

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	101 (1975)
<b>Heft:</b>	21
<b>Artikel:</b>	Etude d'une famille d'éléments spatiaux de barre courbe de section rectangulaire variable
<b>Autor:</b>	Derron, Maurice-H. / Jirousék, Jaroslav
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-72583">https://doi.org/10.5169/seals-72583</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Etude d'une famille d'éléments spatiaux de barre courbe de section rectangulaire variable**

par MAURICE-H. DERRON et JAROSLAV JIROUŠEK, Lausanne

*Le développement des théories modernes de calcul des structures et les progrès de la technologie permettent l'utilisation rationnelle d'éléments de construction de plus en plus compliqués. Des études sont entreprises par divers chercheurs pour analyser ces ouvrages par la méthode des éléments finis, dont les résultats peuvent être plus ou moins satisfaisants selon la manière de définir les éléments. Pour juger la valeur d'une proposition, il est indispensable de disposer d'un outil de travail, en l'occurrence un programme de calcul très général, permettant de tester les éléments proposés. La création de cet outil dépasse les possibilités d'un chercheur isolé.*

*Cette étude ne pouvait être entreprise qu'avec l'aide du Fonds national suisse de la recherche scientifique, auquel vont nos plus sincères remerciements.*

### **Introduction**

Au cours des dernières années, on a vu se répandre de plus en plus des constructions formées de barres courbes dans l'espace. De tels éléments peuvent être soit isolés comme la poutre en spirale de la figure 1a supportant un escalier en colimaçon, par exemple, soit assemblés pour former des systèmes plans ou spatiaux de poutres curvilignes croisées (voir les exemples des figures 1b et 1c). Dans certains cas, les barres curvilignes sont associées à des éléments de coque (fig. 1d). Cette application est surtout fréquente dans la construction des avions.

Bien que l'application des méthodes matricielles à l'analyse de systèmes plans ou spatiaux de poutres croisées formées d'éléments rectilignes soit courante aujourd'hui, les systèmes spatiaux de poutres curvilignes croisées n'ont fait l'objet que de quelques travaux de portée limitée. A notre connaissance, les résultats des études publiées se résument principalement à ce qui suit :

[1] Baron propose pour le calcul des barres courbes de l'espace un procédé matriciel basé sur les approximations successives.

[2] Li Shu-t'ien propose une solution approchée des coupoles de révolution formées de barres curvilignes, en assimilant le système à une coque. La solution se limite aux cas de charges symétriques et ne tient pas compte de la flexion et de la torsion des barres.

[3] Eisemann, Who et Namyet assimilent les poutres courbes à une suite de segments rectilignes, ce qui revient à introduire des nœuds supplémentaires le long des poutres.

[4] Jiroušek calcule approximativement les systèmes plans de poutres curvilignes croisées, constitués par un système d'anneaux circulaires et un système d'entretoises radiales, en remplaçant ce dernier par un milieu continu équivalent.

[5] Hutton publie une méthode de calcul de systèmes de poutres curvilignes planes croisées basée sur l'utilisation des séries trigonométriques.

[6] Michalos propose un calcul des systèmes de l'espace par approximations successives en appliquant à tour de rôle la méthode matricielle des forces et la méthode matricielle des déplacements.

[7] Fenton considère des systèmes spatiaux de barres curvilignes constituées de segments circulaires de section constante, dont il développe la matrice de raideur par l'inversion de la relation déplacements-forces.

Le champ d'application de toutes ces études est limité, soit par les simplifications d'ordre géométrique, soit par l'impossibilité de satisfaire certaines conditions aux limites ou de prendre en compte n'importe quel cas de charge ; parfois les algorithmes proposés conduisent à un volume de calcul difficilement tolérable.

Les progrès réalisés dans le calcul matriciel au cours de la dernière décennie ayant clairement démontré les avantages et les ressources de la méthode des éléments finis, il est possible d'envisager un élément très général de barre courbe dans l'espace ; en première étape, nous considérons une barre de section rectangulaire variable, qui peut être représentée avec un minimum de données ; une prochaine étape sera consacrée aux barres de section quelconque. Il s'agit de satisfaire aux conditions suivantes :

— La géométrie de l'élément doit permettre de réaliser avec une précision suffisante une courbe axiale aussi compliquée qu'on le désire et un taux quelconque de variation de la section le long de l'axe. Par ailleurs, il faut pouvoir tenir compte de l'excentricité éventuelle des nœuds par rapport à l'axe de l'élément.

— En vue de l'application au calcul des coques nervurées, le développement de la matrice de rigidité de l'élément doit être basé sur la méthode directe des rigidités plutôt que sur l'inversion de la relation déplacements-forces. Un choix convenable de fonctions paramétriques des déplacements généralisés permettra de satisfaire automatiquement les conditions de continuité aux interfaces des éléments.

— L'élément doit s'appliquer sans restrictions à tous les rapports entre la hauteur de la section et la longueur de la barre. En plus de déformations dues aux moments fléchissants et aux moments de torsion, il doit par conséquent tenir compte également des déformations dues aux efforts normaux et aux efforts tranchants.

En partant des concepts fondamentaux de la méthode directe des rigidités, la dernière des conditions ci-dessus implique qu'il faut dissocier les rotations de la section et les dérivées des déplacements de l'axe des éléments, et donc représenter les déplacements et les rotations par des fonctions géométriquement indépendantes. Une famille d'éléments satisfaisant à ces principes sera présentée ci-après.

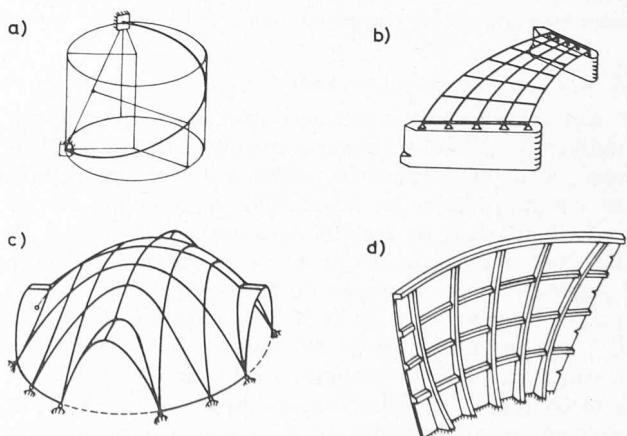


Fig. 1. — Exemples de constructions formées d'éléments spatiaux de barres courbes : a) poutre hélicoïdale, b) pont courbe (grille), c) coupole, d) coque nervurée.

## I. Considérations géométriques

### I.1 Définition d'une famille d'éléments de barre courbe de section rectangulaire variable

Considérons un élément typique de barre courbe à section rectangulaire (fig. 2). L'élément peut être engendré par une section rectangulaire dont le centre de gravité se déplace sur une courbe appelée axe de la barre, les dimensions de la section variant lentement le long de l'axe. L'élément est repéré dans le système dit global d'axes cartésiens  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , commun à tous les éléments de la structure.

Afin de pouvoir définir convenablement la forme de l'élément, il est avantageux d'introduire un système de

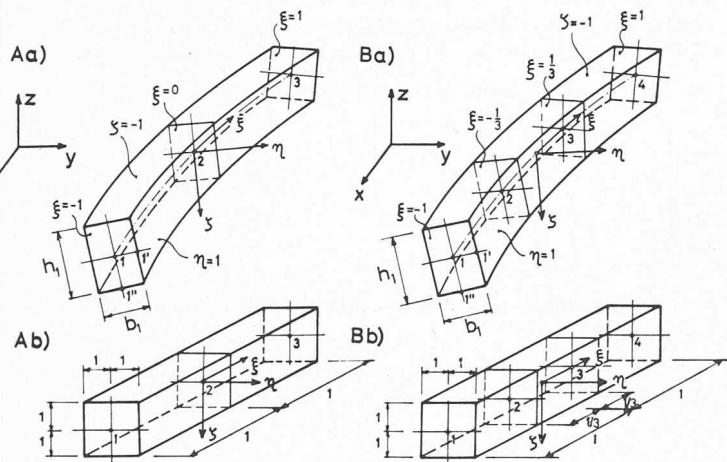


Fig. 2. — Deux membres de la famille d'éléments spatiaux de barre-courbe de section rectangulaire variable (a) et leurs éléments de base (b) : élément quadratique (A), élément cubique (B).

On remarquera que les triplets de points  $L$ ,  $L'$  et  $L''$  (fig. 2), chacun affecté de ses coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  connues, définissent les dimensions des sections nodales  $\xi$  et leur orientation dans l'espace. Pour décrire la forme de l'élément, y compris ses

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{L=1}^M N_L(\xi) \left( \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} x_{L'} - x_L \\ y_{L'} - y_L \\ z_{L'} - z_L \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} x_{L''} - x_L \\ y_{L''} - y_L \\ z_{L''} - z_L \end{pmatrix} \right). \quad (3)$$

La figure 2 montre deux exemples d'éléments courbes définis par la relation (3). On remarquera que le nom de ces éléments (« quadratique » pour  $M = 3$ , « cubique » pour  $M = 4$ ) indique le degré des fonctions de base adoptées pour leur description. De même, pour  $M = 5, 6$ , etc.,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left( \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ y_1 & y_2 & \dots & y_M \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} (x_1' - x_1) & (x_2' - x_2) & \dots & (x_M' - x_M) \\ (y_1' - y_1) & (y_2' - y_2) & \dots & (y_M' - y_M) \\ (z_1' - z_1) & (z_2' - z_2) & \dots & (z_M' - z_M) \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} (x_1'' - x_1) & (x_2'' - x_2) & \dots & (x_M'' - x_M) \\ (y_1'' - y_1) & (y_2'' - y_2) & \dots & (y_M'' - y_M) \\ (z_1'' - z_1) & (z_2'' - z_2) & \dots & (z_M'' - z_M) \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_M \end{pmatrix}, \quad (4a)$$

trois paramètres sans dimensions,  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ , appelés coordonnées curvilignes,  $\xi$  étant la coordonnée curviligne de l'axe de l'élément, tandis que  $\eta$  et  $\zeta$  sont les coordonnées transversales définissant la position d'un point quelconque par rapport à cet axe. De manière générale, l'élément courbe sera géométriquement défini par une correspondance biunivoque entre les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . En pratique, il est commode d'établir les relations

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{et} \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

de telle façon que les coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  varient entre  $+1$  et  $-1$  sur les diverses faces de l'élément. On remarquera alors (fig. 2Ab et 2Bb) qu'un élément courbe représenté dans le système d'axes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  prend la forme du parallélépipède rectangle, dont les côtés sont égaux à deux unités. (Pour des raisons pratiques, on a choisi dans la figure des échelles différentes pour la coordonnée  $\xi$  et pour les coordonnées  $\eta$ ,  $\zeta$ ). Cet élément sera appelé « élément de base ».

Une méthode des plus pratiques pour définir dans l'espace l'axe de l'élément consiste à fixer sur cet axe un certain nombre de nœuds  $L = 1, 2 \dots M$ , répartis plus ou moins régulièrement, et à faire passer par ces points une fonction d'interpolation. En désignant par  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  les coordonnées globales d'un point quelconque de l'axe, on peut par exemple écrire :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \sum_{L=1}^M N_L(\xi) \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix}, \quad (2)$$

où les fonctions  $N(\xi)$ , appelées fonctions de base, prennent une valeur unité en  $L$  et nulle pour tous les autres nœuds  $K \neq L$ . Les polynômes présentant cette propriété sont connus sous le nom de polynômes de Lagrange ; ils ont pour expression :

$$N_L(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{L-1})(\xi - \xi_{L+1}) \dots (\xi - \xi_M)}{(\xi_L - \xi_1)(\xi_L - \xi_2) \dots (\xi_L - \xi_{L-1})(\xi_L - \xi_{L+1}) \dots (\xi_L - \xi_M)}. \quad (2a)$$

dimensions transversales, et aboutir ainsi aux relations du type (1), on peut utiliser à nouveau les fonctions de base (2a). Pour les applications pratiques, il est commode, en effet, de présenter ces relations sous la forme :

nous parlerons des éléments « quartique », « quintique », etc.

Afin de pouvoir définir certaines matrices qui interviendront plus tard dans les calculs pratiques, on peut mettre l'équation (3) sous la forme :

ou encore

$$\{r\} = ([G_0] + \eta [G_B] + \zeta [G_C]) \{N\}. \quad (4)$$

Dans cette dernière équation,  $\{N\}$  est la matrice-colonne des fonctions de base, et  $[G_0]$ ,  $[G_B]$  et  $[G_C]$  sont les matrices géométriques dont la signification est évidente.

En raison de certaines considérations géométriques

$$\begin{aligned} \vec{B}_L &= B_{xL} \vec{i} + B_{yL} \vec{j} + B_{zL} \vec{k} = (x_{L'} - x_L) \vec{i} + (y_{L'} - y_L) \vec{j} + (z_{L'} - z_L) \vec{k}, \\ \vec{C}_L &= C_{xL} \vec{i} + C_{yL} \vec{j} + C_{zL} \vec{k} = (x_{L''} - x_L) \vec{i} + (y_{L''} - y_L) \vec{j} + (z_{L''} - z_L) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5b)$$

On aura alors

$$\vec{r} = \sum_{L=1}^M N_L(\xi) (\vec{r}_L + \eta \vec{B}_L + \zeta \vec{C}_L), \quad (5)$$

qui constitue la troisième forme de l'équation (3).

$$\{r_L\} = \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix}, \quad \{B_L\} = \begin{pmatrix} x_{L'} - x_L \\ y_{L'} - y_L \\ z_{L'} - z_L \end{pmatrix}, \quad \{C_L\} = \begin{pmatrix} x_{L''} - x_L \\ y_{L''} - y_L \\ z_{L''} - z_L \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Ajoutons que chaque section  $\xi = \xi_L$  aura pour normale le vecteur  $\vec{A}_L$  égal au produit vectoriel des vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ :

$$\vec{A}_L = \vec{B}_L \times \vec{C}_L.$$

Notons qu'en pratique la relation (3) (ou ses formes équivalentes (4) et (5)) peut en principe être utilisée de deux manières différentes pour définir la forme de l'élément. Dans la première, on s'en sert pour exprimer approximativement la forme déjà donnée d'un élément par une expression analytique unique et mieux adaptée aux besoins du calcul. C'est la manière que l'on peut qualifier de *passive*. Dans la seconde, au contraire, on se servira de (3) (ou de (4) ou (5)) de manière *active*: en fixant convenablement dans l'espace un nombre approprié de triplets de points  $L$ ,  $L'$  et  $L''$ , cette relation permet d'engendrer des formes aussi compliquées qu'on le désire. On considérera alors la définition (3) (ou (4) ou (5)) comme la forme véritable d'un élément qui, au départ, n'était défini que grossièrement par un nombre limité de points.

## I.2 Coordonnées locales d'une section de l'élément

### I.2.1 Généralités

Afin de pouvoir tenir compte des hypothèses et des lois fondamentales de la théorie classique des barres, on considérera en tout point de l'axe de l'élément un système dit local d'axes orthogonaux, constitué par l'axe  $x^*$  tangent à l'axe de l'élément et des axes  $y^*$  et  $z^*$  confondus avec les axes principaux de la section (voir par exemple la fig. 3). La détermination de ce système local recèle quelques difficultés, propres à la méthode utilisée pour la définition géométrique de l'élément, définition qui, forcément, ne représente qu'imparfaitement la réalité. Il faut notamment remarquer qu'une section  $\xi = \text{const.}$  n'est en général qu'approximativement perpendiculaire à l'axe de l'élément (fig. 3). Nous nous en rendrons facilement compte en étudiant de plus près certaines propriétés de la définition (5).

(voir I.2) il est utile de représenter encore l'équation (3) sous forme vectorielle, par l'introduction du rayon vecteur

$$\vec{r} = \vec{x}i + \vec{y}j + \vec{zk}, \quad (5a)$$

(où  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  désignent les vecteurs-unité selon les axes globaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) et des vecteurs  $\vec{B}_L$  et  $\vec{C}_L$  reliant respectivement les points  $L$ ,  $L'$  et  $L''$ :

En comparant les ensembles de relations (4a), (4) et (5a), (5b), (5), on remarquera aisément que les colonnes des matrices géométriques  $[G_0]$ ,  $[G_B]$  et  $[G_C]$  dans (4) sont respectivement égales aux matrices-colonnes  $\{r_L\}$ ,  $\{B_L\}$  et  $\{C_L\}$  formées par les coordonnées cartésiennes des vecteurs  $\vec{r}_L$ ,  $\vec{B}_L$  et  $\vec{C}_L$ , soit :

On remarquera tout d'abord que la perpendicularité des vecteurs  $\vec{B}_L$  et  $\vec{C}_L$  en tout point nodal  $L$  implique qu'il en sera de même pour tout point  $I$  intermédiaire ( $\xi \neq \xi_L$ ) de l'axe. En effet, en tenant compte de (5) on aura :

$$\vec{B} = \vec{r}_I - \vec{r}_L = \sum_{L=1}^M N_L(\xi) \vec{B}_L, \quad (7a)$$

$$\vec{C} = \vec{r}_{I''} - \vec{r}_I = \sum_{L=1}^M N_L(\xi) \vec{C}_L. \quad (7b)$$

Puisque le produit scalaire des vecteurs  $\vec{B}_L$  et  $\vec{C}_L$  est nul en tout noeud (condition d'orthogonalité  $\vec{B} \cdot \vec{C} = 0$ ,  $L = 1, 2 \dots M$ ), il en résulte nécessairement, en vertu de (7), qu'il en sera de même pour tout point intermédiaire de l'axe. Les sections  $\xi = \text{const.}$  sont alors des rectangles de côtés

$$b = 2 |\vec{B}| \quad \text{et} \quad h = 2 |\vec{C}|, \quad (7)$$

où  $|\vec{B}|$  et  $|\vec{C}|$  sont respectivement les valeurs absolues des vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ .

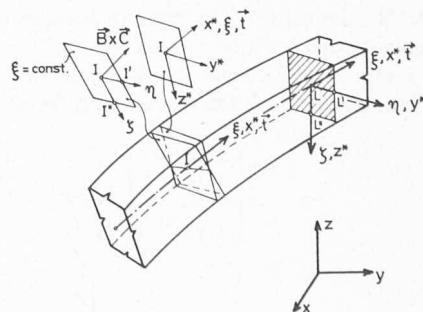


Fig. 3. — Section  $\xi = \text{const.}$  et section perpendiculaire à l'axe en un point intermédiaire de l'élément.

Avec (7a, b), le vecteur  $\vec{A}$  de la normale à une section  $\xi = \text{const.}$  s'écrit :

$$\vec{A} = \sum_{L=1}^M N_L(\xi) \vec{B}_L \times \sum_{L=1}^M N_L(\xi) \vec{C}_L. \quad (7c)$$

En revanche, compte tenu de (5), le vecteur  $\vec{t}$  de la tangente à l'axe de l'élément aura pour expression

$$\vec{t} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right)_{\eta=\xi=0} = \sum_{L=1}^M N'_L(\xi) \vec{r}_L, \quad (8)$$

où le prime désigne la dérivée par rapport à  $\xi$  :  $N'_L(\xi) = dN_L/d\xi$ . La comparaison de ces expressions montre que la définition géométrique (5) de l'élément n'implique pas que la normale à la section  $\xi = \text{const.}$  soit parallèle à la tangente de l'axe.

### I.2.2 Première méthode de définition des axes locaux d'une section

Il découle de la discussion précédente que les sections  $\xi = \text{const.}$  ne peuvent en général être perpendiculaires à l'axe qu'en un nombre limité de points particuliers de l'élément. Si l'on adopte l'expression (5) comme la forme véritable de l'élément, on peut par exemple choisir le triplet de points  $L$ ,  $L'$  et  $L''$  définissant chaque section nodale de telle manière que le plan  $\xi = \xi_L$  soit perpendiculaire à l'axe (voir la section hachurée dans la fig. 3). Si le nombre  $M$  de nœuds est suffisant et si la distorsion de l'élément n'est pas excessive, il n'y a souvent, en tout point intermédiaire de l'axe, que très peu de différence entre les directions des vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{A}$ . En négligeant cette différence, on peut approximativement choisir les axes  $x^*$ ,  $y^*$  et  $z^*$  suivant les vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  définis par les relations (7a, b, c). Les vecteurs-unités  $\vec{i}^*$ ,  $\vec{j}^*$  et  $\vec{k}^*$

suivant ces axes s'expriment alors simplement par les relations

$$\vec{i}^* = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}, \quad \vec{j}^* = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad \vec{k}^* = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}. \quad (9)$$

Ajoutons que les dimensions  $b$  et  $h$  des sections s'obtiennent à l'aide de (7).

### I.2.3 Deuxième méthode de définition des axes locaux d'une section

Une méthode plus précise et plus générale de définition des axes locaux consiste à couper le solide défini par (5) par un plan perpendiculaire à l'axe  $\eta = \zeta = 0$ . La section obtenue n'étant en général pas tout à fait rectangulaire, il s'agira de déterminer une section rectangulaire de remplacement. Ce problème n'est pas univoque et plusieurs formulations ont été tentées. Nous avons finalement retenu celle qui paraît la plus simple. Elle consiste à projeter sur le plan perpendiculaire à l'axe la section  $\xi = \text{const.}$ , soit la section rectangulaire  $ABCD$  de la figure 4a, et à ramener ensuite le parallélogramme  $(A)(B)(C)(D)$  ainsi obtenu à un rectangle  $A^*B^*C^*D^*$  (fig. 4b) par les rotations appropriées  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  de ses axes ( $\eta$ ) et ( $\zeta$ ).

Dans les relations qui suivent, on désignera par  $I$  un point quelconque de l'axe de l'élément. Si l'on appelle  $\vec{R}$  le rayon-vecteur d'un point quelconque du plan perpendiculaire à l'axe, l'équation du plan passant par  $I$  s'écrit :

$$\vec{t}_I \cdot (\vec{R} - \vec{r}_I) = 0. \quad (10)$$

Soit  $(I')$ , respectivement  $(I'')$ , la projection du point  $I'$ , respectivement  $I''$ , sur le plan (10) (fig. 4a). On trouve après un calcul simple :

$$\vec{r}_{(I')} = \vec{r}_{I'} + a' \cdot \vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{(I'')} = \vec{r}_{I''} + a'' \cdot \vec{t}, \quad (11)$$

avec

$$a' = -\frac{\vec{t} \cdot \vec{B}}{|\vec{t}|^2} \quad \text{et} \quad a'' = -\frac{\vec{t} \cdot \vec{C}}{|\vec{t}|^2}. \quad (11a)$$

Si l'on désigne les vecteurs  $(I - (I'))$  et  $(I - (I''))$  respectivement par  $(\vec{B})$  et  $(\vec{C})$ , les longueurs des côtés du parallélogramme  $(A)(B)(C)(D)$ , et par suite aussi celles des côtés du rectangle de remplacement  $A^*B^*C^*D^*$  (fig. 4b), deviennent :

$$b^* = 2 |\vec{B}| \quad \text{et} \quad c^* = 2 |\vec{C}|, \quad (12)$$

avec

$$(\vec{B}) = \vec{r}_{(I')} - \vec{r}_I \quad \text{et} \quad (\vec{C}) = \vec{r}_{(I'')} - \vec{r}_I. \quad (12a)$$

L'angle  $\omega$  compris entre les vecteurs  $(B)$  et  $(C)$  peut être obtenu au moyen de la relation :

$$\cos \omega = \frac{(\vec{B}) \cdot (\vec{C})}{|(\vec{B})| \cdot |(\vec{C})|} = \frac{4}{b^* h^*} (\vec{B}) \cdot (\vec{C}). \quad (13a)$$

Pour le ramener à l'angle droit, on admettra que les rotations  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  (dont la somme est égale à la correction totale  $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \omega - \frac{\pi}{2}$ ) sont telles que les arcs circulaires  $(I')I'^*$  et  $(I'')I''^*$  parcourus pendant la rotation (fig. 4b) sont de longueur égale. Ceci conduit aux expressions

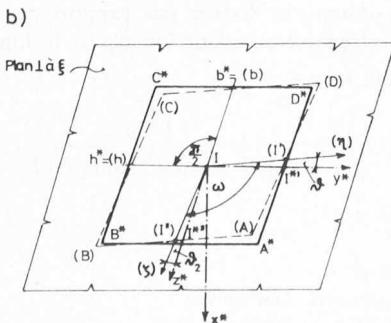
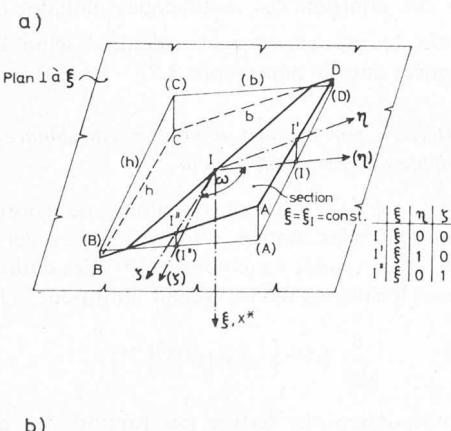


Fig. 4. — Projection de la section  $\xi = \xi_I$  sur le plan perpendiculaire à l'axe et détermination des axes locaux  $x^*$ ,  $y^*$  et  $z^*$ .

$$\vartheta_1 = \frac{h^*}{b^* + h^*} \left( \omega - \frac{\pi}{2} \right) \text{ et } \vartheta_2 = \frac{b^*}{b^* + h^*} \left( \omega - \frac{\pi}{2} \right). \quad (13)$$

La simplicité de l'hypothèse adoptée ici se justifie en raison de l'influence relativement faible des petites corrections angulaires qui interviennent dans la majorité des cas pratiques.

Pour trouver les vecteurs-unités  $\vec{i}^*$ ,  $\vec{j}^*$ ,  $\vec{k}^*$  selon les axes  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  du système local, on exprimera tout d'abord les vecteurs  $\vec{B}^*$  et  $\vec{C}^*$  de longueur quelconque disposés selon les axes  $y^*$  et  $z^*$ . Etant donné que les vecteurs  $(\vec{B}^*)$ ,  $(\vec{C}^*)$ ,  $\vec{B}^*$  et  $\vec{C}^*$  sont coplanaires, les deux derniers peuvent s'exprimer par une combinaison linéaire des deux premiers ; par exemple :

$$\begin{aligned} \vec{B}^* &= (\vec{B}) + a_1 (\vec{C}), \\ \vec{C}^* &= a_2 (\vec{B}) + (\vec{C}), \end{aligned} \quad (14a)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des coefficients inconnus que l'on déterminera en tenant compte respectivement de l'angle connu  $\vartheta_1$  des vecteurs  $(\vec{B})$ ,  $\vec{B}^*$  et de l'angle connu  $\vartheta_2$  des vecteurs  $(\vec{C})$ ,  $\vec{C}^*$ . Après un calcul élémentaire, on obtient les relations

$$\begin{cases} a_1 = \frac{b^*}{h^*} [\sin \omega \cdot \cotg(\omega - \vartheta_1) - \cos \omega], \\ a_2 = \frac{h^*}{b^*} [\sin \omega \cdot \cotg(\omega - \vartheta_2) - \cos \omega]. \end{cases} \quad (14b)$$

Les vecteurs-unités selon les axes locaux auront alors pour expression :

$$\vec{i}^* = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}, \quad \vec{j}^* = \frac{2}{b^*} \vec{B}^*, \quad \vec{k}^* = \frac{2}{h^*} \vec{C}^*. \quad (14)$$

#### I.2.4 Expression matricielle des relations définissant les axes locaux

Pour le calcul sur ordinateur, il convient de remplacer l'ensemble des relations vectorielles donnant les vecteurs-unités  $\vec{i}^*$ ,  $\vec{j}^*$  et  $\vec{k}^*$  par un ensemble équivalent de relations matricielles conduisant aux matrices-colonnes  $\{i^*\}$ ,  $\{j^*\}$  et  $\{k^*\}$ . On y parvient aisément en opérant les substitutions suivantes :

$$\vec{V} \Rightarrow \{V\}, \quad |\vec{V}| \Rightarrow V = \sqrt{\{V\}^T \{V\}}, \quad (15a)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \Rightarrow \{V_1\}^T \{V_2\}, \quad (15b)$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} V_{1y} \cdot V_{2z} - V_{1z} \cdot V_{2y} \\ V_{1z} \cdot V_{2x} - V_{1x} \cdot V_{2z} \\ V_{1x} \cdot V_{2y} - V_{1y} \cdot V_{2x} \end{pmatrix}, \quad (15c)$$

où  $\vec{V}$ ,  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont des vecteurs quelconques, et où l'indice supérieur  $T$  désigne la matrice transposée. Par ailleurs, en partant de (4) plutôt que de (5), on aura :

$$\{B\} = [G_B] \{N\}, \quad \{C\} = [G_C] \{N\}, \quad (16a)$$

$$\{r_I\} = [G_0] \{N\}, \quad (16b)$$

$$\{r_{I'}\} = ([G_0] + [G_B]) \{N\}, \quad \{r_{I''}\} = ([G_0] + [G_C]) \{N\}, \quad (16c)$$

$$\{t\} = [G_0] \{N\}', \quad (16d)$$

où  $\{N\}'$  est la matrice-colonne des premières dérivées par rapport à  $\xi$  des fonctions de base.

### I.3 Compléments

Les développements du chapitre suivant impliquent un certain nombre de relations mathématiques en rapport avec la définition géométrique de l'élément. Nous pensons utile de les résumer ci-après :

#### I.3.1 Intégration sur l'axe de l'élément

Compte tenu des relations (15a, b) et (16d), la valeur absolue  $t = |\vec{t}|$  du vecteur tangent s'écrit

$$t = t(\xi) = \sqrt{\{N'\}^T \cdot [G_0]^T \cdot [G_0] \cdot \{N'\}}. \quad (17a)$$

Avec  $ds = t d\xi$ , l'intégrale d'une fonction  $f(\xi)$  quelconque sur l'axe de l'élément aura pour expression :

$$I = \int_0^l f(\xi) ds = \int_{-1}^{+1} f(\xi) \cdot t(\xi) d\xi. \quad (17)$$

#### I.3.2 Relations entre les coordonnées globales et les coordonnées locales d'un vecteur

Soit  $\vec{V}$  un vecteur quelconque ayant pour expression, suivant le référentiel orthogonal choisi :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = V_x^* \vec{i}^* + V_y^* \vec{j}^* + V_z^* \vec{k}^*.$$

La matrice  $[\Theta]$  qui définit la transformation orthogonale entre les coordonnées cartésiennes,

$$\{V\} = [\Theta] \{V^*\} \quad \text{et} \quad \{V^*\} = [\Theta]^T \{V\}, \quad (18)$$

aura alors pour expression

$$[\Theta] = [\{i^*\} \{j^*\} \{k^*\}], \quad (18a)$$

où  $\{i^*\}$ ,  $\{j^*\}$  et  $\{k^*\}$  sont respectivement les matrices-colonnes des coordonnées cartésiennes globales des vecteurs-unités locaux  $\vec{i}^*$ ,  $\vec{j}^*$ ,  $\vec{k}^*$  calculées selon les relations données dans le paragraphe I.2.

#### I.3.3 Dérivée par rapport à $x^*$ des coordonnées cartésiennes locales d'un vecteur

Soit  $\{V\} = \{V(\xi)\}$  la matrice-colonne des coordonnées cartésiennes globales connues d'un vecteur. La dérivée par rapport à  $x^*$  de la matrice-colonne  $\{V^*\}$  des coordonnées cartésiennes locales du même vecteur aura pour valeur :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \{V^*\} = c [\Theta]^T \{V'\}, \quad (19)$$

où le prime désigne la dérivée par rapport à  $\xi$  et où le coefficient  $c$  est égal à la valeur inverse de la longueur du vecteur tangent  $\vec{t}$  :

$$c = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{\{N'\}^T [G_0]^T [G_0] \{N'\}}}. \quad (19a)$$

(à suivre)

Adresse des auteurs :

Pr<sup>of</sup>esseur Maurice-H. Derron et  
Pr<sup>of</sup>esseur Jaroslav Jiroušek, Dr ès sc.  
Chaire de statique et de résistance  
des matériaux de l'EPFL  
av. Dapples 23, 1006 Lausanne