Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 100 (1974)

Heft: 24

Artikel: Contribution à l'étude des problèmes géométriquement non linéaires des structures élastiques

Autor: Jirousék, Jaroslav

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-72141

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Communication de la chaire de statique et de résistance des matériaux de l'EPF-L, Professeur M.-H. Derron

Contribution à l'étude des problèmes géométriquement non linéaires des structures élastiques

par JAROSLAV JIROUSEK, Lausanne

Lors de la parution de l'article du Dr Jirousek sur le « Calcul des ponts biais à poutres multiples sans entretoises » [1], nous exprimions l'espoir que la Chaire de statique et de résistance des matériaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, grâce aux forces et aux moyens qui venaient de lui être attribués, serait en mesure de développer une activité accrue dans le domaine de la recherche. Cet espoir n'a pas été déçu et nous sommes heureux de présenter aujourd'hui une nouvelle étude conduite jusqu'à l'obtention de résultats concrets dans l'un des domaines — un parmi d'autres — explorés par M. Jirousek. De nombreux problèmes, notamment ceux de stabilité, ne peuvent faire abstraction de la non-linéarité géométrique des déformations. S'il est aujourd'hui possible de s'affranchir d'approximations plus ou moins grossières et de proposer des méthodes de calcul directes, c'est de toute évidence grâce à la présence de l'ordinateur pour le calcul numérique. Encore faut-il faire preuve d'une parfaite maîtrise de l'outil mathématique. Après une analyse remarquable de rigueur et de clarté, l'auteur a développé un programme de calcul appelé à rendre certainement de grands services à de nombreux ingénieurs. On objectera peut-être que la théorie et les applications exposées ci-après supposent tout de même la validité de la loi de Hooke, c'est-à-dire un comportement physiquement linéaire de la matière, alors que toutes les théories modernes de calcul en phase de plasticité cherchent à donner une image plus fidèle de la réalité physique. En fait, ce n'est qu'un supplément de complications apporté au problème et il suffirait pour en tenir compte de s'inspirer des mêmes méthodes d'analyse. Ce pourrait être le sujet de développements ultérieurs.

Prof. M.-H. DERRON.

Avant-propos

Dans le cadre des travaux de recherche de la chaire dans le domaine de la théorie non linéaire des structures, l'auteur a développé, au cours de l'année 1972, un programme standard (SNOLIN) pour la résolution de problèmes impliquant des systèmes d'équations non linéaires. Ce programme, brièvement exposé en appendice à cet article, lui a permis d'aborder de manière très simple un certain nombre de problèmes concrets, tels que le comportement postcritique des barres minces, les effets du second ordre dans les arcs, la mise en précontrainte et l'effet des charges de service dans les systèmes de câbles croisés de l'espace, etc., et de proposer des méthodes de calcul directes. Les problèmes étudiés ont été choisis parmi ceux que l'ingénieur staticien de la pratique ne pourrait souvent pas résoudre, ou pour lesquels il ne disposait que de méthodes longues et compliquées, tendant à saisir le comportement non linéaire de la structure par une suite de pas linéarisés et de corrections successives.

Le présent article se borne à traiter de la théorie des grands déplacements des barres minces (théorie intéressante, notamment, pour l'étude du comportement postcritique) et au calcul des arcs selon la théorie du second ordre. Le calcul des systèmes de câbles croisés de l'espace, qui constituent souvent la structure porteuse des toitures de grande portée, fera l'objet d'une publication ultérieure.

L'étude faisant l'objet de cet article a été terminée en 1972, mais il ne semble pas qu'elle ait pour autant perdu de son actualité.

Théorie des grands déplacements des barres minces

1. Hypothèses de travail et leurs conséquences

La théorie développée ci-après sera basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

— Les déplacements (flèches) sont grands, mais les déformations spécifiques (dilatations ε) restent petites.

— Les sections planes et perpendiculaires à l'axe de la barre avant déformation restent planes et perpendiculaires à l'axe de la barre déformée.

— Le matériau obéit à la loi de Hooke.

Etant donné que par définition les déplacements sont grands, les conditions d'équilibre devront être formulées pour la barre déformée. Par ailleurs, dans les relations géométriques liant les déformations aux déplacements, on ne pourra pas admettre les simplifications usuelles de la théorie des petits déplacements. Notamment, pour la pente φ de la déformée, on ne pourra plus poser $\varphi = \sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dw}{dx}$, où w est la flèche de la barre, et $\cos\varphi$ ne pourra plus être remplacé par l'unité. Les seules simplifications géométriques admises seront celles qui découlent de l'hypothèse des petites déformations ε. Ainsi, de façon générale, on admettra que :

ε est négligeable par rapport à 1,

ε^2 est négligeable par rapport à ε.

2. Géométrie de la déformation d'une fibre de la barre

Par opposition à la conception d'Euler [1] [2], qui dans son étude des grandes flèches produites par le flambage des

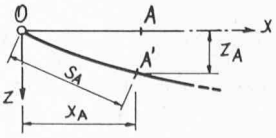

Fig. 1a. — Conception d'Euler.

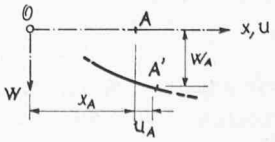

Fig. 1b. — Conception de Lagrange.

[1] Voir *Bulletin technique de la Suisse romande* n° 10, du 13 mai 1972.

[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

barres minces associe les coordonnées orthogonales à l'axe de la barre déformée (figure 1a), nous appliquerons la conception de Lagrange, courante dans la théorie des petits déplacements. Selon cette dernière (figure 1b), les coordonnées du point A' après déformation sont exprimées en fonction des coordonnées du point A avant déformation et des trois composantes du déplacement $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$ suivant les axes des coordonnées.

Dans notre étude, l'axe x est confondu à l'axe de la barre non déformée (axe qui relie les centres de gravité des sections), et nous admettons que la flexion s'opère uniquement dans le plan xz qui est un plan principal des sections de la barre.

La figure 2 montre un élément $\overline{KL}$ d'une fibre de la barre avant et après la déformation. On cherche les expressions de la dilatation ε et de la pente φ de l'élément en fonction de déplacements $u = u(x, z)$ et $w = w(x, z)$, supposés relativement grands.

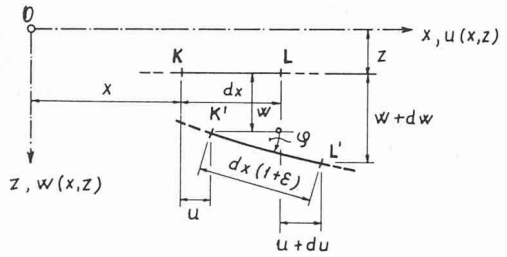

Fig. 2. — Géométrie de la déformation d'une fibre de la barre.

a) *Expression de la dilatation ε en fonction des déplacements*

Le développement selon x des déplacements $u = u(x, z)$ et $w = w(x, z)$, en série de Taylor donne

$$u + du = u + u'dx + \tfrac{1}{2}u''dx^2 + \ldots,$$
$$w + dw = w + w'dx + \tfrac{1}{2}w''dx^2 + \ldots,$$

(les primes désignant les dérivées par rapport à x), d'où l'on trouve pour $dx \to 0$:

$$du = u'dx \quad \text{et} \quad dw = w'dx\,.$$

La longueur de la fibre KL après déformation s'exprime alors, d'après la figure 2 :

$$\overline{K'L'} = \sqrt{(dx + du)^2 + (dw)^2} = dx\sqrt{1 + 2u' + u'^2 + w'^2},$$

d'où la dilatation

$$\varepsilon = \lim_{dx \to 0} \frac{\overline{K'L'} - \overline{KL}}{\overline{KL}} = \sqrt{1 + 2u' + u'^2 + w'^2} - 1\,.$$

De la dernière équation, on tire :

$$\varepsilon + 1 = \sqrt{1 + 2u' + u'^2 + w'^2}\,.$$

En élevant au carré, on a

$$1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 = 1 + 2u' + u'^2 + w'^2\,,$$

d'où, en négligeant ε^2 par rapport à ε, l'expression approchée suivante :

$$\underline{\varepsilon = u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2\,.} \qquad (1)$$

Par ailleurs, aux points où la pente φ est nulle (et par conséquent $w' = 0$) nous avons l'expression exacte de la dilatation

$$\varepsilon = u' \quad \text{si} \quad w' = 0\,. \qquad (1')$$

b) *Expression de la pente φ en fonction des déplacements*

La pente φ de la fibre KL sera définie (figure 2) à partir des fonctions trigonométriques

$$\sin\varphi = \lim_{dx \to 0} \frac{dw}{dx(1 + \varepsilon)}\,, \quad \cos\varphi = \lim_{dx \to 0} \frac{dx + du}{dx(1 + \varepsilon)}\,.$$

En négligeant ε par rapport à 1 et avec $dw = w'dx$, $du = u'dx$, on trouve :

$$\sin\varphi = w' \quad \text{et} \quad \cos\varphi = 1 + u' \qquad (2a, b)$$

Puisque $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$, on peut écrire également :

$$1 + u' = \sqrt{1 - w'^2}\,. \qquad (2c)$$

Aux points où la pente est nulle (et par conséquent $w' = 0$), nous connaissons les valeurs exactes

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \cos\varphi = 1 \quad \text{si} \quad w' = 0\,. \qquad (2a, b)'$$

3. Expression des efforts intérieurs de la barre en fonction des déplacements de son axe

Dans l'alinéa précédent, les symboles $u = u(x, z)$, $w = w(x, z)$ désignaient les composantes du déplacement d'un point quelconque K de la barre. Dorénavant, on désignera par $u = u(x)$, $w = w(x)$ les composantes du déplacement (ou plus brièvement les déplacements) d'un point de l'axe de la barre. Par ailleurs, on désignera par :

ε_0, σ_0 ... la dilatation et la contrainte normale de l'axe de la barre

ε, σ ... la dilatation et la contrainte normale d'une fibre quelconque de la barre

a) *Expression de la contrainte normale σ en fonction des déplacements*

D'après la figure 3, on peut écrire :

$$\overline{A'B'} = \rho d\varphi = \rho\varphi' dx\,,$$
$$\overline{K'L'} = (\rho - z)\, d\varphi = (\rho - z)\, \varphi' dx\,.$$

Sachant que $\overline{A'B'} = (1 + \varepsilon_0)\, dx$ et $\overline{K'L'} = (1 + \varepsilon)\, dx$, on en tire

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - z\varphi'. \qquad (3)$$

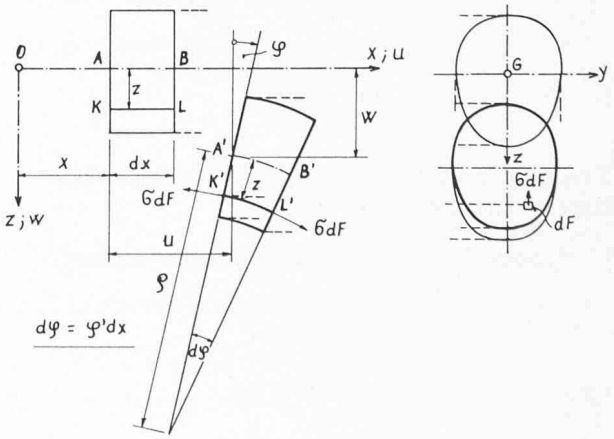

Fig. 3. — Géométrie de la déformation d'un élément de la barre.

En vertu des équations (1) et (2a), on peut poser

$$\varepsilon_0 = u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2 , \tag{3a}$$

$$\varphi = \arcsin w' . \tag{3b}$$

De la dernière relation, on tire encore, en dérivant par rapport à x et avec $\sqrt{1-w'^2} = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi$:

$$\varphi' = \frac{d}{dx}\arcsin w' = \frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} = \frac{w''}{1+u'} . \tag{3c}$$

Finalement, en portant les expressions (3a) et (3c) dans l'équation (3), la dilatation ε s'exprime en fonction des déplacements par

$$\varepsilon = u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2 + \frac{w''}{1+u'}z .$$

Faisant usage de la loi de Hooke, on trouve pour la contrainte normale $\sigma = E\varepsilon$ engendrée par les déplacements $u = u(x)$ et $w = w(x)$ la valeur

$$\sigma = E(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2) + \frac{Ew''}{1+u'}z . \tag{4}$$

Dans une section où la pente φ est nulle, nous avons une expression exacte

$$\sigma = Eu' + Ew''z \quad \text{si} \quad \varphi = 0 . \tag{4'}$$

b) *Expression de l'effort normal N et du moment fléchissant M en fonction des déplacements*

La convention de signes des efforts N et M est définie dans la figure 4. En vertu des conditions d'équivalence statique et compte tenu de (4), on peut écrire

$$N = \int_F \sigma dF = E(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2)\int_F dF - \frac{Ew''}{1+u'}\int_F zdF,$$

$$M = \int_F \sigma z dF = E(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2)\int_F zdF - \frac{Ew''}{1+u'}\int_F z^2 dF.$$

Sachant que le moment statique $S_y = \int_F zdF$ par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section est nul et que les intégrales $\int_F dF$ et $\int_F z^2 dF$ représentent respectivement l'aire F de la section et son moment d'inertie I par rapport à l'axe y, on obtient les expressions suivantes :

$$N = EF(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2), \tag{5a}$$

$$M = -EI\frac{w''}{1+u'} . \tag{5b}$$

En outre, pour une section où la pente φ est nulle, nous avons les expressions exactes

$$\left.\begin{aligned} N &= EFu' , \\ M &= -EIw'' , \end{aligned}\right\} \text{si } \varphi = 0 . \qquad \begin{aligned} &(5a') \\ &(5b') \end{aligned}$$

On remarquera qu'en pratique, l'erreur commise en appliquant les relations (4) ou (5) aux points de pente nulle est négligeable. Pour simplifier les calculs, on se contentera donc des formules uniques (4) et (5a, b).

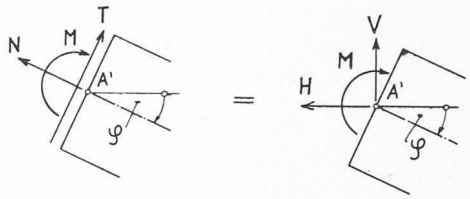

Fig. 4. — Remplacement de l'effort normal N et de l'effort tranchant T par les composantes H et V selon les axes x et z.

4. Conditions différentielles d'équilibre

La formulation des conditions différentielles d'équilibre se simplifie si l'on remplace, dans une section de la barre déformée, l'effort normal N et l'effort tranchant T, dont la direction varie avec la pente φ de la déformée, par les efforts H et V de direction fixe, parallèles respectivement à l'axe x et à l'axe z. Les conditions d'équivalence statique permettent de poser (figure 4) :

$$H = N\cos\varphi - T\sin\varphi ,$$

$$V = N\sin\varphi + T\cos\varphi .$$

En remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs (2a, b), on obtient les composantes H et V en fonction des déplacements de l'axe de la barre :

$$H = N(1+u') - Tw' , \tag{6a}$$

$$V = Nw' + T(1+u') . \tag{6b}$$

Considérons maintenant un élément infinitésimal de la barre déformée (figure 5). La projection des forces selon les axes x et z et les moments dans le plan xz permettent de poser :

$$dH = -hdx ,$$

$$dV = -pdx ,$$

$$dM = -mdx - Hdw + V(dx + du) ,$$

où $h = h(x)$ et $p = p(x)$ sont les composantes horizontale et verticale de la charge répartie et où $m = m(x)$ représente des couples de forces répartis le long de l'axe de la barre. Sachant que $dH = H'dx$, $dV = V'dx$, $dM =$

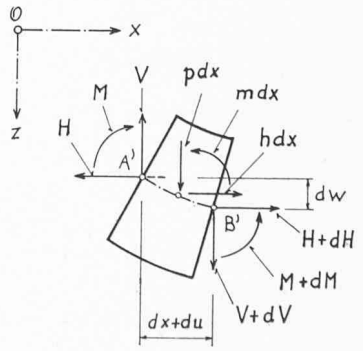

Fig. 5. — Efforts internes et forces extérieures agissant sur un élément de la barre déformée.

$= M'dx$, $du = u'dx$, $dw = w'dx$, où les primes désignent les dérivées par rapport à x, les conditions différentielles d'équilibre s'écrivent après simplification

$$H' = -h\,, \tag{7a}$$

$$V' = -p\,, \tag{7b}$$

$$M' = -m - Hw' + V(1 + u')\,. \tag{7c}$$

La troisième condition d'équilibre peut encore être mise sous la forme connue dans la théorie classique des poutres comme théorème Schwedler :

$$M' = -m + T\,. \tag{7c'}$$

En effet, avec $w' = \sin\varphi$ et $1 + u' = \cos\varphi$, l'expression $-Hw' + V(1 + u') = -H\sin\varphi + V\cos\varphi$ représente la somme des projections perpendiculaires à l'axe de la barre déformée, donc l'effort tranchant.

5. Equations différentielles de la ligne élastique

Les équations différentielles de la ligne élastique s'obtiennent en exprimant les conditions d'équilibre en fonction des déplacements.

Avec (7c'), on peut éliminer des équations (6a, b) l'effort tranchant, et exprimer ainsi les efforts H et V en fonction de l'effort normal N et du moment fléchissant M :

$$H = N(1 + u') - (M' + m)\,w'\,, \tag{8a}$$

$$V = Nw' + (M' + m)(1 + u')\,. \tag{8b}$$

Etant donné les relations (5a, b), on peut maintenant exprimer H et V en fonction des déplacements u et w :

$$H = EF(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2)(1 + u') + \left[\left(EI\frac{w''}{1 + u'}\right)' - m\right]w'\,, \tag{9a}$$

$$V = EF(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w')\,w' - \left[\left(EI\frac{w''}{1 + u'}\right)' - m\right](1 + u')\,. \tag{9b}$$

Si les efforts H et V sont connus d'avance, les relations (9a, b) constituent déjà les équations différentielles de la ligne élastique. Dans le cas contraire, on peut substituer (9a, b) dans les deux premières conditions d'équilibre (7a) et (7b) et l'on trouve *les équations générales de la ligne élastique :*

$$\boxed{\begin{aligned} &[EF(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2)(1 + u')]' + \\ &+ \left\{\left[\left(EI\frac{w''}{1 + u'}\right)' - m\right]w'\right\}' + h = 0\,, && \text{(10a)} \\ &[EF(u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2)\,w']' - \\ &- \left\{\left[\left(EI\frac{w''}{1 + u'}\right)' - m\right](1 + u')\right\}' + p = 0\,. && \text{(10b)} \end{aligned}}$$

Dans certains cas particuliers, ces équations générales peuvent être remplacées par des équations plus simples (voir par exemple le cas traité au paragraphe 6).

6. Résolution des équations différentielles de la ligne élastique et calcul des efforts internes

Les équations différentielles de la ligne élastique étant non linéaires, leur résolution n'est en général possible qu'à

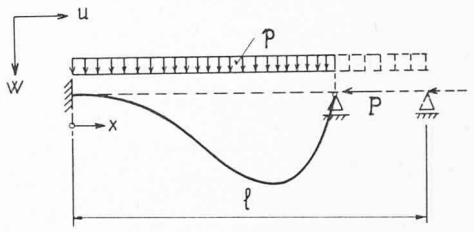

Fig. 6. — Exemple pour la formulation des conditions aux limites dans la théorie des grands déplacements.

l'aide de méthodes numériques approchées (telle que la méthode des différences finies, par exemple) en prenant en considération les conditions aux limites. Dans le cas des équations générales (10a, b), il faut formuler en tout six conditions aux limites (les équations étant du quatrième ordre en w et du deuxième ordre en u). Pour la barre de la figure 6, on pose par exemple, en tenant compte des relations (2) et (5') :

$$\begin{aligned} \text{Pour } x = 0:\ & u = 0, \\ & w = 0, \\ & \varphi = \sin\varphi = 0 \rightarrow w' = 0, \\ & N = -P \rightarrow EF\cdot u' + P = 0. \\ \text{Pour } x = l:\ & w = 0, \\ & M = 0 \rightarrow w'' = 0. \end{aligned}$$

Une fois trouvés les déplacements u et w, les efforts internes N et M s'obtiennent à partir des relations (5a, b). L'effort tranchant T peut être calculé, au besoin, à l'aide de la condition d'équilibre (7c').

7. Application numérique

Trouver la ligne élastique et le moment d'encastrement de la console (figure 7) soumise à une force postcritique $P > P_{cr}$, où P_{cr} est la force critique d'Euler. Utiliser la méthode des différences finies.

1. *Equations différentielles du problème*

Au lieu d'appliquer les équations différentielles (9a, b) (avec $H = -P$ et $V = 0$), on peut obtenir des équations encore plus simples, dans le cas particulier, à partir des conditions suivantes :

$$M = -P[w(l) - w]\,, \qquad N = -P\cos\varphi\,.$$

En utilisant les relations (2b, c) et (5a, b), on trouve après simplification les équations différentielles suivantes :

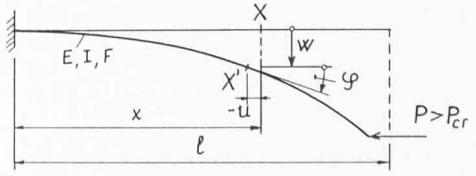

Fig. 7. — Comportement post-critique d'une console mince, étudiée dans l'alinéa 7.

$$\frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} + \frac{P}{EI}\,[w - w(l)] = 0\,, \tag{11a}$$

$$u' + \tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2 + \frac{P}{EF}\sqrt{1-w'^2} = 0\,. \tag{11b}$$

Les conditions aux limites sont en même temps

$$w(0) = 0\,, \qquad w'(0) = 0\,, \qquad u(0) = 0\,. \tag{11c}$$

On remarquera que l'emploi de la relation (2c) a permis de rendre la première équation différentielle indépendante de la seconde.

2. *Modification des équations différentielles pour le calcul à l'ordinateur*

Pour l'étude sur ordinateur, on a avantage à introduire les déplacements relatifs

$$W = \frac{w}{l} \quad \text{et} \quad U = \frac{u}{l}\,. \tag{12a}$$

L'analyse des équations (11a, b) montre que la solution dépend alors seulement de deux paramètres sans dimensions :

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{4\,l^2}{\pi^2}\,\frac{P}{EI} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{l}{i} = \sqrt{\frac{Fl^2}{I}}\,. \tag{12b}$$

En introduisant une coordonnée relative

$$\xi = \frac{x}{l}\,, \tag{12c}$$

et en tenant compte que $(\ldots)' = \dfrac{d}{dx}(\ldots) = \dfrac{1}{l}\dfrac{d}{d\xi}(\ldots)$, on peut poser :

$$w' = \frac{dW}{d\xi} = D_1(W)\,, \quad w'' = \frac{1}{l}\frac{d^2W}{d\xi^2} = D_2(W)\,,$$

$$u' = \frac{dU}{d\xi} = D_1(U)\,. \tag{12d}$$

On obtient alors pour W et U les équations différentielles suivantes :

$$D_2(W)\,/\sqrt{1-D_1^2(W)} + \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 [W - W(\xi=1)] = 0\,, \tag{13a}$$

$$D_1(U) + \tfrac{1}{2}D_1^2(U) + \tfrac{1}{2}D_1^2(W) + \frac{\alpha}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{1-D_1^2(W)} = 0\,, \tag{13b}$$

avec les conditions aux limites

$$(W)_{\xi=0} = 0\,, \quad [D_1(W)]_{\xi=0} = 0\,, \quad (U)_{\xi=0} = 0\,. \tag{13c}$$

3. *Expressions approchées des dérivées au moyen des différences finies*

On désignera (figure 8) par des chiffres arabes ($k = 0, 1, 2 \ldots$) les points pivots et par des chiffres romains ($K = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \ldots$) les centres des sous-intervalles $\Delta\xi$. Pour exprimer les dérivées première et seconde, on utilisera les expressions classiques basées sur un polynôme d'interpolation du deuxième degré. Soit $f = f(\xi)$ une fonction de ξ, alors les dérivées première et seconde en un point pivot k auront pour expression :

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)_k \cong \frac{1}{2\,\Delta\xi}\,(f_{k+1} - f_{k-1}) = \frac{1}{2\,\Delta\xi}\,\boxed{-1}\boxed{}\boxed{1}\,, \tag{14a}$$

$$\left(\frac{d^2f}{d^2\xi}\right)_k \cong \frac{1}{(\Delta\xi)^2}\,(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) = \frac{1}{(\Delta\xi)^2}\,\boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}\,. \tag{14b}$$

Par ailleurs, au centre du sous-intervalle $k-1$, k, nous avons encore

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)_K \cong \frac{1}{\Delta\xi}\,(f_k - f_{k-1}) = \frac{1}{\Delta\xi}\,\boxed{-1}\boxed{1}\,. \tag{14c}$$

4. *Plan de la solution par la méthode des différences finies*

Pour assurer une précision suffisante du calcul approché par la méthode des différences finies, le domaine de validité des équations différentielles (13a, b) sera divisé en dix sous-intervalles de longueur $\Delta\xi = {}^1/_{10}$ selon la figure 9. Les inconnues du problème sont alors les déplacements relatifs U et W aux points pivots. En utilisant les expressions (14), on remplacera désormais $\cong$ par $=$.

En appliquant la première et la troisième des conditions aux limites (13c), on a tout de suite : $W_0 = U_0 = 0$. La deuxième condition exprimée à l'aide de l'expression approchée de la dérivée première (14a) donne :

$$[D_1(W)]_{\xi=0} = \frac{1}{2\,\Delta\xi}\,(W_1 - W_{-1}) = 0\,, \quad \text{d'où } W_{-1} = W_1\,.$$

En tenant compte de ces conditions, les inconnues qui restent (figure 9) sont les déplacements relatifs transversaux W_1, $W_2 \ldots W_{10}$ et longitudinaux U_1, $U_2 \ldots U_{10}$. Pour les déterminer, on remplacera dans les expressions (12d) des fonctions $D_1(U)$, $D_1(W)$ et $D_2(W)$, les dérivées premières et secondes par rapport à ξ par leurs expressions approchées (14a, b, c) et l'on écrira :

l'équation (13a) en $k = 0$ à 9
(10 équations pour W_1 à W_{10}),

l'équation (13b) en $K = \mathrm{I}$ à X
(10 équations pour U_1 à U_{10}).

On obtiendra alors un système de 10 équations ordinaires mais non linéaires pour les inconnues W_1 à W_{10} et un système semblable de 10 équations non linéaires pour les inconnues U_1 à U_{10}.

5. *Utilisation du programme SNOLIN et résultats de calcul*

Pour résoudre un système d'équations non linéaires, on utilisera le programme SNOLIN. Avant de poursuivre, le lecteur est prié de se familiariser avec la description de ce

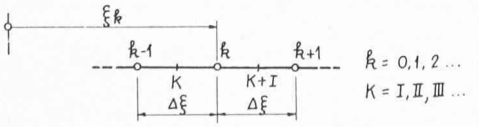

Fig. 8. — Désignation des points-pivots et des centres des sous-intervalles dans les expressions aux différences finies.

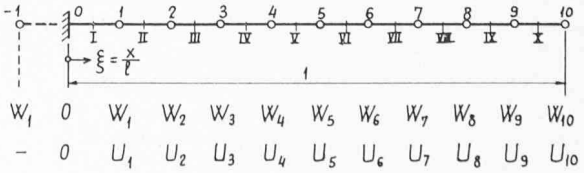

Fig. 9. — Subdivision du domaine de validité des équations différentielles (13) pour l'application de la méthode des différences finies.

programme, donné dans l'appendice A. Pour définir le système d'équations non linéaires que l'on désire résoudre et pour calculer le moment d'encastrement de la barre, il faut rédiger un sous-programme FORTRAN appelé FORMFF. Ce sous-programme est donné dans l'appendice B.

En prenant pour les paramètres α et λ les valeurs particulières, on peut étudier leur influence sur le comportement post-critique de la barre. Dans l'appendice B sont montrés les résultats que l'on a par exemple obtenus en posant $\alpha = 1{,}15$ et $\lambda = 1000$. On voit que les déplacements de l'extrémité libre de la barre provoqués par une charge P dépassant de 15 % la force critique d'Euler sont alors :

$$w\,(x = l) = 0{,}597\,l\,, \qquad u\,(x = l) = -0{,}263\,l\,.$$

Le moment d'encastrement vaut en même temps

$$M_0 = -0{,}687\,P_{cr} \cdot l\,,$$

où $P_{cr} = \pi^2\,EI/4\,l^2$ est la force critique d'Euler.

6. *Restriction*

Pour les valeurs de P dépassant fortement la force critique d'Euler P_{cr} et où en certains points de la déformée la pente φ est proche de 90°, la solution approchée basée sur les équations (11a, b) peut échouer. Puisque dans ces cas la dérivée première w' peut dépasser l'unité, l'expression $\sqrt{1-w'^2}$ peut conduire à une racine imaginaire. Ce défaut, conséquence du fait que l'on néglige ε par rapport à 1, aurait pu être évité si l'on n'avait pas utilisé la relation (2c) et remplacé dans l'expression (5b) $(1 + u')$ par $\sqrt{1-w'^2}$. On aurait alors perdu l'avantage d'avoir une première équation indépendante de la seconde, avantage dont on n'a finalement pas profité pour ne pas compliquer la programmation, mais qui pourrait avoir une certaine importance économique (temps de calcul), si le nombre d'équations non linéaires était beaucoup plus élevé.

8. Remarques

La méthode développée dans les paragraphes précédents trouvera son application surtout dans les cas plus compliqués que le simple problème de la figure 7. Les équations générales (10a, b) permettent notamment de tenir compte de la variation de section et de prendre en considération des conditions quelconques aux limites et une répartition quelconque de la charge. Puisque la solution tient compte des déformations dues à l'effort normal N, elle peut s'appliquer également aux cas où les conditions d'appui (les deux extrémités fixées longitudinalement) rendent hyperstatique la composante H des efforts internes de la barre.

Les relations fondamentales de la méthode ont été développées en admettant que les déformations spécifiques ε sont négligeables par rapport à l'unité. Cette restriction peut être levée et l'on obtient, en suivant un raisonnement analogue, des relations qui s'appliquent non seulement aux grands déplacements mais aussi aux grandes déformations. Cette possibilité n'a pas été envisagée, du fait que les matériaux courants ne peuvent supporter élastiquement que de faibles déformations.

Si l'on remplace la loi de Hooke par une relation contrainte-déformation non linéaire, $\sigma = f(\varepsilon)$, on peut obtenir, pour une fonction $f(\varepsilon)$ donnée, les relations particulières permettant de traiter les problèmes qui sont non linéaires non seulement géométriquement mais également physiquement.

En transformant les équations différentielles non linéaires d'un problème en un système d'équations non linéaires mais ordinaires, on a utilisé, dans l'exemple traité au paragraphe précédent, les expressions classiques de la méthode des différences finies. Au lieu de ces expressions simples qui correspondent à un polynôme d'interpolation du second degré, on peut également utiliser des expressions plus précises basées sur les polynômes d'interpolation de degré plus élevé. De telles expressions basées sur des polynômes jusqu'au sixième degré inclus sont répertoriées dans la publication [3], pages IV-23 à IV-28. Leur application conduit à une économie appréciable du temps de calcul puisque l'on peut utiliser, sans affecter défavorablement la précision, des sous-intervalles beaucoup plus grands, ce qui conduit à résoudre un nombre moins élevé d'équations non linéaires. *(à suivre)*

ESPOIRS ET LIMITES DES SOURCES D'ÉNERGIE PRIMAIRES NON CONVENTIONNELLES

Sous ce titre, l'ASE [1] a organisé, en commun avec l'UCS [2] et avec la Convention des Sociétés nationales d'électriciens de l'Europe occidentale, deux journées d'information les 11 et 12 octobre 1974 à l'EPF à Lausanne. Environ 250 participants ont témoigné d'un intérêt très vif pour ces questions et ont animé une discussion nourrie.

En guise de préface à ces journées d'information, le *Bulletin technique* a publié, dans le numéro 20 du 29 septembre 1974, un article du professeur J.-J. Morf, sur les ressources mondiales de puissance et d'énergie.

Le *Bulletin technique* a le plaisir de publier ci-après l'allocution du Dr h.c. A. W. Roth, vice-président de l'ASE, le tableau énergétique mondial que le professeur J.-J. Morf, président des journées, a présenté avec M. M. Roux pour introduire les deux journées, les résumés des conférences et l'essai de synthèse qui a clos les débats.

Par convention plus ou moins tacite entre les gouvernements et les grands producteurs d'énergie, les besoins énergétiques du monde sont *actuellement* couverts par les combustibles fossiles, les ressources hydrauliques et la fission de l'uranium. En prévision de l'épuisement probable du pétrole et du gaz naturel, il était intéressant d'examiner les possibilités de recourir à des sources primaires d'énergie moins conventionnelles, soit en retournant à des formes classiques comme l'énergie du vent et du soleil ou à des formes nouvelles comme la fusion.

Un tirage à part du texte intégral de toutes les conférences et des discussions très nourries qui ont animé ces journées peut être obtenu au Secrétariat administratif de l'ASE, case postale, 8034 Zurich, au prix de Fr. 40.— (Fr. 20.— pour les membres d'une société d'électriciens).

W. Peter.

[1] Association suisse des électriciens.

[2] Union des centrales suisses d'électricité.

Allocution de M. A. W. Roth, Dr. h.c., vice-président de l'Association suisse des électriciens

Monsieur le Président, Mesdames, Messieurs,

En tant que représentant de l'Association suisse des électriciens, au nom de l'Union suisse des centrales électriques et au nom également de la Convention des Sociétés nationales d'électriciens de l'Europe occidentale, j'ai l'honneur d'ouvrir les journées d'information auxquelles vous avez bien voulu assister.

Je ne voudrais pas empiéter sur les domaines des éminents spécialistes qui traiteront les aspects techniques des questions que nous nous posons tous, mais j'essayerai de situer ces travaux souvent méconnus, parfois aussi surestimés, dans un cadre général.

La démarche de l'homme dans l'univers terrestre est caractérisée par une émancipation croissante vis-à-vis de son entourage naturel. Par sa faculté de travail intelligent, il s'est libéré des sujétions du comportement instinctif, caractéristiques de la nature animale. Une donnée fonda-