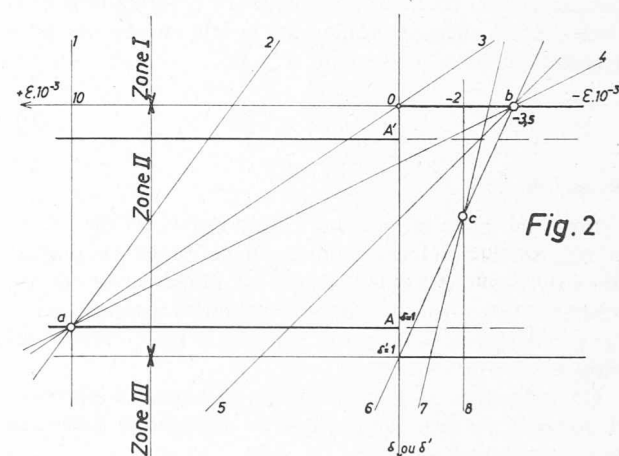
$$g' = \frac{3-2 \delta'}{3(2-\delta')} \quad (28)$$

3. Deuxième application : la méthode aux états limites ultimes

3.1 Rappel

Plus récente que la précédente et peu utilisée, elle est basée sur des conditions limites conventionnelles (résultant d'un grand nombre d'essais) qui sont censées correspondre à la limite de résistance des matériaux acier-béton. On rappelle en passant que la rupture n'est pas la seule condition limite à considérer dans le calcul d'une pièce ; la fissuration ou la flèche peuvent rendre cette pièce inutilisable avant que le danger de rupture soit prépondérant.

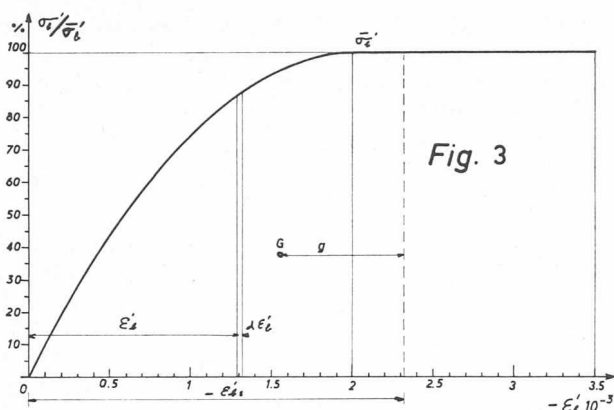
Si les calculs sont menés à partir des états limites précités, la figure générale 1 se transforme en la figure 2.



L'état limite de l'acier en traction est donné par l'allongement relatif $\epsilon_a = 10 \cdot 10^{-3}$. Le raccourcissement relatif du béton en flexion par $\epsilon'_b = -3,5 \cdot 10^{-3}$ et en compression simple par $\epsilon'_b = -2 \cdot 10^{-3}$.

Le principe de la méthode étant qu'un au moins des deux matériaux soit sollicité au maximum, les plans 1 à 8 de la figure 1 se retrouvent sur la figure 2 passant obligatoirement par un des pivots (a), (b) ou (c), déterminés par les allongement précités ; [2] — article R.42 ; 11).

Les relations (2) de comportement des aciers sont parfaitement déterminées à la référence 2 et représentées graphiquement à la figure 4. La relation (1) concernant le béton n'est pas encore définitivement adoptée [2] (article R.42.112 ; 1.2.3). Certains proposent (dans le but de simplifier les calculs) un simple diagramme rectangulaire qui ne correspond en fait à aucune réalité physique. Afin de montrer le caractère général de la méthode présentée ici, on a adopté la forme dite « parabole-rectangle » qui



est une des plus complexes. Toute autre forme serait possible à condition que la fonction (1) soit continue.

La courbe « parabole-rectangle » est représentée à la figure 3; l'équation du tronçon de parabole donnée dans la littérature [3] est la suivante :

$$\frac{\sigma'_b}{\sigma'_e} = -\frac{1}{4} \cdot 10^{+3} \epsilon'_b (4 + 10^{+3} \epsilon'_b).$$

Pour simplifier les développements ultérieurs, on conviendra de considérer les allongements relatifs de l'acier et du béton à un facteur multiplicatif près de 10^{-3} . En particulier, l'équation de la parabole précédente devient :

$$\frac{\sigma'_b}{\sigma'_e} = -\frac{\epsilon'_b}{4} (4 + \epsilon'_b). \quad (29)$$

3.2 Sections rectangulaires

3.2.1 Zone n° I

Tous les plans (1) à (3) correspondant à cette zone passent par le pivot (a) pour lequel $\epsilon_a = 10$ (par convention de notation). Les formules (3.N) et (3.M) sont applicables sans aucune difficulté.

A noter que l'allongement des aciers est 5 fois plus grand que celui que le béton peut supporter sans montrer une fissuration excessive (1 cm par mètre linéaire de béton).

3.2.2 Zone n° II avec pivot (a)

C'est le cas des plans compris entre les positions 3 et 4. On a encore $\epsilon_a = 10$, mais ici le béton intervient.

Même si les aciers A' ne sont pas utilisés de manière optimale, on va considérer le cas général où il existe des armatures A et A' .

Le coefficient γ défini en (7) vaut ici :

$$\gamma = -\frac{\epsilon_a}{\epsilon'_{bs}} = -\frac{10}{\epsilon'_{bs}}, \quad (30)$$

et la position relative de l'axe neutre est donnée par :

$$\delta = \frac{1}{1 + \gamma} = -\frac{\epsilon'_{bs}}{10 - \epsilon'_{bs}}. \quad (31)$$

Le pivot (b) étant fixé à $\epsilon'_{bs} = -3,5$, la zone n° II avec pivot (a) sera caractérisée par l'intervalle :

$$0 \leq \delta \leq \delta_{\max}$$

avec :

$$\delta_{\max} = \frac{3,5}{13,5} \approx 0,259. \quad (32)$$

Les formules générales (11.N) et (11.M) sont applicables. En ce qui concerne la formule (11.M) faisant intervenir σ'_{bm} , il est préférable en vue des applications, de l'écrire en fonction de la tension admissible $\bar{\sigma}_b$. On définira un coefficient K par :

$$K = \frac{\sigma'_{bm}}{\bar{\sigma}_b}. \quad (33)$$

On a alors :

$$\alpha = \frac{1}{1 - g \delta} = \frac{(N - A \sigma_a - A' \sigma'_a) h}{(Nl) - A' \sigma'_a (h - d')} \quad (34.N)$$

$$\beta = \frac{1}{(1 - g \delta) \delta K} = \frac{b h^2 \bar{\sigma}_b}{(Nl) - A' \sigma'_a (h - d')}. \quad (34.M)$$

Le calcul donnerait pour les paramètres K et g à considérer dans ces formules, les expressions suivantes :

a/ pour : $-2 \leq \epsilon'_{bs} \leq 0$ (ou, ce qui revient au même : $0 \leq \delta \leq 1/6$) :

$$\begin{cases} K = -\frac{\epsilon'_{bs}}{12} (6 + \epsilon'_{bs}) = \frac{5}{3} \frac{(3 - 8 \delta) \delta}{(1 - \delta)^2} \\ g = \frac{8 + \epsilon'_{bs}}{4(6 + \epsilon'_{bs})} = \frac{9 \delta - 4}{4(8 \delta - 3)} \end{cases} \quad (35)$$

b/ pour : $-3,5 \leq \epsilon'_{bs} \leq -2$ (ou, ce qui revient au même : $\frac{1}{6} \leq \delta \leq 0,259$) :

$$\begin{cases} K = \frac{3 \epsilon'_{bs} + 2}{3 \epsilon'_{bs}} = \frac{16 \delta - 1}{15 \delta} \\ g = \frac{3 \epsilon'^2_{bs} + 4 \epsilon'_{bs} + 2}{2 \epsilon'_{bs} (3 \epsilon'_{bs} + 2)} = \frac{171 \delta^2 - 22 \delta + 1}{20 \delta (16 \delta - 1)} \end{cases} \quad (36)$$

Les valeurs des paramètres α , β , γ , g et K peuvent ainsi être tabulées aisément en fonction de δ (Table n° II) pour l'intervalle :

$$0 \leq \delta \leq 0,259,$$

caractéristique de la zone n° II avec pivot (a).

3.2.3 Zone n° II avec pivot (b)

C'est le cas des plans compris entre les positions 4 et 6 (cf. fig. 2). Le pivot (b) étant déterminé par la condition $\epsilon'_{bs} = -3,5$, les coefficients γ et δ valent ici :

$$\gamma = \frac{\epsilon_a}{3,5}; \quad (37)$$

$$\delta = \frac{1}{1 + \gamma} = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_a}. \quad (38)$$

Quelle que soit la position de la section fléchie, le béton travaille avec le diagramme « parabole-rectangle » complet, et les paramètres K et g sont constants :

$$\begin{cases} K = 0,8095 \\ g = 0,4160 \end{cases} \quad (39)$$

La tabulation pour l'intervalle $0,259 \leq \delta \leq 1,25$ (suffisant en pratique pour caractériser la zone n° II avec pivot (b)) est donc plus simple que dans le cas précédent.

3.2.4 Zone n° III avec nécessairement le pivot (c)

La section fléchie est située entre les plans 6 et 8 (cf. fig. 2), le pivot (c) étant fixé conventionnellement à la distance $\frac{3}{7} h_t$ de O et à $\epsilon'_b = -2$; [2] (article R.42; 11).

Il en résulte que les raccourcissements unitaires des fibres inférieure et supérieure du béton sont liés par la relation de similitude géométrique :

$$\varepsilon'_{bi} = -\frac{2}{3}(7 + 2\varepsilon'_{bs}) \quad (40)$$

En fonction du paramètre de position de l'axe neutre :

$$\delta' = \frac{h_t}{\delta h} \quad \text{avec } 1 \leq \delta' \leq 0,$$

on peut calculer :

$$\varepsilon'_{bs} = \frac{14}{3\delta' - 7}$$

et :

$$\varepsilon'_{bi} = \frac{14}{3\delta' - 7}(1 - \delta') = (1 - \delta')\varepsilon'_{bs} = \gamma'\varepsilon'_{bs},$$

en posant :

$$\gamma' = 1 - \delta' \quad (41)$$

Le calcul donnerait pour les paramètres K et g' les expressions :

$$K = \frac{\varepsilon'^3_{bs} + 6\varepsilon'^2_{bi} + 12\varepsilon'_{bs} + 8}{12(\varepsilon'_{bs} - \varepsilon'_{bi})} \quad (42)$$

$$g' = \frac{\varepsilon'^3_{bs}\gamma'^2[\varepsilon'_{bs}\gamma'(4-3\gamma')-8(2\gamma'-3)]+8(3\varepsilon'^2_{bs}-4\varepsilon'_{bs}+2)}{4\varepsilon'_{bs}(1-\gamma')[\gamma'^2\varepsilon'^2_{bs}(\gamma'\varepsilon'_{bs}+6)+12\varepsilon'_{bs}+8]} \quad (43)$$

Les paramètres adimensionnels γ' , K et g' sont tabulés en fonction de δ' à la table II, pour l'intervalle $1 \leq \delta' \leq 0$. Ils seront utilisés dans les équations (13.N) et (13.M) qui s'écrivent plus précisément :

$$\begin{cases} N = A\sigma_a + A'\sigma'_a + b h_t K \bar{\sigma}'_b & (44.N) \\ (NI) = A'\sigma'_a(h-d') + b h_t K \bar{\sigma}'_b(h-g'h_t) & (44.M) \end{cases}$$

4. Exemples numériques

Les données des applications numériques qui suivent sont, pour certaines, empruntées à un document rédigé par le bureau SOCOTEC [3]. Les calculs seront effectués parallèlement par la méthode classique élastique (table I) et par la méthode aux états limites ultimes sur la base du diagramme « parabole-rectangle » (table II). Afin de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes (sans chercher évidemment une coïncidence systématique), on supposera que :

— les sollicitations de calcul aux états limites sont obtenues par multiplication des sollicitations réelles avec le coefficient 1,5 (conformément à l'article R.22, 211 du document [2]).

— le béton utilisé a une résistance caractéristique à la compression de 240 bars, conduisant à une résistance (réduite) de calcul en flexion aux états limites de :

$$\bar{\sigma}'_b = 0,85 \times \frac{(-240)}{\gamma_b} = 0,85 \times \frac{(-240)}{1,5} = -136 \text{ bars.}$$

Un tel béton doit en principe présenter les mêmes performances que celles qui sont attribuées par les règles CCBA 68 à un béton de résistance nominale de 270 bars, conduisant à une contrainte moyenne en calcul élastique de :

$$\sigma'_{bm} = -67,5 \text{ bars.}$$

Les nuances d'acier utilisées sont les suivantes :

— en calcul élastique, un acier courant Fe E 40, de contrainte admissible $\bar{\sigma}_a = 2800$ bars ;

— en calcul aux états limites, un acier naturel (ou écroui) de contrainte de calcul 3600 bars.

(Les lois de comportement des aciers sont celles rappelées en (2.1) ou en (3.1).)

4.1 Exemple n° 1 : flexion simple sans armature comprimée [3] (n° 4, 11).

Données : $M = -2.227.000$ daN.cm ; $h = 60$ cm ; $b = 32$ cm.

Inconnues : A , σ'_b ou σ_a .

a/ calcul élastique

On s'efforce de faire travailler le béton à son taux maximal $\sigma'_{bm} = -67,5$ bars. Il en résulte que :

$$\beta = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{M} = \frac{32 \times 60^2 \times (-67,5)}{-2.227.000} = 3,492 ;$$

la table I donne pour cette valeur de β :

$$\alpha = 1,119 \text{ et } \gamma = 2,125.$$

Le taux de travail de l'armature tendue serait donc :

$$\sigma_a = -2 n \gamma \sigma'_{bm} = -2 \times 15 \times 2,125 \times (-67,5) = 4303 \text{ bars.}$$

Cette valeur est manifestement trop élevée. On s'efforce alors de faire travailler l'acier au taux admissible $\bar{\sigma}_a = 2800$ bars. Il en résulte que :

$$\beta' = -\frac{b h^2 \sigma_a}{n M} = -\frac{32 \times 60^2 \times 2800}{15 \times (-2.227.000)} = 9,656 ;$$

la table I donne pour cette valeur de β' :

$$\alpha = 1,146 \text{ et } \gamma = 1,613.$$

D'où :

$$A = -\frac{\alpha M}{\sigma_a h} = -\frac{1,146 \times (-2.227.000)}{2800 \times 60} = 15,2 \text{ cm}^2$$

et

$$\sigma'_{bm} = -\frac{\sigma_a}{2 n \gamma} = -\frac{2800}{2 \times 15 \times 1,613} = -57,9 \text{ bars.}$$

b/ calcul aux états limites ultimes

On adopte pour moment fléchissant de calcul :

$$M = (-2.227.000) \times 1,5 = -3.340.000 \text{ daN.cm}$$

On cherche à faire travailler le béton à la valeur maximale admissible : $\sigma'_b = -136$ bars. Il en résulte que :

$$\beta = \frac{b h^2 \bar{\sigma}'_b}{M} = \frac{32 \times 60^2 \times (-136)}{-3.340.000} = 4,691 ;$$

la table II indique que l'on a le pivot (b) pour cette valeur de β et donne :

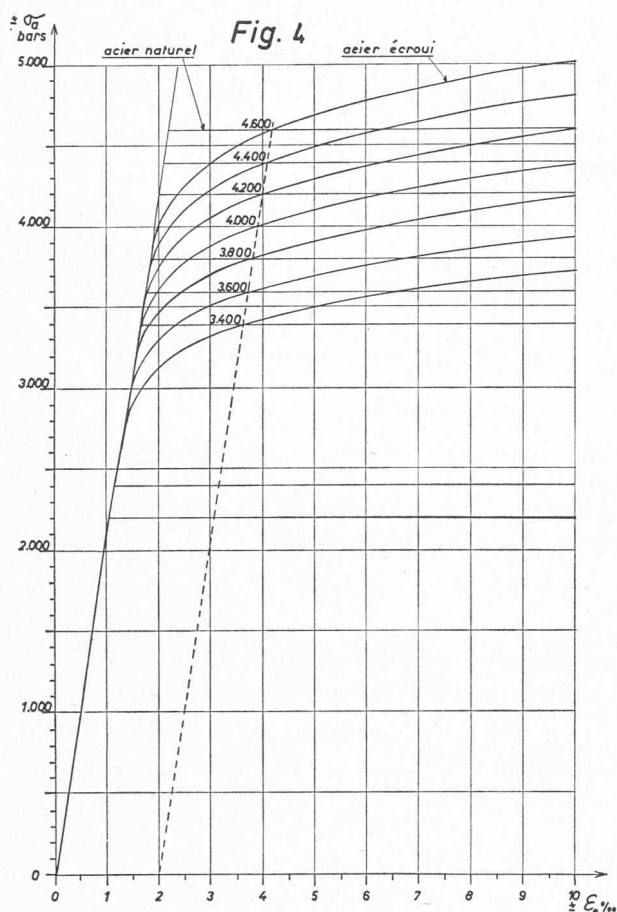
$$\alpha = 1,143 \text{ et } \gamma = 2,322.$$

L'allongement unitaire de l'armature tendue serait donc :

$$\varepsilon_a = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot \gamma = 3,5 \times 2,322 \cdot 10^{-3} = 8,127 \cdot 10^{-3}.$$

Cette valeur est acceptable (puisque inférieure à $10 \cdot 10^{-3}$). Pour cet allongement, la figure 4 donne pour l'acier écroui correspondant à un acier naturel de 3600 bars, un taux de travail de 3880 bars. Finalement, le calcul aux états limites ultimes donne comme solution :

— pour le taux de travail du béton : $\sigma'_{bs} = -136$ bars ;
— pour section d'acier tendu :



• en acier naturel :

$$A = -\frac{\alpha M}{\sigma_a h} = -\frac{1,143 \times (-3.340.000)}{3600 \times 60} = 17,7 \text{ cm}^2;$$

• en acier écroui :

$$A = -\frac{1,143 \times (-3.340.000)}{3880 \times 60} = 16,4 \text{ cm}^2.$$

4.2 Exemple n° 2 : flexion composée sans armature comprimée [3] (n° 4, 12).

Données : $M = -2.413.300 \text{ daN.cm}$; $N = -33.333 \text{ daN}$ (les sollicitations sont évaluées au centre de gravité de la section).

$$h = 60 \text{ cm} ; h_t = 64 \text{ cm} ; b = 32 \text{ cm}.$$

Inconnues : A , σ'_b ou σ_a .

a) calcul élastique

Au préalable, on détermine la distance l entre le centre de pression des sollicitations (N , M) et l'acier tendu A :

$$l = \frac{-2.413.300}{-33.333} + \frac{64}{2} - 4 = 100,4 \text{ cm}.$$

Le béton étant supposé travailler à son taux maximal, le coefficient β vaut :

$$\beta = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{(NI)} = \frac{32 \times 60^2 \times (-67,5)}{(-33.333 \times 100,4)} = 2,324.$$

La table I donne pour cette valeur de β :

$$\alpha = 1,210 \text{ et } \gamma = 0,920.$$

D'où la contrainte de l'armature tendue :

$$\sigma_a = -2n\gamma\sigma'_{bm} = -2 \times 15 \times 0,920 \times (-67,5) = 1863 \text{ bars}.$$

et la section d'acier nécessaire :

$$A = \frac{1}{\sigma_a} \left[N - \alpha \frac{(NI)}{h} \right] = \frac{-33.333}{1863} \left(1 - \frac{1,210 \times 100,4}{60} \right) = 18,3 \text{ cm}^2.$$

b) calcul aux états limites ultimes

Le moment fléchissant et l'effort normal de calcul sont respectivement :

$$\begin{cases} M = (-2.413.300) \times 1,5 = -3.620.000 \text{ daN.cm} ; \\ N = (-33.333) \times 1,5 = -50.000 \text{ daN}. \end{cases}$$

(La valeur de l est évidemment la même que précédemment.) La fibre supérieure du béton étant supposée travailler à la valeur $\bar{\sigma}'_b = -136 \text{ bars}$, on a :

$$\beta = \frac{b h^2 \bar{\sigma}'_b}{(NI)} = \frac{32 \times 60^2 \times (-136)}{(-50.000 \times 100,4)} = 3,121.$$

La table II indique que l'on a le pivot (b) pour cette valeur de β et donne :

$$\alpha = 1,262 \text{ et } \gamma = 1,002.$$

L'allongement unitaire de l'armature tendue est acceptable :

$$\varepsilon_a = 3,5 \cdot 10^{-3} \gamma = 3,5 \times 1,002 \cdot 10^{-3} = 3,507 \cdot 10^{-3}.$$

Pour cet allongement, la figure 4 donne pour l'acier écroui correspondant à un acier naturel de 3600 bars, un taux de travail d'environ 3580 bars. Finalement, la solution est la suivante :

— taux de travail du béton : $\sigma'_{bs} = -136 \text{ bars}$;

— section d'acier tendu :

• en acier naturel :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sigma_a} \left[N - \alpha \frac{(NI)}{h} \right] \\ &= \frac{-50.000}{3600} \left(1 - \frac{1,262 \times 100,4}{60} \right) = 15,4 \text{ cm}^2 ; \end{aligned}$$

• en acier écroui :

$$A = \frac{-50.000}{3580} \left(1 - \frac{1,262 \times 100,4}{60} \right) = 15,5 \text{ cm}^2.$$

4.3 Exemple n° 3 : flexion composée avec armature comprimée [3] (n° 4, 13)

Données : $M = -3.333.300 \text{ daN.cm}$; $N = -53.333 \text{ daN}$ (les sollicitations sont évaluées au centre de gravité de la section).

$$h_t = 64 \text{ cm} ; d = d' = 4 \text{ cm} ; b = 32 \text{ cm}.$$

Section de l'armature comprimée : $A' = 12,56 \text{ cm}^2$ (soit 4 $\varnothing 20$).

Inconnues : A , σ'_b ou σ_a .

a) calcul élastique

Au préalable, on détermine la distance l :

$$l = \frac{-3.333.300}{-53.333} + \frac{64}{2} - 4 = 90,5 \text{ cm}.$$

En supposant que la fibre supérieure du béton travaille à la valeur maximale, on est assuré que la contrainte de

l'acier comprimé est inférieure (en valeur absolue) à : $2 \times 15 \times 67,5 = 2025$ bars. On procède par itérations, en admettant au départ, par exemple :

$$\sigma'_a = -1800 \text{ bars.}$$

On a pour le coefficient β la valeur :

$$\beta_1 = \frac{b h^2 \sigma'_{bm}}{(Nl) - A' \sigma'_a (h - d')} = \frac{32 \times 60^2 \times (-67,5)}{(-53.333 \times 90,5) - 12,56 \times (-1800) \times 56},$$

soit :

$$\beta_1 = 2,184;$$

la table I donne pour valeur correspondante : $\delta = 0,564$; d'où la nouvelle valeur de σ'_a :

$$\sigma'_a = n \sigma'_{bs} \frac{\delta h - d'}{\delta h} = 15 \times 2 \times (-67,5) \frac{0,564 \times 60 - 4}{0,564 \times 60},$$

soit :

$$\sigma'_a = 1786 \text{ bars.}$$

La valeur correspondante de β est alors :

$$\beta_2 = \frac{32 \times 60^2 \times (-67,5)}{(-53.333 \times 90,5) - 12,56 \times (-1786) \times 56} = 2,177.$$

En pratique, cette valeur de β_2 est suffisamment proche de β_1 pour considérer comme correct le taux de compression de l'acier $\sigma'_a = -1786$ bars. La table I donne pour cette valeur de β_2 :

$$\alpha = 1,233 \text{ et } \gamma = 0,766.$$

D'où la contrainte de l'armature tendue :

$$\sigma_a = -2 n \gamma \sigma'_{bm} = -2 \times 15 \times 0,766 \times (-67,5) = 1551 \text{ bars}$$

et la section d'acier nécessaire :

$$A = \frac{1}{\sigma_a} \left\{ N - \frac{\alpha}{h} [(Nl) - A' \sigma'_a (h - d')] - A' \sigma'_a \right\} = \frac{1}{1551} \left\{ -53.333 \left(1 - \frac{1,233 \times 90,5}{60} \right) - 12,56 \times (-1786) \left(1 - \frac{1,233 \times 56}{60} \right) \right\} = 27,4 \text{ cm}^2.$$

b/ calcul aux états limites ultimes

Le moment fléchissant et l'effort normal de calcul sont respectivement :

$$\begin{cases} M = (-3.333.300) \times 1,5 = -5.000.000 \text{ daN.cm} \\ N = (-53.333) \times 1,5 = -80.000 \text{ daN.} \end{cases}$$

On fait au départ deux hypothèses (à vérifier ultérieurement) :

1°) la section tourne autour du pivot (b), d'où $\epsilon'_{bs} = -3,5 \cdot 10^{-3}$;

2°) le raccourcissement de l'acier A' étant nécessairement un peu plus faible (en valeur absolue) que ϵ'_{bs} , on adopte comme première estimation de ϵ'_a la valeur : $-3 \cdot 10^{-3}$.

Il résulte de cette deuxième hypothèse et du diagramme de la figure 4 relatif à un acier écroui à 3600 bars, que la compression correspondante de l'acier A' est environ : $\sigma'_a = -3500$ bars.

D'où :

$$\beta = \frac{32 \times 60^2 \times (-136)}{(-80.000 \times 90,5) - 12,56 (-3500) \times 56} = 3,279.$$

La table II indique que l'on se situe bien en pivot (b) et donne :

$$\alpha = 1,241, \quad \gamma = 1,138 \text{ et } \delta = 0,468.$$

Avec cette dernière valeur de δ , on trouve pour deuxième estimation de ϵ'_a :

$$\epsilon'_a = \epsilon'_{bs} \frac{\delta h - d'}{\delta h} = -3,5 \cdot 10^{-3} \frac{0,468 \times 60 - 4}{0,468 \times 60} = -3,00 \cdot 10^{-3}.$$

Cette valeur étant identique à celle de départ (s'il n'en avait pas été ainsi, on aurait poursuivi les itérations jusqu'à obtenir la bonne valeur de ϵ'_a), les valeurs trouvées pour α et γ sont correctes. D'où :

$$\epsilon_a = 3,5 \cdot 10^{-3} \gamma = 3,5 \cdot 10^{-3} \times 1,138 = 3,98 \cdot 10^{-3},$$

allongement unitaire auquel correspond (d'après la fig. 4) une tension de l'acier (écroui) de : $\sigma_a = 3630$ bars.

La section nécessaire d'acier tendu est donc :

$$A = \frac{1}{3630} \left\{ -80.000 \left(1 - \frac{1,241 \times 90,5}{60} \right) - 12,56 \times (-3500) \left(1 - \frac{1,241 \times 56}{60} \right) \right\}$$

soit :

$$A = 17,3 \text{ cm}^2 \text{ pour un acier écroui.}$$

Pour un acier naturel, on obtiendrait $A = 17,4 \text{ cm}^2$.

4.4 Exemple n° 4 : flexion composée de traction (sans armature comprimée)

Données : $M = -2.227.000$ daN.cm ; $N = + 50.000$ daN.

$h_t = 64$ cm ; $d = d' = 4$ cm ; $b = 32$ cm.

Inconnues : A et σ'_b ou σ_a .

a/ calcul élastique :

$$l = \frac{-2.227.000}{50.000} + \frac{64}{2} - 4 = -16,54 \text{ cm.}$$

$$\beta = \frac{32 \times 60^2 \times (-67,5)}{-(50.000 \times 16,54)} = 9,403.$$

Pour cette valeur de β , la table I donnerait $\gamma = 8,01$, d'où :

$$\sigma_a = -2 n \gamma \sigma'_{bm} = -2 \times 15 \times 8,01 \times (-67,5) = 16 220 \text{ bars.}$$

Cette situation est impossible, σ_a ne pouvant dépasser la valeur admissible de 2800 bars. On utilisera alors le coefficient β' en fixant le taux de travail de l'acier au maximum de 2800 bars :

$$\beta' = -\frac{b h^2 \sigma_a}{n (Nl)} = -\frac{32 \times 60^2 \times 2800}{15 (-50.000 \times 16,54)} = 26,00.$$

D'où, d'après la table I :

$$\alpha = 1,091 \text{ et } \gamma = 2,988.$$

Par conséquent :

$$A = \frac{50.000}{2800} \left[1 - \frac{1,091 \times (-16,54)}{60} \right] = 23,2 \text{ cm}^2$$

et :

$$\sigma'_{bm} = -\frac{2800}{2 \times 15 \times 2,988} = -31,2 \text{ bars.}$$

b/ calcul aux états limites ultimes

La traction de calcul étant : $N = 50.000 \times 1,5 = 75.000 \text{ daN}$, on a :

$$\beta = \frac{32 \times 60^2 \times (-136)}{-(75.000 \times 16,54)} = 12,63.$$

La table II indique que l'on se situe en zone n° II avec pivot (a). Elle donne pour cette valeur de β :

$$\alpha = 1,054 \text{ et } \gamma = 6,130.$$

Il en résulte que :

$$\varepsilon'_{bs} = -\frac{10 \cdot 10^{-3}}{\gamma} = -\frac{10 \cdot 10^{-3}}{6,130} = -1,63 \cdot 10^{-3}.$$

La contrainte σ'_{bs} correspondant à ce raccourcissement unitaire est donnée par l'équation de parabole (29) :

$$\sigma'_{bs} = \frac{(-136)}{4} \times 1,63 (4 - 1,63) = -131,3 \text{ bars.}$$

Quant à la section d'acier tendu, elle vaut :

• en acier naturel :

$$A = \frac{75.000}{3600} \left[1 - \frac{1,054 \times (-16,54)}{60} \right] = 26,9 \text{ cm}^2;$$

• en acier écroui (la figure 4 donnant pour $\varepsilon_a = 10 \cdot 10^{-3}$ la tension de 3900 bars) :

$$A = \frac{26,9}{3900} \times 3600 = 24,8 \text{ cm}^2.$$

4.5 Exemple n° 5 : détermination d'une hauteur de poutre en flexion composée (sans armature comprimée)

Données : $M = -1.200.000 \text{ daN.cm}$; $N = -20.000 \text{ daN}$.

$d = 3 \text{ cm}$; $b = 20 \text{ cm}$.

Inconnues : h minimum et A .

a/ calcul élastique

Les matériaux seront utilisés au mieux de leur capacité en fixant σ_a à 2800 bars et σ'_{bm} à -67,5 bars ; d'où :

$$\gamma = -\frac{2800}{2 \times 15 \times (-67,5)} = 1,383$$

et, d'après la table I :

$$\alpha = 1,162 \text{ et } \beta = 2,771.$$

La distance du centre de pression au centre de gravité de l'acier tendu étant :

$$l = \frac{-1.200.000}{-20.000} + \frac{h + 3}{2} - 3 = \frac{h}{2} + 58,5,$$

la valeur obtenue pour β impose :

$$2,771 = \frac{20 \times h^2 \times (-67,5)}{-20.000 \times \left(\frac{h}{2} + 58,5 \right)},$$

c'est-à-dire :

$$1350 h^2 - 27.710 h - 3.242.070 = 0.$$

La racine positive de cette équation du second degré est :

$$h = 60,3 \text{ cm.}$$

Il en résulte que :

$$l = \frac{60,3}{2} + 58,5 = 88,7 \text{ cm}$$

et que la section d'acier tendu est (compte tenu de la valeur trouvée pour α) :

$$A = \frac{-20.000}{2800} \left(1 - \frac{1,162 \times 88,7}{60,3} \right) = 5,1 \text{ cm}^2.$$

(La hauteur totale de la section est évidemment : $h_t = 60,3 + 3 \simeq 63 \text{ cm}$.)

b/ calcul aux états limites ultimes

Les matériaux seront utilisés au mieux de leur capacité si la section passe simultanément par les pivots (a) et (b).

D'où :

$$\gamma = -\frac{10}{(-3,5)} = 2,857,$$

valeur pour laquelle la table II donne :

$$\alpha = 1,121 \text{ et } \beta = 5,343.$$

La valeur obtenue pour β impose :

$$5,343 = \frac{20 \times h^2 \times (-136)}{(-20.000 \times 1,5) \left(\frac{h}{2} + 58,5 \right)},$$

c'est-à-dire :

$$2720 h^2 - 80.145 h - 9.376.965 = 0.$$

On trouve :

$$h = 75,3 \text{ cm.}$$

D'où :

$$l = \frac{75,3}{2} + 58,5 = 96,1 \text{ cm}$$

et, pour un acier écroui (de $\sigma_a = 3900 \text{ bars}$ à $\varepsilon_a = 10 \cdot 10^{-3}$) :

$$A = \frac{-30.000}{3900} \left(1 - \frac{1,121 \times 96,1}{75,3} \right) = 3,3 \text{ cm}^2.$$

(La hauteur totale de la section serait ici : $h_t = 75,3 + 3 \simeq 78 \text{ cm}$.)

5. Conclusion

On s'est efforcé de montrer dans la présente étude en illustrant la théorie dans les domaines élastique et aux états limites ultimes :

1° Qu'il est toujours possible d'établir une table de coefficients adimensionnels α , β , γ , δ , etc., pour tout couple de relations de comportement des matériaux (1) et (2) conventionnel ou simulant au mieux la réalité physique.

2° Qu'une fois établie la table correspondant à un certain choix des fonctions (1) et (2), les principes de calcul des sections rectangulaires en béton armé, sans avoir à distinguer la flexion simple de la flexion composée, demeurent les mêmes dans tous les cas. Cela permet de passer sans difficulté d'un concept de calcul à un autre.

3° Qu'il suffisait de considérer trois zones pour classer tous les problèmes relatifs au béton armé, en notant que le domaine du béton précontraint, en flexion simple ou

composée, rejoint celui du béton armé sous forme d'une combinaison des zones I et III.

On montrera dans une publication ultérieure que cette théorie peut être étendue au calcul des pièces de formes quelconques, en flexion éventuellement déviée, par une méthode itérative simple et très convergente; le calcul d'une section quelconque est alors ramené à celui d'une suite de sections rectangulaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Règles CCBA 68, Société de diffusion des techniques du Bâtiment et des Travaux Publics, Mai 1968.
- [2] Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton, Comité Européen du Béton, Fédération internationale de la précontrainte, Juin 1970.

VII ANNEXE: EXTRAIT DES TABLES DE PARAMÈTRES ADIMENSIONNELS

On précise que seules les valeurs utiles aux exemples numériques de l'article et celles correspondant à des changements de zone ont été portées dans cette reproduction des tables.

VIII-I Table I pour le calcul élastique ($n = 15$)

α	β	β'	γ	δ	k
1.0000	∞	∞	∞	0.000	0.00000
1.0006	500.333	499.332	499.000	0.002	0.00000
1.0013	250.333	124666.	249.000	0.004	0.00000
1.0020	167.000	55332.8	165.666	0.005	0.00001
1.0026	125.334	31082.8	124.000	0.008	0.00003
1.0373	9.6050	158.661	8.2592	0.108	0.00653
1.0380	9.4369	152.706	8.0909	0.110	0.00679
1.0387	9.2748	147.072	7.9285	0.112	0.00706
1.0395	9.1184	141.735	7.7719	0.114	0.00733
1.0901	4.3956	26.6573	3.0322	0.248	0.04089
1.0909	4.3636	26.1818	3.0000	0.250	0.04166
1.0917	4.3321	25.7178	2.9682	0.252	0.04244
1.0924	4.3011	25.2651	2.9370	0.254	0.04324
1.1185	3.5175	15.0876	2.1446	0.318	0.07413
1.1194	3.4981	14.8670	2.1250	0.320	0.07529
1.1202	3.4790	14.6507	2.1055	0.322	0.07646
1.1210	3.4601	14.4384	2.0864	0.324	0.07764
1.1380	3.1266	10.9259	1.7472	0.364	0.10416
1.1389	3.1118	10.7810	1.7322	0.366	0.10564
1.1398	3.0973	10.6386	1.7173	0.368	0.10713
1.1406	3.0829	10.4986	1.7027	0.370	0.10865
1.1450	3.0132	9.8327	1.6315	0.380	0.11645
1.1459	2.9997	9.7060	1.6178	0.382	0.11806
1.1467	2.9864	9.5814	1.6041	0.384	0.11968
1.1476	2.9732	9.4588	1.5906	0.386	0.12133
1.1485	2.9601	9.3382	1.5773	0.388	0.12299
1.1583	2.8251	8.1308	1.4390	0.410	0.14245
1.1591	2.8135	8.0310	1.4271	0.412	0.14434
1.1600	2.8021	7.9326	1.4154	0.414	0.14624
1.1609	2.7908	7.8358	1.4038	0.416	0.14816
1.1618	2.7796	7.7404	1.3923	0.418	0.15010
1.1627	2.7685	7.6464	1.3809	0.420	0.15206
1.1636	2.7575	7.5539	1.3696	0.422	0.15405
1.1773	2.6048	6.3161	1.2123	0.452	0.18640
1.1783	2.5954	6.2427	1.2026	0.454	0.18875
1.1792	2.5860	6.1702	1.1929	0.456	0.19111

α	β	β'	γ	δ	k
1.1801	2.5767	6.0987	1.1834	0.458	0.19350
1.2087	2.3334	4.3424	0.9305	0.518	0.27834
1.2096	2.3263	4.2947	0.9230	0.520	0.28166
1.2106	2.3192	4.2475	0.9157	0.522	0.28502
1.2116	2.3122	4.2009	0.9083	0.524	0.28842
1.2295	2.1955	3.4501	0.7857	0.560	0.35636
1.2305	2.1895	3.4128	0.7793	0.562	0.36055
1.2315	2.1835	3.3759	0.7730	0.564	0.36478
1.2325	2.1776	3.3395	0.7667	0.566	0.36907
1.2335	2.1717	3.3035	0.7605	0.568	0.37340
1.4970	1.5030	0.0120	0.0040	0.996	124.003
1.4985	1.5015	0.0060	0.0020	0.998	249.001
1.5000	1.5000	0.0000	0.0000	1.000	$\pm \infty$
1.5037	1.4962	-0.0148	-0.0049	1.005	-101.000
1.5075	1.4926	-0.0295	-0.0099	1.010	-51.0049
1.5113	1.4890	-0.0440	-0.0147	1.015	-34.3408
1.6949	1.3779	-0.5153	-0.1869	1.230	-3.28891
1.6997	1.3762	-0.5237	-0.1902	1.235	-3.24515
1.7045	1.3746	-0.5321	-0.1935	1.240	-3.20333
1.7094	1.3730	-0.5403	-0.1967	1.245	-3.16331
1.7142	1.3714	-0.5485	-0.2000	1.250	-3.12500

VIII-II Table II pour le calcul à l'état limite ultime (parabole-rectangle)

α	β	γ	δ	g	K	
1.0000	∞	∞	0.000	0.3333	0.0000	Pivot a
1.0006	50125.3	499.00	0.002	0.3336	0.0099	
1.0013	12551.7	249.00	0.004	0.3338	0.0199	
1.0020	5589.55	165.66	0.006	0.3341	0.0298	
1.0026	3150.66	124.00	0.008	0.3344	0.0397	
1.0528	12.9996	6.2463	0.138	0.3636	0.5868	
1.0537	12.6903	6.1428	0.140	0.3643	0.5531	
1.0546	12.3942	6.0422	0.142	0.3650	0.5992	
1.0556	12.1108	5.9444	0.144	0.3658	0.6052	
1.0565	11.8391	5.8493	0.146	0.3665	0.6112	
1.0653	9.8396	5.0975	0.164	0.3738	0.6601	ZONE II
1.0663	9.6587	5.0240	0.166	0.3747	0.6650	
1.0673	9.4847	4.9523	0.168	0.3756	0.6698	
1.0683	9.3173	4.8823	0.170	0.3765	0.6745	
1.1175	5.4708	2.9370	0.254	0.4140	0.8041	
1.1187	5.4205	2.9062	0.256	0.4147	0.8062	
1.1200	5.3711	2.8759	0.258	0.4155	0.8082	

α	β	γ	δ	g	K	
1.1212	5.3274	2.8461	0.260	0.4160	0.8095	Pivot b
1.1223	5.2917	2.8167	0.262	
1.1233	5.2565	2.7878	0.264	
1.1244	5.2218	2.7593	0.266	
1.1254	5.1877	2.7313	0.268	
1.1265	5.1541	2.7037	0.270	
1.1275	5.1210	2.6764	0.272	
1.1414	4.7319	2.3557	0.298	
1.1425	4.7048	2.3333	0.300	
1.1436	4.6781	2.3112	0.302	
1.1447	4.6518	2.2894	0.304	ZONE II
1.2404	3.2883	1.1459	0.466	
1.2417	3.2776	1.1367	0.468	
1.2430	3.2670	1.1276	0.470	
1.2599	3.1380	1.0161	0.496	
1.2612	3.1286	1.0080	0.498	
1.2625	3.1194	1.0000	0.500	
1.2639	3.1102	0.9920	0.502	
1.7073	2.1176	0.0040	0.996	
1.7097	2.1163	0.0020	0.998	
1.7122	2.1151	0.0000	1.000	Pivot c
1.7183	2.1121	-0.0049	1.005	
1.7245	2.1092	-0.0099	1.010	
1.7307	2.1064	-0.0147	1.015	
2.0476	2.0565	-0.1869	1.230	
2.0564	2.0569	-0.1902	1.235	
2.0652	2.0574	-0.1935	1.240	
2.0741	2.0580	-0.1967	1.245	
2.0831	2.0587	-0.2000	1.250	
		γ'	δ'	g'	K	
		0.00	1.00	0.4160	0.8095	ZONE III
		-0.02	0.98	0.4228	0.8224	
		-0.04	0.96	0.4291	0.8345	
		-0.06	0.94	0.4349	0.8458	
		-0.08	0.92	0.4401	0.8565	
		-0.10	0.90	0.4449	0.8664	
		-0.92	0.08	0.4998	0.9995	
		-0.94	0.06	0.4999	0.9997	
		-0.96	0.04	0.4999	0.9998	
		-0.98	0.02	0.4999	0.9999	
		-1.00	0.00	0.5000	1.0000	

- [3] « Calcul à l'état limite ultime des sections en flexion simple et composée », Document SOCOTEC par MM. ALBIGES, JAL'L et PERCHAT, Février 1972.
- [4] « Le calcul pratique des sections de béton armé », par P. CHARON, Editions Eyrolles, 1973.

Adresse des auteurs :

J. M. Aribert,
Maître de conférences,
Directeur du département de Génie civil

et C. Wattecamp,
Ingénieur civil des Mines,
INSA Rennes,
20, av. des Buttes de Coesmes,
F-35031 Rennes (France).