

|                     |  |
|---------------------|--|
| <b>Zeitschrift:</b> | Bulletin technique de la Suisse romande  |
| <b>Band:</b>        | 100 (1974)   |
| <b>Heft:</b>        | 21   |
| <b>Artikel:</b>     | Risques relatifs aux crues: réflexions à propos des résultats d'une analyse concernant la Suisse au nord des Alpes |
| <b>Autor:</b>       | Bruschin, Jacques / Falvey, Henry T.   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-72135">https://doi.org/10.5169/seals-72135</a>                              |

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Risques relatifs aux crues**

### **Réflexions à propos des résultats d'une analyse concernant la Suisse au nord des Alpes**

par JACQUES BRUSCHIN et HENRY T. FALVEY

#### **1. Origine du problème**

L'utilisation toujours plus répandue de l'analyse fréquentielle des crues dans le choix de la crue de projet est-elle une simple question de mode ? Nous ne le pensons pas. En effet, si la conception de tout ouvrage construit en rivière comporte des décisions liées au régime hydrologique de celle-ci, ces décisions impliquent deux catégories de risques :

- les risques concernant l'accomplissement de la fonction de l'ouvrage, soit le « degré de satisfaction » des besoins motivant sa construction,
- les risques engendrés par l'existence même de l'ouvrage une fois construit.

Pendant longtemps, les ingénieurs ont tout simplement ignoré ce problème, soit en laissant entendre que la réalisation de leurs projets ne comportait aucun risque, ce qui n'honore pas leur honnêteté professionnelle, soit en « éliminant » le risque par l'adoption de critères de dimensionnement tels que le PMF (Probable Maximum Flood — crue maximum probable), notion fallacieuse sur laquelle nous reviendrons, ce qui, à son tour, n'honore pas leur jugement. Cette position, il faut le dire, est une réponse au besoin fondamental de sécurité éprouvé par tout homme ou collectivité, besoin ressenti d'autant plus profondément que les intérêts en jeu sont plus grands.

Si les ingénieurs ont ainsi essayé de rassurer leur clientèle, une longue série d'accidents et de catastrophes dont nous ne citerons que les inondations de 1970 dans le golfe de Bengale où périrent après le débordement des digues, en une seule nuit et sur la seule île de Char Jabbar, plus de 6000 personnes et celles de 1972, dans le NE des USA, dues à l'ouragan Agnès qui ont produit des dommages évalués à environ \$ 3 000 000 000 dans une zone « protégée » par des travaux effectués pendant plus de trente ans, ont fortement entamé l'assurance des uns et la confiance des autres.

C'est bien cette évolution qui rend de nos jours si malaisée l'attitude « paternaliste » et plonge la profession dans l'embarras. Que faut-il lui substituer ?

Pourquoi en définitive ne pourrait-on faire comprendre à ces mêmes gens qui assument quotidiennement des risques dans les affaires ou en se soumettant à des interventions chirurgicales — or là les risques sont souvent supérieurs à 50 % — que les problèmes du dimensionnement d'une structure métallique dont tous les éléments sont contrôlés par les techniciens, sont d'une toute autre nature que ceux liés à la formation des crues, résultant de phénomènes naturels qui échappent à notre contrôle ? Il devien-

drait clair alors que les incertitudes concernant les deux types de problèmes ne peuvent pas être évaluées à la même échelle et le fait de les retrouver souvent ensemble dans le même projet n'y change rien.

Ceci dit, la question qui se pose immédiatement est de savoir si nous disposons de moyens pour évaluer ce degré d'incertitude, c'est-à-dire chiffrer le risque qu'elle implique. La réponse a été cherchée dans la théorie des probabilités et les statistiques mathématiques déjà largement utilisées dans d'autres domaines.

C'est ainsi que dans les années 30 on assiste aux premiers développements importants des techniques d'analyse fréquentielle des crues. Les controverses concernant les méthodes ainsi que l'état d'esprit général ont fait que les résultats obtenus ne furent utilisés que pour des analyses économiques dans le cadre de projets n'impliquant pas de risques pour la vie humaine.

Pour résoudre ce dernier problème, l'US-Weather Bureau a mis au point dans les années 40 la méthode de la « précipitation maximum possible » (PMP), notion transformée dix ans plus tard, et sans autre changement, en « précipitation maximum probable », à l'origine de la crue maximum probable (PMF, abréviation anglaise). Cette méthode, comme toutes les autres qui partent du principe que nous pouvons déterminer la limite supérieure d'un débit de crue (dont aussi la formule de Hofbauer proposée par la SFRD<sup>1</sup>), comporte deux vices fondamentaux :

- sans parler des écarts considérables introduits par les mesures et des jugements différents, il n'y a ni preuves ni raisons de croire que la nature connaît de telles limites [1, 2, 3]<sup>2</sup>. Peut-on, par exemple, déterminer avec précision la durée maximum de vie de l'homme ?
- proposer une méthode « sans risque » revient ici à admettre que la valeur de la vie humaine est infinie, ce qui est en contradiction flagrante avec les règles courantes acceptées plus ou moins tacitement par toutes les sociétés. L'adoption d'un tel principe exigerait aussi de consacrer la plus grande partie du budget d'une nation, par exemple, à la recherche médicale, aux hôpitaux, etc., ce qui manifestement, et avec l'accord d'une large majorité, n'est pas le cas.

Le seul « avantage » de la méthode est de fournir des valeurs très élevées et parfois absurdement élevées [4, 5] empêchant par des coûts exorbitants la réalisation de projets utiles. Elle est rejetée aujourd'hui par les meilleurs spécialistes aux USA et ailleurs.

L'analyse fréquentielle, par contre, repose sur deux hypothèses parfaitement acceptables :

- toute crue observée, aussi grande soit-elle, peut être dépassée ; Gumbel [6] dit : il est impossible que l'improbable n'arrive jamais,

<sup>1</sup> Service fédéral des routes et des digues.

<sup>2</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

- si un débit  $Q$  peut être associé à une probabilité  $P$ , un débit plus grand  $Q + dQ$  correspondra à une probabilité plus faible  $P - dP$ ,
- tout le reste est un problème de techniques de calcul<sup>3</sup>.

## 2. Eléments et procédés de l'analyse fréquentielle

Si nous mesurons un phénomène naturel, par exemple le débit maximum de crue d'une rivière en une section donnée, nous aurons constitué au bout d'un certain temps un « échantillon » du comportement de cette rivière en crue. Nous employons le terme d'échantillon parce que, et ceci tombe sous le sens, les mêmes mesures faites pendant une période différente auraient conduit à une autre série de valeurs, soit à un autre échantillon. Le débit maximum d'une rivière en crue est manifestement une observable qui fluctue selon une loi qui lui est propre et que nous ignorons. Le problème central de la statistique mathématique est d'interpréter ces fluctuations par une loi de probabilité<sup>4</sup> adéquate. Pour arriver à ce but, la démarche usuelle comporte plusieurs opérations que nous examinerons ci-après.

### 2.1 Formation de l'échantillon

L'information concernant les crues se trouve pour le réseau hydrographique suisse dans les annuaires publiés par l'OFEH<sup>5</sup> et, de manière plus détaillée, dans les enregistrements sur bande de papier des stations limnigraphiques que l'on peut obtenir auprès du même office<sup>6</sup>. Devant cette masse de chiffres et graphiques, il s'agit de procéder à un tri basé sur :

- la définition claire de l'observable qui nous intéresse : débits de pointe des crues, débits maxima journaliers, etc.,
- la sélection de valeurs vraiment significatives de cette observable, c'est-à-dire celles qui la caractérisent de la façon la plus complète.

Le choix est généralement porté sur le débit de pointe de la plus grande crue de chaque année — le débit maximum annuel. Quoique ces valeurs ne soient pas le plus souvent connues avec toute la précision voulue, les nombreuses analyses effectuées montrent que lorsque la période d'observation est supérieure à 10 ans, il n'est pas utile d'en ajouter d'autres.

### 2.2 Homogénéité statistique

Déjà lors de la constitution de l'échantillon, nous devons nous assurer que tous ses éléments sont de même nature, c'est-à-dire susceptibles d'être interprétés par la même loi de probabilité. Il est évident qu'un débit de pointe dû à la rupture d'une poche glacière ou d'un barrage ne peut pas être mêlé aux crues produites par les précipitations.

On peut aussi se demander si les crues dues à la fonte des neiges ou celles produites par les orages, ainsi que celles précédant et suivant la construction d'ouvrages importants (barrages, digues), peuvent obéir à la même loi. D'autres situations sont encore moins claires : la super-

position d'un orage d'été et de la fonte des glaciers est souvent à l'origine de fortes crues dans les bassins alpins ; de même, la fonte des neiges est fréquemment accompagnée, sinon provoquée par des pluies. Nous nous trouvons ici essentiellement devant un problème de jugement.

En ce qui concerne les ouvrages, il est difficile de cerner leur influence sur les pointes extrêmes des crues sans une analyse approfondie : l'importance relative de l'ouvrage et du bassin versant est un critère de jugement global. Les petits bassins sont de façon générale beaucoup plus sensibles aux modifications quelles qu'elles soient (incendie de forêts, urbanisation, aménagements divers) que les grands.

Nous déconseillons vivement l'utilisation automatique de tests d'homogénéité purement statistiques : ils ne doivent et ne peuvent pas remplacer le jugement de l'ingénieur ! Il faut donc les réserver aux vérifications dans le doute et aux cas où le jugement ne peut pas s'exercer par manque d'information. Dans le cas de l'analyse d'environ 330 stations hydrométriques que nous avons faite en 1972 pour le SFRD, l'exercice du jugement était toutefois exclu par la masse même de l'information à traiter — nous avons alors utilisé le test non paramétrique de Wilks [7, 8, 9]. Il n'en reste pas moins que lors d'études particulières, le problème de l'homogénéité de l'échantillon doit être considéré avec beaucoup d'attention.

### 2.3 Confiance statistique

Si nous interprétons un échantillon par une loi de probabilité et que ce faisant nous associons à tout débit une probabilité d'occurrence théorique, nous admettons implicitement que notre échantillon est parfaitement représentatif des crues annuelles de la rivière depuis toujours et à tout jamais. Sans même parler des modifications des caractéristiques d'un bassin versant dues aux accidents naturels ou à l'activité humaine, la probabilité pour que cette représentativité se réalise effectivement est infiniment plus petite que celle d'obtenir six fois six — six en six coups de dés. Le fait que cette hypothèse soit admise sous la contrainte de l'ignorance n'y change rien.

Pour illustrer par un exemple simple la nature de ce problème, prenons le cas du jeu de dés où nous avons l'avantage de connaître d'avance la probabilité théorique ( $1:6 = 0,167$ ) d'obtenir un chiffre déterminé entre 1 et 6 à chaque coup de dés. Si après chaque groupe de six coups, nous calculons la probabilité « expérimentale » correspondant à chaque chiffre dans chaque groupe, nous constaterons qu'elle peut prendre toute valeur entre 0 et 1. Nous conclurons alors que :

- l'« information » contenue dans un groupe de six coups sur la vraie probabilité est insuffisante,
- la « confiance » que nous pouvons attacher à un tel « échantillon » est très faible.

Si par contre nous faisons ce calcul pour *tous* les coups jusqu'à 100, 200, etc., nous nous approcherons toujours plus de la probabilité « théorique » :

- l'information contenue dans un « échantillon » augmente avec sa taille,
- la confiance (statistique) grandit en même temps que l'échantillon.

Cette démonstration d'une vérité presque banale montre qu'il n'y a pas de différence entre la « confiance statistique » et la confiance tout court. Les statisticiens préfèrent toutefois chiffrer les limites de leur confiance. Le procédé, appliqué à notre exemple, est le suivant :

Supposons qu'après un grand nombre de coups de dés, nous formons tous les groupes possibles de 50, 100,

<sup>3</sup> Le même raisonnement peut être fait de manière convaincante pour l'âge limite de survie des hommes.

<sup>4</sup> On appelle loi de probabilité toute fonction  $f(x)$  pour laquelle  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  ou  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ .

<sup>5</sup> Office fédéral de l'économie hydraulique.

<sup>6</sup> Pour les stations cantonales, les barrages, etc., il faut s'adresser au SFRD.

200, ... chiffres dans l'ordre de leur occurrence et calculons les probabilités expérimentales de chaque chiffre de 1 à 6 dans chaque groupe. Les valeurs obtenues différeront bien entendu entre elles dans chaque groupe et d'un groupe à l'autre. Si nous considérons maintenant les probabilités expérimentales, ordonnées en ordre décroissant, d'un chiffre déterminé dans 200 groupes différents mais de même taille, et éliminons les cinq valeurs les plus faibles et les cinq les plus élevées, les deux valeurs extrêmes (la 6<sup>e</sup> et la 195<sup>e</sup>) des 190 qui restent sont les « limites de confiance à 95 % »<sup>7</sup> et l'écart entre elles est « l'intervalle de confiance à 95 % ». Cet écart est une mesure de la « confiance statistique ».

Un dernier aspect du problème. Supposons qu'en jetant les dés nous avons pour une raison quelconque renoncé à marquer les résultats concernant le chiffre 3 par exemple, nous ne disposerons à la fin de l'opération d'*aucune* information expérimentale le concernant. Si dans le cas particulier cela n'a pas d'importance réelle, il en va tout autrement lorsque nous ne connaissons pas par avance la vraie loi de probabilité : toute extrapolation en dehors du domaine expérimental est associée à une confiance statistique nulle ! Ceci est tellement gênant, lorsque sous quelques vagues prétextes concernant la continuité des phénomènes naturels on extrapole une série de 30 crues annuelles à la crue dix-millénaire, que les hydrologues préfèrent ne pas le mentionner. Et pourtant, il s'agit là d'une question cruciale à laquelle la seule réponse sensée est : pas de mesures, pas de confiance !

Pour illustrer le genre de questions pouvant se poser avec des échantillons trop courts, prenons le cas de la Seez (SG), voir annexe n° 1. Les débits ont été observés à Weisstannen (st 4009<sup>8</sup>, pendant quinze ans, de 1958 à 1972) et à Mels, (st 4010<sup>8</sup>, pendant douze ans, de 1925 à 1929 et de 1966 à 1972). En dehors de ces périodes de fortes crues furent observées dans la nuit du 6 au 7 octobre 1911 sur la Linth et la Seez, mais ce n'est que dans cette dernière rivière qu'elle fut vraiment exceptionnelle avec des pointes de 157, 160 et 196 m<sup>3</sup>/s à Weisstannen, Mels et Flums respectivement. Si cette crue est manifestement due aux pluies d'automne, puisqu'elle s'est produite simultanément sur la Linth, nous ignorons si celles-ci n'ont pas provoqué la rupture d'une poche glacière ou d'un barrage, etc., sur la Seez.

Pouvons-nous évaluer la probabilité ou, ce qui revient au même, la période de retour  $T$  qui est sa réciproque, d'une telle crue avec les renseignements dont nous disposons ? Au lieu de répondre tout de suite par le non du bon sens, l'hydrologue animé de zèle mathématique procédera comme suit :

- 1) il calculera tout d'abord la probabilité expérimentale admettant, ce qui est raisonnable, que cette crue est la plus grande de la période 1911-1972,  $P = 1,587\%$ , soit  $T = 63 \text{ ans}$  ;
- 2) pour augmenter l'information disponible, il reliera par une régression les stations de Mels et Weisstannen et cette dernière par une autre régression à celle de Bad Ragaz sur la Tamina (st 1056, années de mesure 1932-1972), les interprétera par une loi de probabilité (ici Gumbel) et avec une série de 20 crues annuelles calculera par extrapolation et sans aucun scrupule (tout le monde le fait) la période de retour de la crue de 1910, soit  $T = 106'000 \text{ ans}$ . Ce chiffre qui pourrait ébranler

<sup>7</sup> Communément admises par les statisticiens. Signifie que 95 valeurs sur 100 resteront à l'intérieur de ces limites.

<sup>8</sup> Numérotation du SFRD [10].

un profane n'étonnera pas un hydrologue qui a pour lui le raisonnement mathématique. En effet, et c'est un raisonnement qui se tient, s'il existe sur notre planète 5000 bassins versants indépendants, la crue cent-millénaire peut se produire dans l'un quelconque une fois tous les 20 ans !

- 3) S'il estime devoir encore « raffiner » ce travail un peu brut, il fera appel à l'analyse régionale, calculera l'intervalle de confiance à 95 % pour la période de mesure, acceptera la proposition de Gumbel d'extrapoler linéairement au-delà de celle-ci et trouvera partant de la limite supérieure :  $T = 1'800 \text{ ans}$   
partant de la limite inférieure :  $T = 98'000 \text{ ans}$

Devant ces magnifiques résultats, il tirera la conclusion, la seule possible d'ailleurs, que la crue de 1910 a vraiment été une crue exceptionnelle. Fatigué par le travail fourni dans son bureau, il demandera pour prendre de l'air d'aller sur place et c'est là que, avec un peu de chance, il rencontrera le vieux paysan qui lui donnera, peut-être, la clé du mystère.

#### 2.4 Lois de probabilité

Ayant à l'esprit ce qui vient d'être dit sur la confiance statistique, il devient évident que le choix d'une loi de probabilité interprétant de la « meilleure » façon les crues observées — et on entend presque toujours par là la courbe ou la droite passant si possible par tous les points correspondant aux mesures — est un problème secondaire. Dès lors, les principaux critères de choix d'une loi de probabilité seront sa simplicité et la possibilité de procéder à un ajustement graphique direct (papier de probabilité). Parmi les huit lois citées en [10] et bien d'autres, les lois log-normale (dites de Galton ou de Gibrat-Gauss) et la première loi des extrêmes (dite de Gumbel), nous paraissent satisfaire au mieux à ces conditions. Le fait que le papier log-normal est courant dans le commerce nous paraît un argument en faveur de la première, la possibilité d'une résolution analytique au moyen de calculatrices de bureau (même la HP35 par exemple) est un argument en faveur de la seconde.

Le papier de probabilité a l'avantage de réduire le calcul au strict minimum (probabilités expérimentales), de faire apparaître rapidement les crues de caractère exceptionnel et de laisser une plus large place au jugement de l'ingénieur qui, de toute façon, est déterminant dans ce cas.

Pour ceux qui, en dépit de tout ce qui a été dit précédemment, une certaine dispersion des points inquièterait, répétons ici que c'est l'alignement parfait qui doit être considéré comme l'exception et s'explique plutôt par les propriétés mathématiques des fonctions utilisées et l'interdépendance des crues et des bassins que par la nature réelle du phénomène. Rappelons aussi que des écarts de l'ordre de  $\pm 30\%$  — voir annexe n° 2 — et même plus grands entre valeurs « théoriques » et « expérimentales » n'ont non plus rien d'extraordinaire : il est impossible de produire des résultats plus précis avec les données dont nous disposons actuellement.

Il faut vraiment se faire à l'idée que dans l'état présent des choses, l'analyse fréquentielle ne peut que guider le jugement des ingénieurs et non pas le déterminer. Voici pourquoi il nous paraît inutile de développer ici des considérations concernant les méthodes d'ajustement des paramètres des lois de probabilité, les tests d'adéquation, le seuil de signification, notions importantes en statistique, mais parfaitement superflues pour le problème qui est le nôtre.

### 3. Techniques d'analyse

#### 3.1 Analyse par station

Une telle analyse a été faite pour 149 stations du réseau hydrographique suisse, la procédure utilisée étant décrite par Bruschin [9] et les principaux résultats donnés dans une publication du SFRD [10]. Cette analyse confirme que les lois log-normale et de Gumbel interprètent bien les séries annuelles et que les écarts entre les différentes lois à la limite du domaine expérimental —  $N = 50$  ans — sont faibles ( $\pm 5\%$ ) par rapport à l'intervalle de confiance.

Le programme de calcul utilisé pour cette analyse, adapté par le Bureau central de Statistique pour ordinateurs de la série IBM 360/70, est à disposition des intéressés.

#### 3.2 Analyse régionale

L'idée fondamentale à la base de cette méthode est que, en considérant *toutes* les stations de mesure d'une *région homogène* à la fois plutôt que chacune individuellement, on augmente nettement l'information disponible<sup>9</sup>. Cet avantage est peut-être moins grand qu'il ne paraît à première vue et il faudrait une analyse très poussée (jamais faite à notre connaissance), pour déterminer la véritable portée de cette amélioration. Quoi qu'il en soit, il est évident que même si l'on ignore l'aspect quantitatif du problème, l'amélioration n'est pas moins réelle et permet, une fois l'analyse faite, de juger avec plus d'assurance du caractère exceptionnel de certaines crues et même d'extrapoler, avec beaucoup de prudence, un peu au-delà du domaine strictement expérimental.

La mise au point des procédés d'utilisation de cette technique d'analyse a été faite par le US-Geological Survey [11] et, compte tenu de ce qui a déjà été dit aux chapitres précédents, il n'y a pas de raisons valables pour y apporter des modifications majeures, même si certains procédés recommandés sont assez discutables. Nous l'avons donc appliquée telle quelle à la partie de la Suisse située au nord des Alpes.

Le déroulement des opérations est, dans les grandes lignes, le suivant :

- délimitation au jugé des régions homogènes (pour la Suisse, le Jura, le Plateau et la Suisse orientale, c'est-

à-dire tout le nord des Alpes, ne forment qu'une seule région) ;

- établissement de listes de stations et années de mesure par région ; choix des stations utilisables par élimination des stations directement influencées par des lacs, glaciers ou retenues importants, réunion de stations voisines sur la même rivière, etc. — voir annexe n° 3 ;
- détermination de deux périodes de mesure, l'une, la plus courte, commune à la plus grande partie des stations, l'autre, la plus longue, aux stations les plus anciennes, ceci dans le but d'obtenir une certaine homogénéité dans le temps et éliminer ainsi l'influence des grands cycles climatologiques. Toutes les stations n'ayant pas la même durée d'observations, cette opération exige un jugement concernant les possibilités de compléter par régressions les mesures manquant dans les séries incomplètes. Pour la Suisse, nous avons choisi les périodes allant de 1921 à 1972 (52 ans) et de 1955 à 1972 (18 ans) ;
- après avoir complété les séries et déterminé  $Q_{2,33}$ <sup>10</sup> et  $Q_{10}$  (l'indice indique la période de retour de la crue respective) on procède à un test d'homogénéité statistique. En l'occurrence, on admet que les séries de mesures considérées sont homogènes si les périodes de retour d'une sorte de crue décennale pondérée restent à l'intérieur des limites de confiance à 95 % ;
- on calcule ensuite les rapports  $Q_T/Q_{2,33}$  où  $T = 1, 2, 3, 10 \dots 50$  par exemple pour toutes les stations, sur la

<sup>9</sup> En théorie des erreurs où les fluctuations des mesures sont considérées comme des valeurs indépendantes de la même variable aléatoire, générées par une loi normale, on peut montrer que la variance de la moyenne diminue proportionnellement au nombre de mesures. Ceci veut dire que si nous nous intéressons à la valeur moyenne du paramètre mesuré, elle sera d'autant plus proche de sa vraie valeur que le nombre de mesures est grand.

<sup>10</sup>  $T = 2,33$  est la période de retour de la moyenne de la loi de Gumbel réduite.  $Q_{2,33}$  est la « crue moyenne annuelle » (mean annual flood). Le Geological Survey utilise la loi de Gumbel et nous l'avons conservée parce que beaucoup plus commode pour les calculs avec les calculatrices de bureau que la loi log-normale qui est une loi intégrale. Voir aussi annexe n° 2.



Fig. 1. — Courbe régionale des fréquences des crues au nord des Alpes.

base des lois de probabilité ajustées à chaque station, après les avoir groupées en deux catégories :

- toutes les stations, mais considérées avec la période courte commune (18 ans) seulement — groupe 1,
- les stations appartenant à la période longue (52 ans) — groupe 2,

le deuxième étant considéré une fois avec toute sa durée — sous-groupe 2' — et une fois avec la fraction correspondant à la période courte seulement — sous-groupe 2''. On prend ensuite les valeurs médianes des mêmes rapports  $Q_T/Q_{2,33}$  dans chaque groupe et on forme les produits :

$$\frac{\left(\frac{Q_T}{Q_{2,33}}\right)_1 \times \left(\frac{Q_T}{Q_{2,33}}\right)_{2'}}{\left(\frac{Q_T}{Q_{2,33}}\right)_{2''}} = \frac{Q_T}{Q_{2,33}}$$

de toute la région ;

- on construit la courbe  $Q_T/Q_{2,33} = f(T)$  régionale — fig. 1 — qui permet d'obtenir les valeurs  $Q_T$  de chaque station par multiplication avec le  $Q_{2,33}$  respectif. Ces valeurs doivent être considérées comme les meilleures valeurs moyennes pour les crues, dans la région analysée.

A ce niveau, l'analyse fréquentielle régionale est terminée, mais l'information obtenue est ponctuelle et ne concerne que les stations utilisées pour l'analyse. Le passage à la région est fait à l'aide de courbes

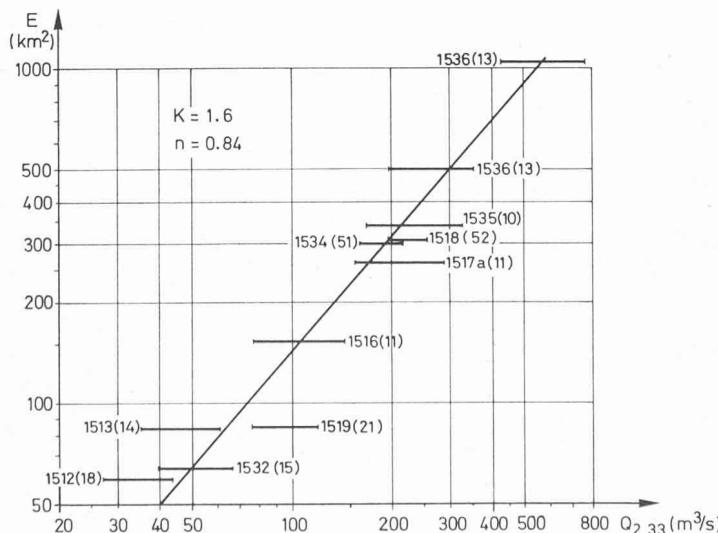
$$Q_{2,33} = f(E)$$

où  $E$  est la superficie du bassin versant, construites sur la base de corrélations entre les stations d'une même rivière ou par groupes de stations couvrant plusieurs bassins versants, etc.

Une forme usuelle de l'équation reliant  $Q$  à  $E$  est :

$$Q = KE^n$$

contenant deux paramètres libres  $K$  et  $n$ .



L'examen fait dans deux régions à haute densité de stations hydrographiques — fig. 2 — montre que  $n = 0,84$  est une valeur qui convient bien. Nous l'avons alors adoptée pour toute la région étudiée et calculé les valeurs de  $K$  correspondant à  $Q_{2,33}$  de chacune des 43 stations retenues pour l'analyse fréquentielle régionale. Cela nous a permis de construire les courbes « iso- $K$  » pour l'ensemble de la région, montrées à la figure 3 sur laquelle nous avons aussi porté les tronçons de rivière auxquels les résultats obtenus peuvent être appliqués.

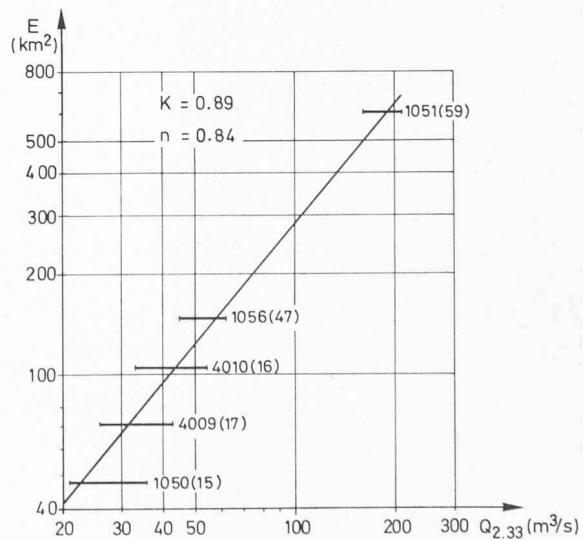
Cette démarche limite l'utilisation de la méthode aux bassins dont la superficie est, pour les mêmes conditions météorologiques, le facteur déterminant des débits de crue. D'une manière générale, ces résultats peuvent être considérés comme :

- satisfaisants si  $50 < E < 100 \text{ km}^2$
- bons si  $100 < E < 1000 \text{ km}^2$
- inutilisables pour  $E < 50 \text{ km}^2$   
et  $E \gg 1000 \text{ km}^2$ .

L'exemple de calcul donné à l'annexe n° 4 montre de quelle manière on peut obtenir la crue centenaire  $Q_{100}$  ou tout autre  $Q_T$  ( $T < 100$ ) en tout point au nord des Alpes en se servant des figures 1 et 3. La superficie des bassins versants correspondants est donnée par tranches de 300 m d'altitude pour tous les bassins versants importants dans les publications « Régime des eaux en Suisse » de l'OFEH (à l'époque Section hydrométrique de l'Inspectorat fédéral des travaux publics). Pour les rivières possédant plusieurs stations de mesure comme la Töss et la Thur, on peut aussi construire par des procédés analogues des courbes  $Q_T = f(E)$  particulières, comme montré à la figure 4.

#### 4. Risque hydrologique

Nous pouvons à présent associer à chaque crue une probabilité théorique d'occurrence : elle est de 1 : 50 soit de 2 % chaque année pour  $Q_{50}$ , 1 : 100 soit 1 % chaque année pour  $Q_{100}$ , etc. Nous savons aussi que, quelle que soit la crue de dimensionnement choisie, elle comporte un



Notes : — les segments horizontaux représentent les intervalles de confiance à 95 % du  $Q_{2,33}$  de chacune des stations  
— le 1<sup>e</sup> chiffre est le n° SFRD de la station, le 2<sup>e</sup> entre parenthèses le nombre d'années de mesure.

Fig. 2. — Détermination des paramètres «  $K$  » et «  $n$  » de la formule  $Q_{2,33} = KE^n$ .

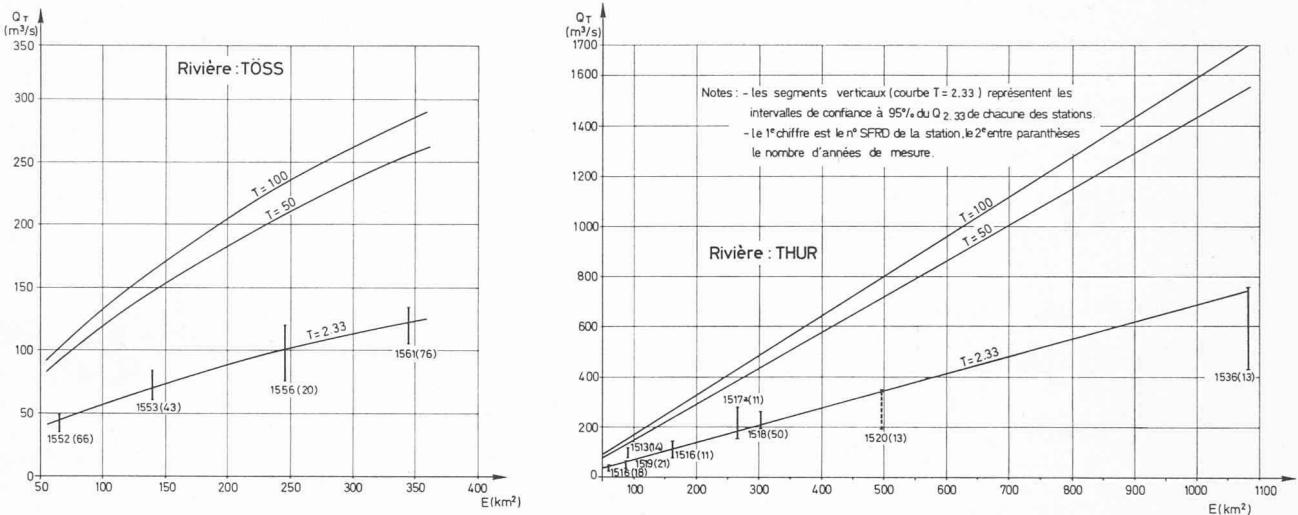


Fig. 4. — Exemples de courbes  $Q_T$  (débit ayant la période de retour  $T$ ) en fonction de la superficie  $E$  du bassin versant.

risque de dépassement. Les questions auxquelles nous devons répondre en effectuant ce choix sont :

- qu'arrive-t-il lorsque la crue de dimensionnement est dépassée ?
- à partir de quelle crue l'implantation de l'ouvrage augmente-t-elle les risques à l'aval de celui-ci ?
- quelles sont les mesures à prendre pour diminuer ces risques (définition de zones de danger, modification des destinations des terrains, mesures de protection et alerte, routes d'évacuation, etc.) ?

Le caractère plus ou moins détaillé des réponses est une question de jugement et dépendra de l'importance des risques impliqués — il s'agit de ne pas confondre un passage sous route avec le barrage de la Grande Dixence.

Toutefois, et cela est vrai pour tous les ouvrages, à plus ou moins longue échéance ils seront supprimés, remplacés ou modifiés, pour des raisons tenant de leur conception, des raisons techniques ou parce que les risques qu'ils impliquent ont considérablement augmenté : un pont provisoire ou un batardeau seront démontés, un petit barrage sera surélevé ou noyé par la construction d'un barrage plus grand à l'aval, un évacuateur de crues sera agrandi ou une digue sera surélevée, etc.

*La durée de vie d'un ouvrage dans sa forme initiale est limitée.*

Faciliter par la conception même du projet les transformations ultérieures, reconstruire périodiquement les projets en fonction de l'évolution, devenue très rapide, des risques qu'ils impliquent (la construction d'un hôpital ou d'une usine nucléaire, etc., à l'aval d'un barrage, par exemple) devient une *obligation absolue* pour les ouvrages d'une certaine importance [12, 13].

A première vue, ceci paraît conduire à un supplément de travail et à des coûts plus élevés. Cela n'est pas exact, parce qu'en admettant l'idée d'une transformation future nous pouvons construire plus économiquement à présent, *sans augmenter le risque accepté*. Nous donnerons un exemple pour démontrer que cette affirmation est correcte, mais il suffit de penser, pour s'en convaincre, que le risque de voir arriver la crue centenaire pendant une période de 50 ans est plus grand que pendant 10 ans seulement.

Si nous considérons le cas de trois ouvrages d'importance différente, dimensionnés selon les idées ayant cours de nos jours — voir le tableau n° 1 — il apparaît clairement que non seulement une bonne compréhension des relations liant le risque encouru et la durée de vie des ouvrages permettrait un dimensionnement plus économique, mais encore que les recommandations officieuses ne donnent qu'une image très sommaire des exigences véritables concernant le risque assumé ou, ce qui revient au même, de la sécurité obtenue.

TABLEAU 1

| 1 | Débit de dimensionnement $Q_T$   | $Q_{100}$ | $Q_{1'000}$ | $Q_{10'000}$ |
|---|--|-----------|-------------|--------------|
| 2 | Durée totale de vie (estimée) $T$ en années  | 50        | 100         | 200          |
| 3 | Durée de vie sans transformation (estimée) $T'$ en années                                    | 10        | 25          | 50           |
| 4 | Risque théorique $RT$ pour $T = \infty$ en %   | 1         | 0,1         | 0,01         |
| 5 | Risque accepté $RA$ avec $Q_T$ calculé pour la durée $T'$ en %                               | 9,5       | 2,5         | 0,5          |
| 6 | $RA$ avec $Q_T$ pour la durée de vie totale $T$ en %   | 39,5      | 9,5         | 2            |
| 7 | Débit de dimensionnement $Q_T$ , avec le $RA$ précédent (n° 6) mais admis pour la durée $T'$ | $Q_{20}$  | $Q_{250}$   | $Q_{2500}$   |

Un problème d'une autre nature, lié à l'évaluation du coût du risque, est celui du prix de la vie humaine. Il est bien évident que même au niveau des sociétés ce coût est fort variable, dépendant essentiellement de la limitation des ressources, des conditions politico-sociales, des croyances religieuses, etc. Une base qui nous paraît pourtant acceptable, tout au moins dans le monde occidental, est la proposition de Biswas d'utiliser les chiffres déterminés par les spécialistes des transports [14] que nous avons transposés en FS pour faciliter leur appréciation — tableau n° 2.

$$Q_{2,33} = K E^{0.84}$$

Gewässernetz mit Iso - K Kurven

Réseau hydrographique et courbes Iso - K

$Q$  in  $\text{m}^3/\text{s}$  -  $E$  in  $\text{km}^2$

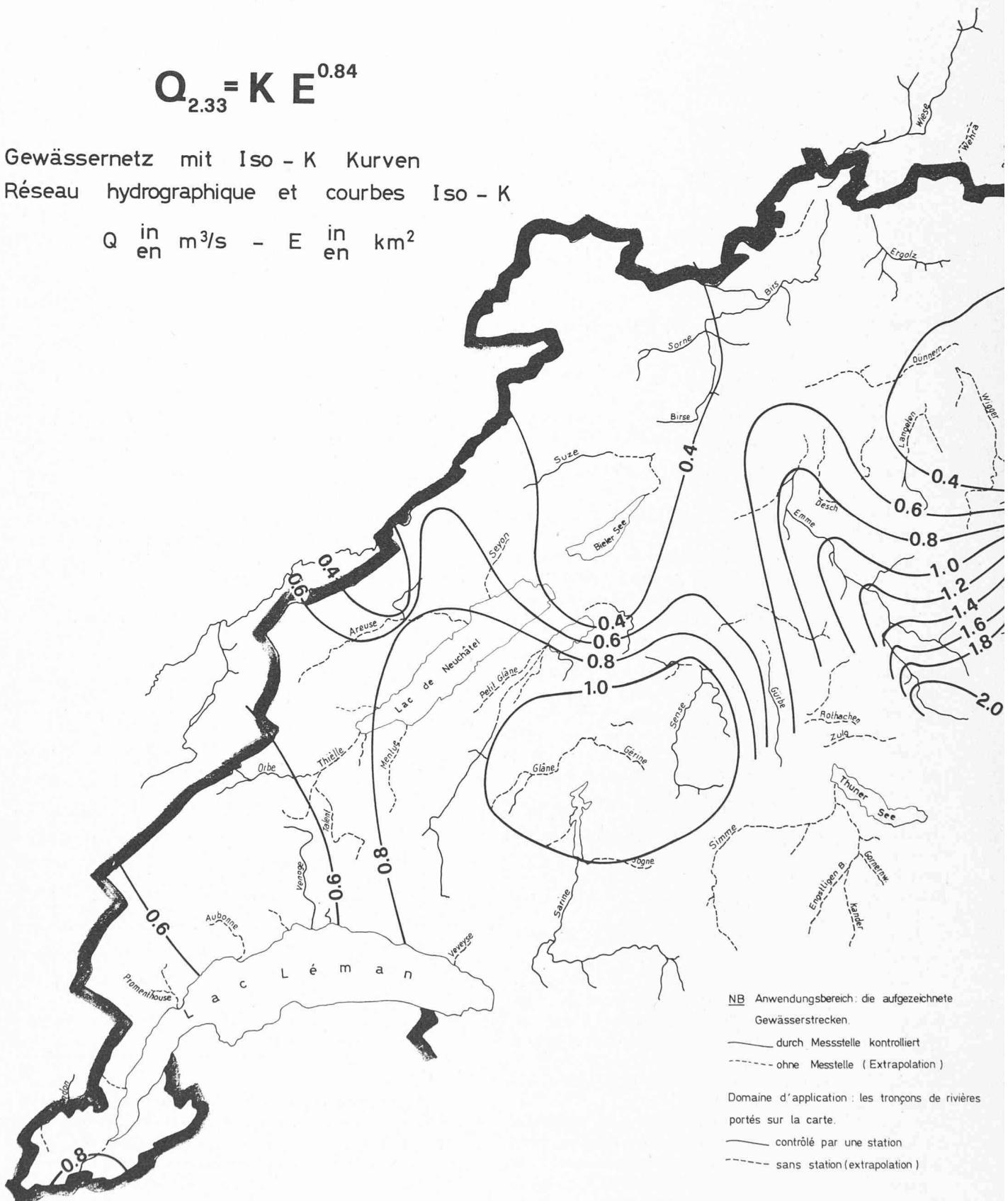


Fig. 3. — Domaine d'application de la formule  $Q_{2,33} = KE^{0,84}$ . Réseau hydrographique et courbes iso- $K$  au nord des Alpes.

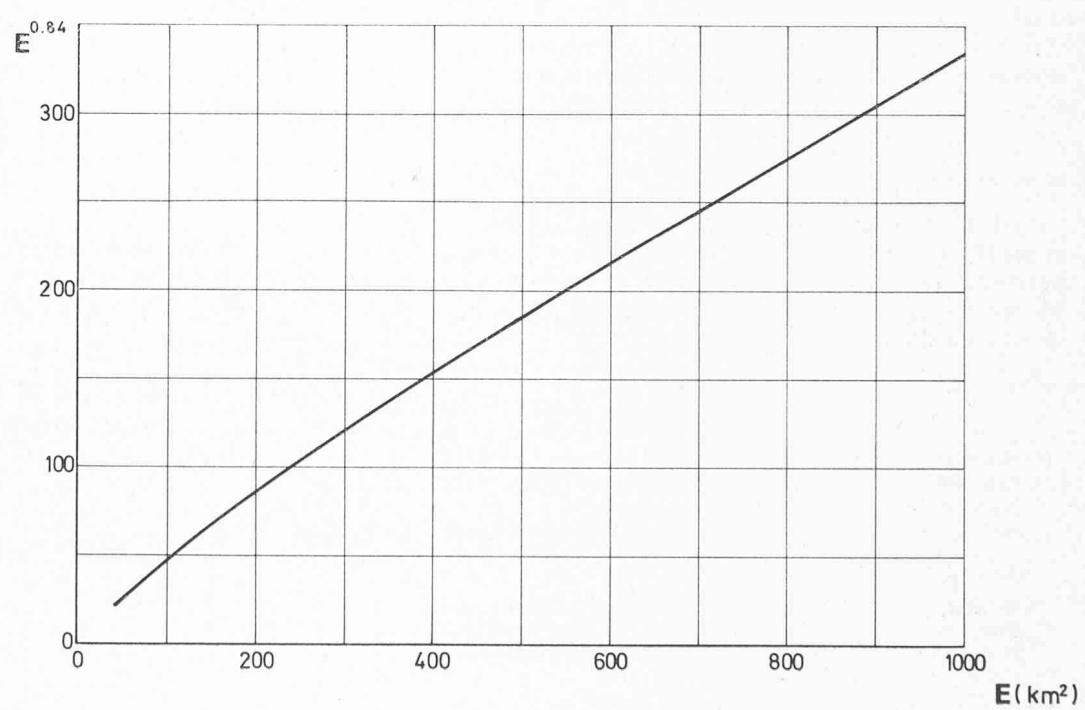
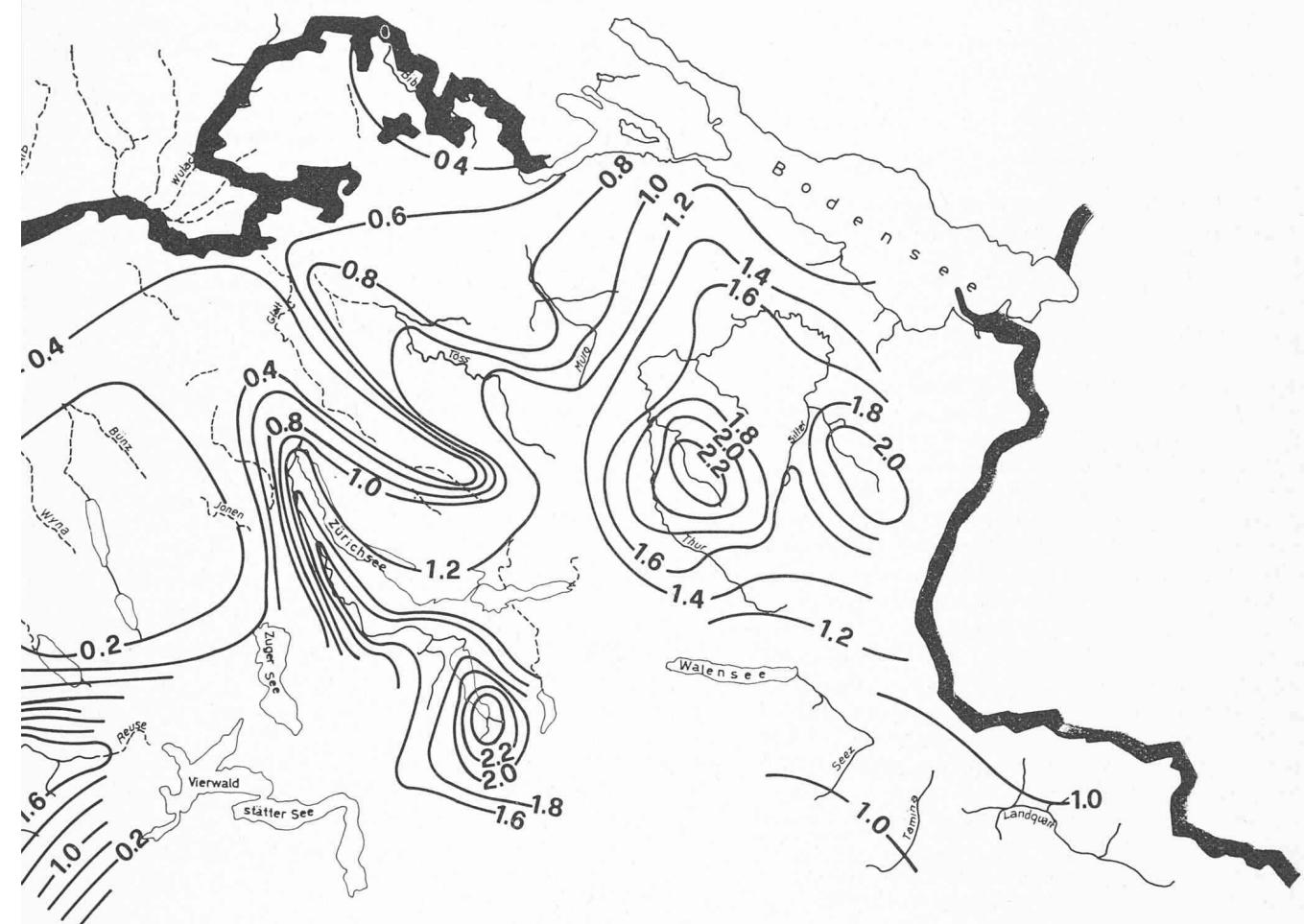


TABLEAU 2

| Age<br>(années) | Coût par personne |        |
|-----------------|-------------------|--------|
|                 | Hommes            | Femmes |
| < 15            | 72 000            | 51 000 |
| 15-54           | 150 000           | 39 000 |
| > 54            | 30 000            | 24 000 |

Sur une base semblable, il est aussi possible d'évaluer les coûts des invalidités, blessures, etc.

## 5. Conclusions

L'utilisation de l'analyse fréquentielle des crues est justifiée par la nécessité d'évaluer les risques — en coûts annuels — que comporte l'exécution ou l'existence de tel ou tel ouvrage lors de crues exceptionnelles. Les principaux obstacles rencontrés dans l'application de la méthode sont l'insuffisance des mesures et de notre connaissance des phénomènes météorologiques et hydrologiques exceptionnels, de loin les plus importants, un manque de clarté et de nombreuses hésitations au sein de la profession concernant la notion même de risque, risque acceptable, durée de vie d'un ouvrage, etc., enfin l'absence de règles généralement admises concernant le coût des atteintes à la vie humaine.

C'est donc dans cette direction que doivent être concentrés les efforts. A quoi sert-il de perfectionner un outil déjà nettement meilleur que les données dont nous disposons ? Laissons ce soin aux statisticiens, même si cela doit réduire pour un temps le nombre de doctorats et d'articles publiés dans les journaux spécialisés.

En attendant les résultats de cette évolution souhaitable, nous pouvons utiliser avec une confiance certaine pour le dimensionnement des ouvrages petits et moyens, tellement plus importants par leur nombre et valeur globale, les données de l'analyse régionale et n'ayons pas peur de le dire, le bon sens et notre jugement d'ingénieurs.

## Remerciements

Nous tenons à remercier ici le Service fédéral des Routes et des Digue et plus spécialement le professeur C. Lichtenhahn pour l'important soutien matériel, les suggestions et les conseils donnés tout au long de l'étude faisant l'objet de cette publication.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNARD, M. : *The Primary Role of Meteorology in Flood Estimation*. Proc. Am. Soc. Civil Engineers, vol. 69, 1943, p. 105-144.
- [2] BISWAS, A. K. : *Some Thoughts on Estimating Spillway Design Flood*. Bull. Int. Ass. Scientific Hydrology, XVI, 1971, p. 63-72.
- [3] BENSON, M. A. : *Thoughts on the Design of Design Floods*. Proc. 2nd Int. Symp. in Hydrology, 1972, on « Floods and Droughts », p. 27-33, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA.
- [4] ACKERMANN, W. C. : *Application of Severe Rain-Data in Engineering Design*. Bull. Am. Meteorological Soc. Vol. 45, n° 4, 1964, p. 204-206.
- [5] KAMINSKY, F. C. : *Proposed Flood Control in the Meadow Dam*. Report of the Citizens Review Committee on the Connecticut River Basin, etc., 1971, cité en [3].
- [6] GUMBEL, E. J. : *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York and London, 4th reprinting, 1967.
- [7] ROSENBAUM, S. : *Tables for a Nonparametric Test of Dispersion*. Ann. Math. Statistics, vol. 24, 1963, p. 663-668.
- [8] ROSENBAUM, S. : *Tables for a Nonparametric Test of Location*. Ann. Math. Statistics, vol. 25, 1954, p. 145-150.
- [9] BRUSCHIN, J., ESTÈVE, R. : *Utilisation de l'analyse fréquentielle des crues pour la détermination de la crue de projet*. Schweiz. Bauzeitung, Hefte 32 u. 33, 1973.
- [10] Service fédéral des routes et des digues : *Débits maxima observés jusqu'en 1969 dans les rivières suisses*, sous presse, parution probable à fin 1974. En vente à l'Office fédéral des imprimés et du matériel, Berne.
- [11] DALRYMPLE, T. : *Flood-Frequency Analyses*. Manual of Hydrology, Part 3, Geological Survey Water-Supply Paper 1543-A, Government Printing Office, Washington D.C., 1960.
- [12] Task Committee on the Reevaluation of the Adequacy of Spillways, etc. : *Reevaluating Spillway Adequacy of Existing Dams*. Am. Soc. Civil Eng., Journal Hydr. Div. HY2, 1973, p. 337-372.
- [13] GRAY, D.A. : *Safety of Dams — Bureau of Reclamation*. Am. Soc. Civil Eng., Journal Hydr. Div. HY2, 1974, p. 268-277.
- [14] BAERWALD, J. E. : *Traffic Engineering Handbook*. Inst. Traffic Eng., Washington D.C., 3rd edition 1965, p. 249.

## ANNEXE 1. — Exemple d'analyse des crues annuelles

L'équation de transformation de la variable dans la loi de Gumbel, voir annexe 2 le graphique et tableau ci-après :

$$x = 11,49 X + 37,06 \quad (1)$$

$$X_{170} = 11,57$$

$$\text{et } X = -\ln \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (2)$$

$$\text{soit } T = 106'000 \text{ années}$$

Par analyse régionale :

$$Q = Q_{2,33} (0,324 X + 0,814) \quad (3)$$

Pour obtenir les débits aux limites supérieures et inférieures de confiance à 95 %, on ajoute entre parenthèses  $\pm 0,324 (2 \sigma)$  où  $\sigma \approx 1$  pour un nombre de mesures  $N$  supérieur à 2 et  $N = T$ , le nombre d'années de la période considérée (voir aussi annexe n° 2).

$$Q_{LS} = Q_{2,33} (0,324 X + 1,433)$$

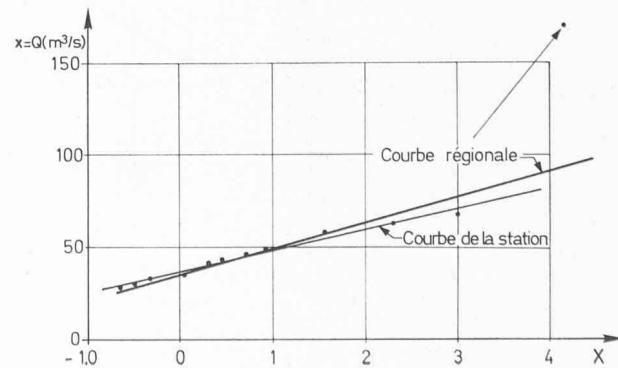
$$Q_{LI} = Q_{2,33} (0,324 X + 0,166)$$

pour  $Q_{2,33} = 43,7 \text{ m}^3/\text{s}$  à Mels

on obtient

$$Q_{LS} = 103 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{LI} = 46 \text{ m}^3/\text{s}$$



Rivière : *Seez*

| Année  | Débits maxima $Q$ en $\text{m}^3/\text{s}$ |              |            | N° | $Q$ en décroissant | $P$ en % |
|--------|--|--------------|------------|----|--------------------|----------|
|        | Weisstannen<br>4009                        | Mels<br>4010 | Flums<br>— |    | Mels               |          |
| 1911   | 157  | 170          | 196        | 1  | 170                | 1,578    |
| 1925   |  | 34,9         |            | 2  | 68,9               | 9,5      |
| 1926   |  | 58,5         |            | 3  | 62,6               | 14,3     |
| 1927   |  | 68,9         |            | 4  | 62,5 *             | 19,0     |
| 1928   |  | 62,6         |            | 5  | 58,5               | 23,8     |
| 1929   |  | 49,8         |            | 6  | 54,0 *             | 28,6     |
| 1958   | 23,0                                       | 27,5 *       |            | 7  | 52,0 *             | 33,3     |
| 1959   | 28,0                                       | 33,5 *       |            | 8  | 49,8               | 38,1     |
| 1960   | 45,0                                       | 54,0 *       |            | 9  | 47,0               | 42,9     |
| 1961   | 38,0                                       | 45,5 *       |            | 10 | 45,5 *             | 47,6     |
| 1962   | 52,0                                       | 62,5         |            | 11 | 44,0               | 52,4     |
| 1963   | 28,0                                       | 33,5 *       |            | 12 | 41,0               | 57,1     |
| 1964   | 17,9                                       | 21,5 *       |            | 13 | 34,9               | 61,9     |
| 1965   | 43,0                                       | 52,0 *       |            | 14 | 33,5 *             | 66,7     |
| 1966   | 25,0                                       | 30           |            | 15 | 33,5 *             | 71,4     |
| 1967   | 33,0                                       | 41           |            | 16 | 32,0               | 76,2     |
| 1968   | 40,0                                       | 44           |            | 17 | 30,0               | 81,0     |
| 1969   | 24,0                                       | 29           |            | 18 | 29,0               | 85,7     |
| 1970   | 46,0                                       | 47           |            | 19 | 27,5 *             | 90,5     |
| 1971   | 32,0                                       | 32           |            | 20 | 21,5 *             | 95,2     |
| 1972** | 29,0                                       | 38           |            |    |                    |          |

\* Extrapolés par corrélation avec 4009  
 $P_{170} = 1,578 \%$  ;  $T_{170} = 63$  années

\*\* ajoutée ultérieurement

Avec l'équation (1) ayant les coefficients donnés par l'analyse régionale (3)

$$x = 0,324 Q_{2,33} X + 0,814 Q_{2,33} = 14,159 X + 35,57$$

on recalcule  $X_{170}$  partant de  $x = Q_{LS}$  et  $x = Q_{LI}$  pour obtenir

$$T_{LS} = 1'800 \text{ années}$$

$$T_{LI} = 98'000 \text{ années}$$

alors que la valeur centrale pour la courbe régionale extrapolée est

$$T = 13'300 \text{ années}$$

à comparer à  $T = 106\,000$  obtenu précédemment.

#### ANNEXE 2. — Loi de Gumbel

— Forme générale

$$F(x) = e^{-e^{-X}}$$

$$\text{avec } X = \frac{a+x}{b}$$

$$\text{où } a = \gamma b - \mu \quad (\gamma = 0,577 \text{ cte d'Euler})$$

$$\text{et } b = \frac{\sqrt{6}}{\pi} - \sigma$$

avec  $\mu$  = moyenne des  $x$  et  $\sigma$  = écart type des  $x$ .

— La loi réduite :

$$F(x) = e^{-e^{-X}} \quad (a = 0 \text{ et } b = 1)$$

conduit à  $\mu = 0,577$  soit avec

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T} \text{ et } x = \mu = 0,577$$

on obtient  $T = 2,33$  années.

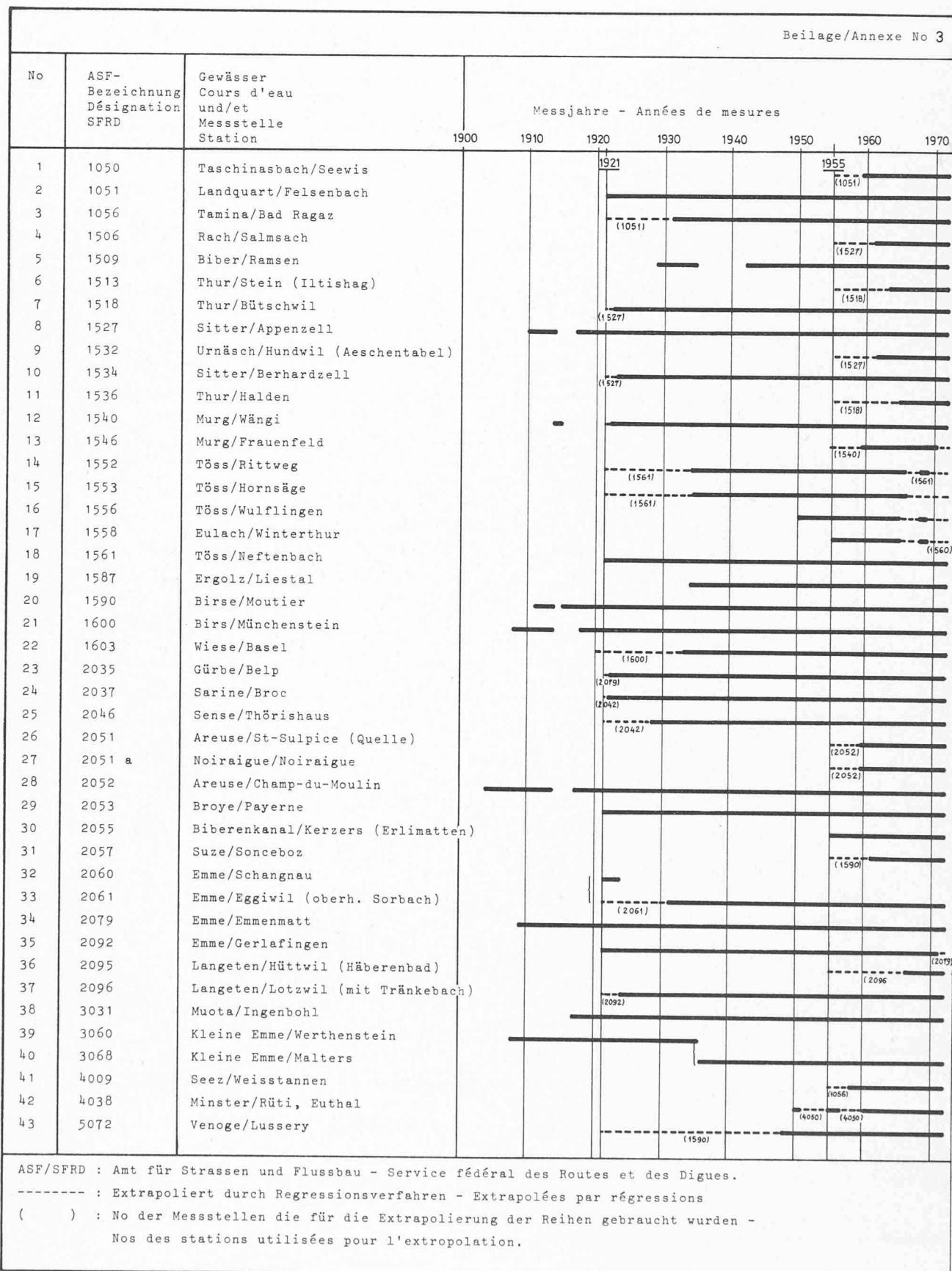
— Limites de confiance

On admet par hypothèse que les valeurs de  $X$  fluctuent autour de la valeur centrale (donnée par la loi de

(suite page 427)

## ANNEXE 3

Beilage/Annexe No 3



Gumbel) selon une loi normale centrée. L'intervalle de confiance à 95 % est alors  $4\sigma$  où

$$\sigma = \frac{e^x}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{T-1}}$$

$N$  = nombre total d'années de mesure

$T$  = période de retour en années,  $1/F(x)$ .

Si  $N = T \rightarrow \sigma \simeq 1$  pour  $N > 2$ .

Les limites de confiance à 95 % à  $N = T$  se calculent avec

$$x_{95\%} = a'(X \pm 2) + b' = a'(X \pm 2) + b'$$

où  $a' = b$  et  $b' = -a$  de la forme générale

avec  $x = Q$

$$Q_{LS} = a'(X + 2) + b' \quad \text{limite supérieure}$$

$$Q_{LI} = a'(X - 2) + b' \quad \text{limite inférieure}$$

ou dans la forme utilisée par l'analyse régionale :

$$Q_{95\%} = Q_{2,33} [a''(X \pm 2) + b'']$$

$$\text{où } a'' = \frac{a'}{Q_{2,33}} \text{ et } b'' = \frac{b'}{Q_{2,33}}.$$

Les valeurs obtenues pour le nord des Alpes sont :

$$a'' = 0,324 \quad b'' = 0,814$$

et en prenant le rapport

$$\frac{Q_{95\%}}{Q} = \frac{Q_{2,33} [a''(X \pm 2) + b'']}{Q_{2,33} (a'' X + b'')} = 1 \pm \frac{2 a''}{a'' X + b''}$$

on obtient

| $N = T$ | $100 \left( \frac{Q_{LS}}{Q} - 1 \right) = 100 \left( 1 - \frac{Q_{LI}}{Q} \right)$ |
|---------|---|
| 10      | 42,0  |
| 20      | 36,5  |
| 50      | 31,2  |
| 100     | 28,1  |
| 1000    | 21,2  |

Donc l'intervalle de confiance pour le cas de  $N = 50$  années de mesures, courant en Suisse, est de l'ordre de  $\pm 30\%$ .

— Relations entre  $T$ ,  $F(x)$  et  $X$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T}$$

où  $F(x)$  est la probabilité de dépassement de  $x$  et  $T$  la période de retour. On peut alors écrire :

$$X = -\ln \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right]$$

ce qui permet de calculer  $X$  pour  $T$  et vice versa. La relation  $(x, X)$  est donnée pour la forme générale.

#### ANNEXE 4. — Exemple de calcul : $Q_{100}$ à Broc (Sarine)

Pour obtenir le débit de pointe de la crue centenaire à Broc sur la Sarine, nous tirons de la figure 1 :

$$\frac{Q_T}{Q_{2,33}} = 2,3 \text{ pour } T = 100.$$

Comme il se trouve qu'au voisinage immédiat de Broc nous disposons d'une station hydrométrique (n° SFRD 2037), nous pouvons obtenir directement de la publication [10] la superficie du bassin versant correspondant

$$E = 639 \text{ km}^2$$

Dans la figure 3, nous trouvons

$$K = 1,0 \text{ et lisons } E^{0,84} = 227$$

d'où

$$Q_{2,33} = 227 \text{ m}^3/\text{s}$$

alors

$$Q_{100} = 2,3 \times 227 = 522 \text{ m}^3/\text{s}$$

Adresse des auteurs :

Jacques Bruschin et Henry T. Falvey  
Laboratoire d'hydraulique  
65-67, route de Genève  
1004 Lausanne

## Bibliographie

**Mathematik Ratgeber**, édition Harri Deutsch, Zurich et Francfort-sur-le-Main, 1974. — Un volume de 740 pages avec 870 illustrations, dont plus de 620 en couleurs, et 16 pages illustrées hors-texte. Prix relié : DM 22.—.

Il s'agit d'une édition réduite de la petite encyclopédie mathématique parue chez le même éditeur. Bien que le sous-titre destine cet ouvrage aux élèves, aux parents et aux autodidactes, il s'agit d'un guide extrêmement complet et très clair des mathématiques élémentaires. Si la présentation abondamment illustrée en fait un outil précieux pour l'étude des mathématiques, l'abondance de la matière contenue sous une forme compacte le prédestine à être un ouvrage de référence souvent consulté. On dit que la culture est ce qui reste lorsque l'on a tout oublié ; à ce titre, ce manuel constitue un support efficace de la culture mathématique de l'ingénieur dans tous les domaines qu'il

n'a pas l'occasion de pratiquer fréquemment. La clarté des illustrations contribue efficacement à la compréhension des relations mathématiques ou des constructions graphiques présentées. Son prix extrêmement avantageux devrait contribuer à une large diffusion, même chez des lecteurs peu familiers avec la langue allemande, grâce à la densité d'informations qu'il offre.

De même, on ne peut que le recommander au collégien ayant l'intention de poursuivre ses études dans une Ecole polytechnique ou une Faculté des sciences en pays de langue allemande.

*Extrait de la table des matières :*

Aufbau des Zahlenbereiches. — Gleichungen. — Funktionen. — Prozent-, Zins- und Rentenrechnung. — Darstellende Geometrie. — Trigonometrie. — Analytische Geometrie. — Folgen, Reihen, Grenzwerte. — Differentialrechnung. — Integralrechnung. — Vektorrechnung. — Praktische Mathematik. — Fehler-, Ausgleichs- und Näherungsrechnung. — Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. — Rechenautomaten. — Mengenlehre. — Algebra.