Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 100 (1974)
Heft: 8

Artikel: Le calcul de treillis spatiaux surdéterminés par la méthode Stüssi-Mayor
Autor: Ansermet, Auguste
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-72101

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans le Bulletin technique de la Suisse romande *du 10 octobre 1912 paraissait un article intitulé : « Du mouvement de l'eau dans les aqueducs libres et les canaux découverts », dû à la plume de M. A. Ansermet. Ce devait être le premier d'une longue série qui s'achève aujourd'hui avec la 50e contribution de l'auteur à notre périodique. La carrière et l'âge de M. Ansermet, ancien professeur au Département de génie rural à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, où il enseignait la géodésie, la photogrammétrie et la théorie des erreurs, lui permettraient de jouir d'un repos bien mérité. Notre plus ancien auteur encore actif en avait du reste déjà exprimé le souhait. S'il a toutefois repris la plume, c'est en hommage à la mémoire de son maître, le professeur Mayor, pour défendre les méthodes mathématiques de traitement des systèmes hyperstatiques de treillis dans l'espace. La publication de l'article ci-dessous ne constitue pas une prise de position du* Bulletin technique *dans le débat qui oppose les écoles prônant ou rejetant l'utilisation de méthodes expérimentales d'analyse des contraintes, mais un hommage à M. Ansermet au moment où s'achève une collaboration de 62 ans au* Bulletin technique. *Nos lecteurs se joindront certainement à nous pour souhaiter à l'auteur une heureuse retraite et le remercier de l'active contribution qu'il a toujours apportée à notre périodique.*

(Réd.)

Le calcul de treillis spatiaux surdéterminés par la méthode Stüssi-Mayor

par AUGUSTE ANSERMET, La Tour-de-Peilz

Rappel de notions usuelles

Dans de récentes publications relatives à cet important problème il n'a pas été fait mention de la thèse remarquable présentée à l'EPFL par M. le professeur Pflug. Cet auteur, dans son programme, distingue deux groupes : le premier concerne les structures composées uniquement de barres ; c'est celui qui ici nous intéresse. Il est fait mention, dans l'introduction à la thèse, aux « études analytiques qui permettent à l'ingénieur praticien d'aborder de manière concrète le problème du treillis spatial ». Il y aurait fort peu de ces études d'après certains auteurs. Cette appréciation est trop pessimiste ; citons par exemple les publications du professeur Linkwitz, de Stuttgart, qui calcula les charpentes pour les Jeux olympiques de Munich. Il y en a d'autres.

A Lausanne le problème fut traité, mais planimétriquement seulement et de façon incomplète, dans la publication EPUL nº 104. L'auteur s'est borné à l'étape des calculs réalisée par voie électronique, renonçant à déterminer les ellipses de déformation des nœuds. En outre, après avoir constaté que les matrices de rigidité sont indépendantes des charges, ce que l'on savait puisque les termes absolus des équations aux déformations n'interviennent pas pour la formation des ces matrices, il cherche à calculer les inconnues en fonction des coefficients de poids. Ce mode de faire ne donne pas toujours satisfaction.

Spatialement on reconnaît tout de suite la forme quadratique ternaire pour exprimer l'énergie de déformation ; analytiquement la notion d'ellipsoïde de déformation d'un nœud est alors immédiate. Signalons aussi les publications nos 111 et 123 EPFL.

Base des calculs

Avant les staticiens ce sont les mathématiciens qui doivent traiter le cas d'un système surdéterminé. Avoir plus d'équations que d'inconnues est un problème ayant donné lieu à une documentation considérable. La méthode des moindres carrés est préconisée dans le cours d'analyse numérique EPFL, à Zurich et outre-Rhin. Ainsi que le fait remarquer M. le professeur Pflug [8] (page 2), « l'ingénieur qui désire aborder un projet de treillis spatial se heurte à des difficultés ». Même au 3e cycle EPFL cet important problème n'est guère traité.

De deux choses l'une : ou bien un système est statiquement déterminé, ou au contraire surdéterminé ; tels sont en réalité les deux groupes.

Choix d'une solution

Après le mathématicien c'est le staticien qui doit faire un choix, par exemple en opérant des coupures et calculant le système fondamental (Grundsystem) ; les termes absolus des équations aux déformations sont alors connus. Pour cette étape des calculs on peut avoir recours à un collaborateur non formé dans une EPF. Il en est de même pour des mesures éventuelles de déformations. La tendance moderne est de confier aux technicums les mesures.

Mais, avant cette étape, on peut se rendre compte si l'ellipsoïde de déformation de tel ou tel nœud a une forme trop défavorable ; à cet effet considérons un cas concret très simple.

Calcul d'un double pylône

Confrontons deux hypothèses basées sur la figure 1. F et F' forces extérieures sans influence sur les matrices de

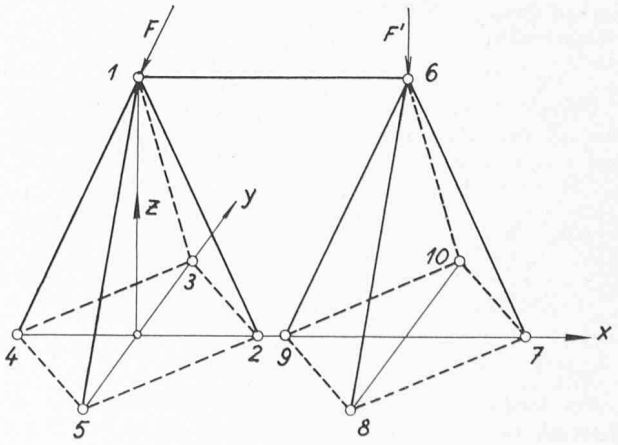

Fig. 1.

rigidité et inverse mais bien sur les termes absolus f et f' des équations. Les poids des barres a priori sont proportionnels aux coefficients d'élasticité, aux sections transversales et aux inverses des longueurs.

1re hypothèse					2e hypothèse			
nœuds	x	y	z		nœuds	x	y	z
1	0	0	+8		1	0	0	+6
2	+6	0	0	unité de	2	+8	0	0
3	0	+6	0	mesure	3	0	+8	0
4	−6	0	0	arbitraire	4	−8	0	0
5	0	−6	0		5	0	−8	0

d'où l'on déduit les éléments ci-après (1re hypothèse).

	dx	dy	dz	dx'	dy'	dz'		
Barres	a	b	c	a'	b'	c'	p	$1/P$
1-2	+0,6	0	+0,8				1,0	0,528
1-3	0	+0,6	+0,8				1,5	0,533
1-4	−0,6	0	+0,8				1,0	0,528
1-5	0	−0,6	+0,8				1,5	0,533
1-6	+1,0	0	+0	−1,0	0	0	0,8	0,86
6-7				+0,6	0	+0,8	1,0	0,528
6-8				0	−0,6	+0,8	1,5	0,533
6-9				−0,6	0	+0,8	1,0	0,528
6-10				0	+0,6	+0,8	1,5	0,533

P = poids a posteriori (1re hypothèse). Somme $p/P = 6$ (6 inconnues).

Les a, b, c, sont les coefficients des équations aux déformations $v = f + a\,dx + b\,dy + c\,dz$ les f étant les termes absolus, pas nécessairement connus, les dx, dy, dz les variations de coordonnées des nœuds et les p les poids des barres intervenant par leurs valeurs *relatives*.

Il faut rendre minimum la somme des pvv (dans [4] : pww).

Pour la 2e hypothèse il faut remplacer les 0,6 par 0,8 et réciproquement, les 0,8 par 0,6 d'où les matrices de rigidité.

Une solution consisterait à éliminer les 6 inconnues dans les 9 équations aux déformations. On aurait alors un extrêmum lié.

$$\begin{bmatrix} 1{,}52 & 0 & 0 & -0{,}80 & 0 & 0 \\ & 1{,}08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3{,}20 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{symétrique} & & 1{,}52 & 0 & 0 \\ & & & & 1{,}08 & 0 \\ & & & & & 3{,}20 \end{bmatrix}$$

1re hypothèse

Avant d'inverser, on voit qu'ici les ellipsoïdes de déformations ont une forme plus favorable.

$$\begin{bmatrix} 2{,}08 & 0 & 0 & -0{,}80 & 0 & 0 \\ & 1{,}92 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1{,}80 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2{,}08 & 0 & 0 \\ & \text{symétrique} & & & 1{,}92 & 0 \\ & & & & & 1{,}80 \end{bmatrix}$$

2e hypothèse

Dans la littérature sur les moindres carrés les équations aux déformations sont appelées « Verbesserungsgleichungen ».

$$\begin{bmatrix} 0{,}91 & 0 & 0 & +0{,}48 & 0 & 0 \\ & 0{,}93 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0{,}31 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{symétrique} & & 0{,}91 & 0 & 0 \\ & & & & 0{,}93 & 0 \\ & & & & & 0{,}31 \end{bmatrix}$$

Matrice inverse 1re hypothèse

Les longueurs des axes principaux des ellipsoïdes de déformation des nœuds sont proportionnelles aux racines carrées de 0,91, 0,93, 0,31 (1re hypothèse).

Calcul des poids a posteriori comme pour la 1re hypothèse et contrôle somme $p/P = 6$ (6 inconnues)

$$\begin{bmatrix} 0{,}564 & 0 & 0 & +0{,}217 & 0 & 0 \\ & 0{,}52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0{,}555 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0{,}564 & 0 & 0 \\ & \text{symétrique} & & & 0{,}52 & 0 \\ & & & & & 0{,}555 \end{bmatrix}$$

Matrice inverse 2e hypothèse : Les longueurs des axes principaux des deux ellipsoïdes de déformation des nœuds sont proportionnelles aux racines carrées de 0,564, 0,52, 0,555

(Calculs par le Centre électronique EPFL)

Les ellipsoïdes de déformation des deux nœuds libres sont presque sphériques.

Le staticien qui a de l'expérience soupçonnera vite quels nœuds sont susceptibles d'être dotés d'ellipsoïdes de déformation trop aplatis ou allongés.

En résumé on peut dire que l'étude analytique des treillis spatiaux surdéterminés est plus poussée que certains croient, mais davantage à Zurich et outre-Rhin qu'à Lausanne, surtout en ce qui concerne le calcul des déformations.

Enfin certains staticiens se soucient trop peu de l'avis des mathématiciens quant au calcul de systèmes surdéterminés ; on ne peut guère remplacer le calcul d'ellipsoïdes de déformation des nœuds par des mesures. En outre, dans l'enseignement supérieur, pour certains cours d'hyperstatique, il est tenu compte d'année en année des progrès réalisés, ce qui n'est pas le cas pour tous les cours. A cet égard il faut considérer comme justifiées les conclusions énoncées à la fin du texte, page 397 du *Bulletin technique* no 19, notamment en ce qui concerne la méthode dite de Stüssi-Mayor. Enfin, à titre de contrôle des calculs, les poids a posteriori P pour les 1re et 2e hypothèses sont à déterminer.

On peut aussi considérer des axes de coordonnées dont on fait varier l'orientation ; la somme des coefficients de poids des inconnues (quadratiques) demeure constante, ce qui exprime une propriété géométrique connue.

Avant de conclure, envisageons de nouveau le cas d'une coupole à 10 barres surabondantes. La solution remarquablement développée dans la « Baustatik » du Professeur Stüssi donne lieu à 10 équations dites d'élasticité résultant de la formation de dérivées de l'énergie de déformation. Le choix des barres surabondantes à couper n'est pas toujours facile ; en principe on coupera des barres dont le poids est faible. Rappelons que ces poids sont proportionnels aux coefficients d'élasticité, aux sections transversales et aux inverses des longueurs des barres ; il est plus simple de dire que ces poids p sont proportionnels aux inverses des modules m (notation Mayor).

Il est fâcheux que la terminologie ne soit pas unifiée ; les $v = mT$ des publications EPFL 111 et 123 (T *effort* axial) sont les w de G. Dupuis (no 104) et les Δs de Stüssi (variations de longueurs des barres). Ici encore les inconnues sont les variations de coordonnées des nœuds (solution Stüssi-Mayor).

Déformations

La condition du minimum pour l'énergie de déformation revêt donc diverses formes quant aux notations.

Pour les poids P a posteriori on a, en moyenne, $P = {}^4/_3\,p$.

Auparavant rendons constante l'expression $[pvv] = \sum (pvv)$ pour un nœud libre; manifestement on obtient un ellipsoïde. Pour la coupole on forme les matrices

de rigidité et inverse à 30 éléments diagonaux. Pour le double pylône on en avait 6. Mais on se bornera à calculer 2 ellipsoïdes de déformation pour les nœuds 1 et 6 par exemple. Le calcul électronique rend des services surtout pour inverser les matrices. Le calcul semi-graphique joue un rôle.

sans termes absolus, exprimant que la résultante de toutes les forces sollicitant le nœud était normale à la surface.

Dans la publication EPUL nº 111, page 7, le cas où les inconnues sont liées par des conditions est traité de façon générale.

Nœuds	x	y	z	Nœuds	x	y	z	Nœuds	x	y	z
1	−1,24	0	+3,68	6	−2,62	0	+1,84	11	−4,00	0	0
2	−0,38	+1,18	+3,68	7	−0,81	+2,49	+1,84	12	−1,24	+3,80	0
3	+1,00	+0,73	+3,68	8	+2,12	+1,545	+1,84	13	+3,24	+2,36	0
4	+1,00	−0,73	+3,68	9	+2,12	−1,545	+1,84	14	+3,24	−2,36	0
5	−0,38	−1,18	+3,68	10	−0,81	−2,49	+1,84	15	−1,24	−3,80	0

Unité de mesure arbitraire

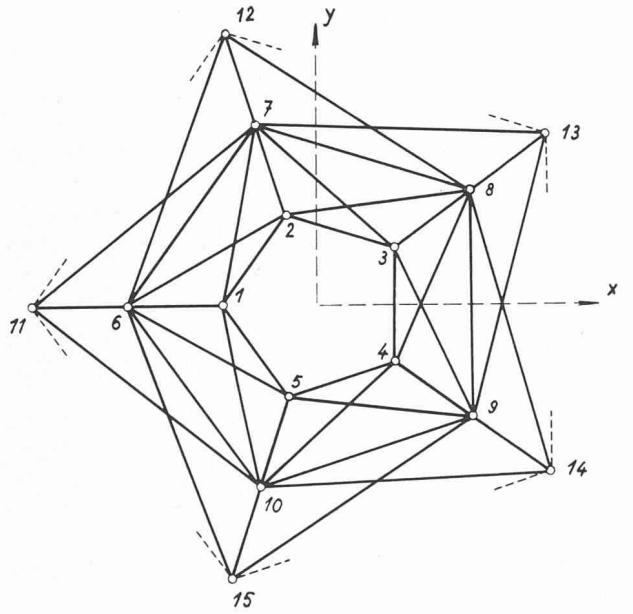

Fig. 2.

La solution Stüssi (Baustatik) ne donnerait lieu qu'à 10 équations d'élasticité mais il faudrait changer les variables pour calculer les déformations. Le staticien expérimenté, par l'examen des matrices inverses, saura modifier les poids et éventuellement la structure pour éviter des ellipsoïdes de déformation des nœuds de forme trop défavorable. La supériorité de cette façon de procéder est manifeste ; la solution comportant des mesures de déformations est de plus en plus remplacée par des calculs du moins dans l'enseignement supérieur. A la base du calcul on a les coefficients de poids des inconnues Qxx, Qyy, Qzz (quadratiques), et les non quadratiques.

La méthode de Mayor fournit aussi les éléments nécessaires pour former les matrices de rigidité ; les coefficients des inconnues, dans les équations aux déformations, sont pratiquement les mêmes. Les équations d'équilibre, relatives aux nœuds libres, fournissent des termes absolus.

Planimétriquement G. Dupuis, dans sa publication EPUL nº 104, s'inspire de la solution de Mayor mais, en plus, montre combien le même résultat peut être obtenu à partir des équations d'équilibre des nœuds ou par l'application du théorème du minimum de l'énergie potentielle. Par contre il n'a pas calculé les ellipses de déformation relatives aux nœuds libres.

De son côté Mayor, a envisagé le cas de nœuds se déplaçant sur des surfaces ; il a abouti à des équations linéaires,

Quant à l'équation du 3e degré, appliquée couramment à Zurich pour les ellipsoïdes, elle revêt la forme (calcul en général par voie semi-graphique) :

$$\begin{vmatrix} (Q_{xx}-K) & Q_{xy} & Q_{xz} \\ & (Q_{yy}-K) & Q_{yz} \\ \text{symétrique} & & (Q_{zz}-K) \end{vmatrix} = 0$$

Voir publications EPUL nº 68 ; EPFL nº 111, 123.

C'est à la chaire de statique de Zurich que l'on doit l'appellation « Formänderungsellipsoid ». A Lausanne, même au 3e cycle, personne ne semble très familiarisé avec ce calcul.

Choix d'une solution

Il résulte de ce qui précède que, dans l'enseignement supérieur, il faut traiter à fond les solutions que nous appellerons Stüssi-Mayor (avec coupures) et Mayor-Dupuis (sans coupures). Mais, ainsi que le disent les mathématiciens, il faut, pour calculer un système surdéterminé, être familiarisé avec la méthode des moindres carrés. A Zurich pour les staticiens c'est le cas ; on a tout de suite compris, à l'EPFZ, qu'il fallait éviter des ellipsoïdes de déformation des nœuds de forme très défavorables. C'est par des calculs, non par des mesures, que cette condition est réalisée.

Conclusions

La remarque judicieuse faite dans la thèse de M. le professeur Pflug au sujet d'études analytiques est à préciser ; dans certaines chaires de statique, la théorie des déformations des systèmes surdéterminés est plus poussée que dans d'autres. La notion d'ellipsoïde de déformation des nœuds y est familière. La méthode Stüssi permet aussi de calculer de ces ellipsoïdes, mais en changeant de variables. La méthode des moindres carrés est encore appliquée.

Le calcul par la méthode dite Stüssi-Mayor donne toute satisfaction ; la solution préconisée dans la thèse est approchée. Ce problème prend toujours plus d'ampleur. Pour les treillis surdéterminés la solution Stüssi-Mayor se révèle à notre avis la meilleure. Le calcul d'un système surdéterminé est le type du problème-fleuve.

LITTÉRATURE

[1] Mayor, B. : *Statique des systèmes spatiaux* (Cours EPUL, épuisé).

[2] Stüssi, F. : *Baustatik I, II* (Birkhäuser).

[3] Wolf, H. : *Ausgleichsrechnung...* (Dümmler-Verlag).

[4] DUPUIS, G. : *L'électronique au service de l'ingénieur* (Publication EPUL, nº 104).

[5] FRIEDRICH, K. : *Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. f. Vermessungsw. 1943).

[6] ANSERMET, A. : *Berechnung überstimmter Fachwerkkuppeln* (trad. chaire statique ETH). (Publication subsidiée par le Fonds national.)

[7] LINKWITZ : Diverses publications de l'Institut Geodäsie-Bauwesen Stuttgart.

[8] PFLUG, L. : *Analyse d'un nouveau type de treillis.*

Adresse de l'auteur :
A. Ansermet, ingénieur, professeur
Clos d'Aubonne 46, 1814 La Tour-de-Peilz

Carnet des concours

Groupe scolaire Arnold Reymond et bâtiment administratif communal

Jugement

Ce concours d'architecture, ouvert par la Municipalité de Pully aux architectes domiciliés ou établis à Pully avant le 1er janvier 1973, aux architectes membres de la Commission d'experts-urbanistes de la Commune de Pully et à quatre architectes invités ayant leur bureau à Lausanne, a été jugé les 28 février, 1er, 7 et 8 mars 1974.

Le Jury, composé de MM. *René Meyer*, président, *Francois Delisle*, vice-président, *Emile Baudraz*, *Frédéric Brugger*, *Georges Jaunin*, *Eric Jéquier*, *Bernard Meuwly*, *Claude Raccoursier*, *Alain Tschumi*, *Gilles Gardet*, *Edgar Notz*, *Pierre Turuvanni*, *Jean-Pierre Gonthier*, *François Dousse*, *Jean-Jacques Schwab*, a décerné les prix suivants :

1er prix de Fr. 12 000.—, projet « Lip » : MM. *Michel Weber* et *Jean-Pierre Cahen*.

2e prix de Fr. 10 000.—, projet « Togo » : M. *Jacques Dumas*.

3e prix de Fr. 9 500.—, projet « Roy » : M. *Jean-Pierre Borgeaud*.

4e prix de Fr. 9 000.—, projet « Noir et Blanc » : M. *Rudolf Barraud*.

5e prix de Fr. 8 000.—, projet « Ad Hoc » : M. *Hubert Reymondin*.

6e prix de Fr. 6 000.—, projet « Bouchon » : MM. *Eric Musy* et *Paul Vallotton*.

7e prix de Fr. 5 500.—, projet « M 10 » : MM. *Mario Bevilacqua* et *Jean-Daniel Urech*.

8e prix de Fr. 5 000.—, projet « Igor » : M. *Jean Kyburz*.

Le Jury a en outre décidé l'achat, à raison de Fr. 3 500.— chacun :

— du projet « P'tit Can » de M. *David Nicole* ;

— et du projet « Delta » de MM. *Raymond Guidetti*, *Jean Boever* et *Jean-Pierre Lavizzari*.

Les dix-neuf projets reçus et jugés seront exposés au public, à la Maison pulliérane, du jeudi 4 avril à 14 heures au mercredi 17 avril 1974 y compris.

Heures d'ouverture : 9 h. à 12 h. et 14 h. à 19 h.

Extrait du rapport de Jury

1er prix : « Lip »

Ce projet se caractérise par ses volumes de dimensions modestes et l'utilisation judicieuse du terrain avec la conservation des deux arbres.

Mais la vue sur la grande toiture de la salle omni-sports, depuis le chemin du Faux-Blanc, n'est pas agréable. La zone de verdure à l'ouest des bâtiments ne peut se réaliser qu'au moyen d'un engazonnement complet des toitures des salles spéciales.

Les cheminements piétons nord-sud et est-ouest sont satisfaisants et indépendants du fonctionnement du groupe scolaire.

L'accès des véhicules au réfectoire est correct alors qu'il ne l'est pas pour l'aula.

La salle omni-sports n'est pas accessible par les véhicules.

De trop nombreuses sorties de parking débouchent sur le chemin du Faux-Blanc.

La majeure partie des classes est à l'abri des bruits de la route cantonale.

Le terrain de sport est éloigné du bâtiment des classes, mais proche du bâtiment administratif.

Bonne disposition des niveaux des classes permettant la flexibilité souhaitée.

Dans les niveaux supérieurs, les circulations horizontales et verticales sont bonnes ; par contre, ces qualités disparaissent dans les niveaux inférieurs. L'éclairage de trop nombreuses classes spéciales n'est pas garanti.

Ce projet sympathique présente toutefois des défauts, notamment en ce qui concerne :

— la position du groupe administratif,
— les relations verticales avec l'économat,
— l'implantation du logement du concierge,
— l'accès à la salle de musculation,
— les locaux manquants dans l'aula et la salle omni-sports.

Ce projet est avantageux du point de vue économique (cube SIA : 85 736 m³).

2e prix : Projet « Togo »

Parti franchement défini en trois blocs distincts sur plans carrés, posé sur des plates-formes modifiant sensiblement la configuration du sol naturel, au surplus très occupé. Même si le projet paraît simple dans son expression extérieure, il se développe néanmoins sur cinq niveaux vu depuis le préau Sud.

Les circulations sont dans l'ensemble bien étudiées ; par contre, l'accès des véhicules au parking Ouest est malheureux.

L'accès au niveau de l'entrée principale emprunte des cheminements verticaux compliqués.

L'organisation des niveaux supérieurs est bonne à l'encontre de celles des niveaux inférieurs, notamment dans la zone de la bibliothèque.

Les salles de classes sont relativement éloignées du bruit de la route cantonale.

La flexibilité souhaitée est obtenue.

On peut se demander si le vide central du bâtiment des classes, sur 5 étages, est propice à la vie scolaire de 800 enfants.

L'expression architecturale est traitée sommairement.

Type de structures expérimentées, mais infrastructures et terrasses, rampes et aménagements extérieurs coûteux.

D'une manière générale, ce projet est coûteux (cube SIA : 90 511 m³).