

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 98 (1972)
Heft: 7

Artikel: Bases théoriques des méthodes extensométriques
Autor: Xenophontidis, N.D.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-71539>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bases théoriques des méthodes extensométriques

par N.D. XENOPHONTIDIS, ingénieur EMP¹, chef de section à l'Institut des métaux et machines de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Extensométrie

Les solides soumis à des sollicitations se déforment. Pendant la déformation on distingue deux phases : une phase où les déformations sont très petites et réversibles puis une phase où les déformations sont plus importantes et irréversibles.

Pour calculer les déformations dans la première phase, on fait un certain nombre d'hypothèses concernant les propriétés mécaniques des matériaux et on en déduit la théorie de l'élasticité.

La théorie de l'élasticité ne constitue qu'une approximation de la réalité. De plus, elle conduit à des équations aux dérivées partielles dont l'intégration dans la majorité des cas pratiques ne peut être faite facilement.

La résistance des matériaux considère un certain nombre de cas simples. Elle idéalise les solides en leur donnant des formes telles que poutres, plaques, coques, etc. Les résultats ne sont cependant valables que sous certaines conditions assez limitatives et généralement pas aux encastresments, appuis, points d'application de la charge.

On a donc imaginé des méthodes expérimentales qui constituent en fait des méthodes d'intégration des équations de la théorie de l'élasticité. Différentes techniques se sont ainsi développées qui constituent « l'analyse expérimentale des déformations ».

Parmi les nombreuses techniques de l'analyse des déformations (ou des contraintes), certaines étudient le comportement interne des solides par des procédés destructifs ou par l'étude de modèles spéciaux. D'autres, par contre, consistent à mesurer les seules déformations des surfaces externes des constructions et machines réelles. Seules sont alors connues les contraintes superficielles, mais comme généralement c'est en surface qu'apparaissent les contraintes les plus élevées, cet inconvénient n'est pas majeur. D'autre part, lorsque les mesures superficielles vérifient les résultats des calculs, on en déduit que, selon toute probabilité, il en est de même pour l'intérieur de la structure.

La méthode qui a pour objet la mesure des déformations superficielles des corps s'appelle extensométrie. Le dispositif permettant cette mesure est un extensomètre.

Les principes sur lesquels elle repose sont ceux de la théorie de l'élasticité à laquelle il convient de se référer pour l'interprétation des résultats.

Déformation

Comme nous venons de le dire, les solides naturels sont déformables. On peut exprimer cette propriété de manière précise en disant que la distance entre 2 points quelconques d'un solide varie en fonction des sollicitations extérieures.

On appelle déplacement total d'un point A la distance entre les positions avant et après la variation de la forme

du corps. Les composantes sur trois axes x, y, z du vecteur déplacement total sont désignées respectivement par u, v, w .

Pour définir la déformation du solide au voisinage d'un point P quelconque, on considère, dans une direction quelconque, un point « voisin » Q , tel que la distance $|\vec{PQ}|$ soit petite vis-à-vis de la plus petite dimension du solide. Dans la théorie, on la suppose infiniment petite, dans les mesures expérimentales, elle est seulement petite, c'est la longueur de base ou base de mesure.

Lorsque les sollicitations ont été appliquées, cette longueur $|PQ|$ devient $|P'Q'|$. On appelle déformation dans la direction PQ le rapport sans dimension

$$(1) \quad \varepsilon_{PQ} = \frac{|P'Q'| - |PQ|}{|PQ|}$$

De la figure 1 nous obtenons

$$(2) \quad \begin{cases} (PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ (P'Q')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \\ \Delta x' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \Delta y' = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \Delta z' = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \Delta z \end{cases}$$

Les relations (2) donnent :

$$(P'Q')^2 = \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) (\Delta x)^2 + \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) (\Delta y)^2 +$$

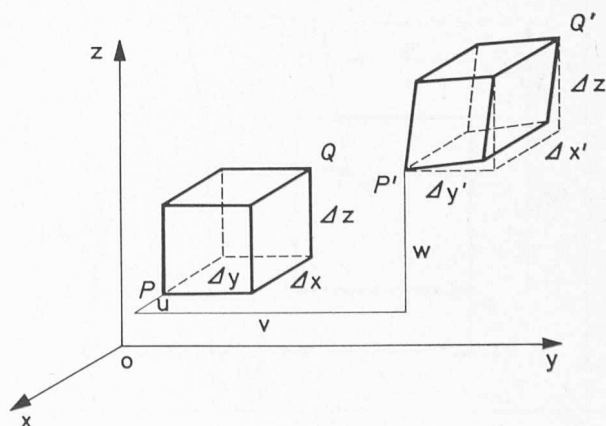


Fig. 1.

¹ Ecole polytechnique d'Athènes.

$$+ \left(1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) (\Delta z)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Delta x \Delta y + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \Delta y \Delta z + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \Delta z \Delta x$$

L'équation (1) donne encore :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{PQ} + 1)^2 &= \left(\frac{(P'Q')}{PQ}\right)^2 = \cos^2(x, PQ) + \cos^2(y, PQ) + \\ &+ \cos^2(z, PQ) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(x, PQ) + \\ &+ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2(y, PQ) + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2(z, PQ) + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos(x, PQ) \cos(y, PQ) + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos(y, PQ) \cos(z, PQ) + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos(z, PQ) \cos(x, PQ) \end{aligned}$$

et puisque

$$\cos^2(x, PQ) + \cos^2(y, PQ) + \cos^2(z, PQ) = 1$$

il vient finalement

$$\begin{aligned} (3) \quad \varepsilon_{PQ} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(x, PQ) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2(y, PQ) + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2(z, PQ) + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos(x, PQ) \cos(y, PQ) + \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos(y, PQ) \cos(z, PQ) + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos(z, PQ) \cos(x, PQ) \end{aligned}$$

Pour voir la signification des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} \dots \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \dots$$

examinons la figure 2.

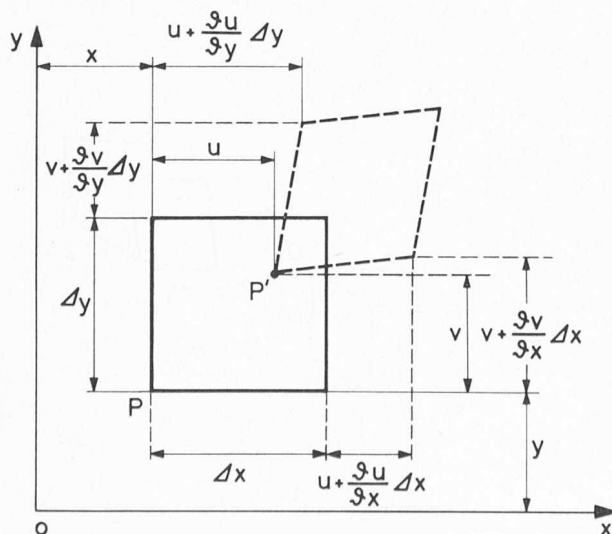


Fig. 2.

Nous avons

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

de même, on trouve pour les autres directions

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Les ε représentent les déformations selon les axes x, y et z . On les appelle déformations normales.

En examinant le carré de la figure 2, on remarque que non seulement il subit une translation, mais que simultanément il se déforme.

La figure 2 montre aussi que la variation de l'angle droit, c'est-à-dire l'angle de glissement dans le plan xy est

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

De même pour les autres plans on trouve

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Ces angles de glissement sont appelés aussi déformations de cisaillement.

Choisissons à présent un axe x' parallèle à PQ . La relation (3) devient :

$$(4) \quad \varepsilon'_x = \varepsilon_x \alpha_1^2 + \varepsilon_y \alpha_2^2 + \varepsilon_z \alpha_3^2 + \gamma_{xy} \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_{yz} \alpha_2 \alpha_3 + \gamma_{zx} \alpha_3 \alpha_1$$

$$\text{Avec } \alpha_1 = \cos \widehat{x x'} \quad \alpha_2 = \cos \widehat{y x'} \quad \alpha_3 = \cos \widehat{z x'}$$

En choisissant la direction de PQ parallèle à deux autres axes y', z' on trouve d'une manière analogue :

$$(5) \quad \varepsilon'_y = \varepsilon_x \beta_1^2 + \varepsilon_y \beta_2^2 + \varepsilon_z \beta_3^2 + \gamma_{xy} \beta_1 \beta_2 + \gamma_{yz} \beta_2 \beta_3 + \gamma_{zx} \beta_3 \beta_1$$

$$\text{avec } \beta_1 = \cos \widehat{x y'} \quad \beta_2 = \cos \widehat{y y'} \quad \beta_3 = \cos \widehat{z y'}$$

$$(6) \quad \varepsilon'_z = \varepsilon_x \gamma_1^2 + \varepsilon_y \gamma_2^2 + \varepsilon_z \gamma_3^2 + \gamma_{xy} \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_{yz} \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_{zx} \gamma_3 \gamma_1$$

$$\text{avec } \gamma_1 = \cos \widehat{x z'} \quad \gamma_2 = \cos \widehat{y z'} \quad \gamma_3 = \cos \widehat{z z'}$$

Pour l'évaluation de la déformation de cisaillement, on considère la variation angulaire de deux segments PQ_1 et PQ_2 initialement orthogonaux entre eux. En choisissant PQ_1 parallèle à x' et PQ_2 parallèle à y' et finalement un autre segment PQ_3 perpendiculaire aux deux autres, donc parallèle à z' , nous obtenons

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma_{x'y'} = 2 \varepsilon_x \alpha_1 \beta_1 + 2 \varepsilon_y \alpha_2 \beta_2 + 2 \varepsilon_z \alpha_3 \beta_3 + \\ \quad + \gamma_{xy} (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) + \gamma_{yz} (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) + \\ \quad + \gamma_{zx} (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) \\ \gamma_{y'z'} = 2 \varepsilon_y \beta_2 \gamma_2 + 2 \varepsilon_z \beta_3 \gamma_3 + 2 \varepsilon_x \beta_1 \gamma_1 + \\ \quad + \gamma_{yz} (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) + \gamma_{zx} (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) + \\ \quad + \gamma_{xy} (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \\ \gamma_{z'x'} = 2 \varepsilon_z \gamma_3 \alpha_3 + 2 \varepsilon_x \gamma_1 \alpha_1 + 2 \varepsilon_y \gamma_2 \alpha_2 + \\ \quad + \gamma_{zx} (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + \gamma_{xy} (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) + \\ \quad + \gamma_{yz} (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) \end{cases}$$

Les relations (4), (5), (6) et (7) peuvent être utilisées pour le passage d'un système des coordonnées $x y z$ à un autre $x' y' z'$.

Pour $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$ et l'axe des z' parallèle à l'axe z , les relations précédentes donnent

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon'_x = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \varepsilon'_y = \varepsilon_y \cos^2 \theta + \varepsilon_x \sin^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \gamma'_{x'y'} = 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \theta \cdot \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \varepsilon'_{z'} = \varepsilon_z \quad \gamma'_{y'z'} = \gamma'_{z'x'} = 0 \quad \alpha_1 = \cos \theta \end{cases}$$

Ces équations sont couramment utilisées dans la technique de mesure avec les jauges de contraintes.

Il est évident qu'au point P il y a autant de valeurs de la déformation ε que de directions issues de P . Ainsi ε est une fonction des coordonnées du point P et des cosinus directeurs caractérisant les directions PQ .

Conclusion

En faisant seulement l'hypothèse que le déplacement subi par le point P au cours de la déformation est une fonction continue du point P et en admettant que cette déformation est infiniment petite, on voit que la déformation ε dans la direction $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, est donnée par les relations (4), (5), (6) et (7).

On démontrera plus loin qu'en tout point P d'un solide il existe trois directions, en général uniques, orthogonales entre elles et telles que si on les prend comme axes de coordonnées, les glissements sont nuls :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Par suite, ces trois directions particulières, orthogonales entre elles dans le solide libre, restent orthogonales entre elles au cours de la déformation : ce sont les directions principales de la déformation au point P .

Contraintes

Pour relier la déformation du solide aux forces extérieures, il est indispensable d'introduire la notion d'efforts intérieurs ou contraintes. Alors que la déformation est un phénomène physique mesurable sur le solide même, au moins en surface, les contraintes ne peuvent être directement mesurées.

Nous considérons un petit élément de surface dS en un point P quelconque du solide. Cet élément est défini par la direction positive de sa normale, de cosinus directeurs α_1, α_2 et α_3 . Par la suite, on considère l'action exercée par la partie du solide infiniment voisine à dS et située du côté positif de la normale, sur la partie du solide infiniment voisine de dS et située du côté négatif de la normale.

Si dS représente l'aire très petite de la surface, cette action se réduit, dans les cas pratiques, à une force unique dont la valeur est proportionnelle à dS .

La contrainte p sur cet élément est par définition la limite

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Il est important de noter que la contrainte p est une fonction de la position du point P et de l'orientation de la surface qui passe par ce point.

La projection de p sur la normale à la surface ΔS est la contrainte normale σ , sa projection sur le plan considéré est la contrainte tangentielle τ .

Considérons un système d'axes x, y, z au point P , et menons trois plans perpendiculaires aux axes x, y et z comme sur la figure 3.

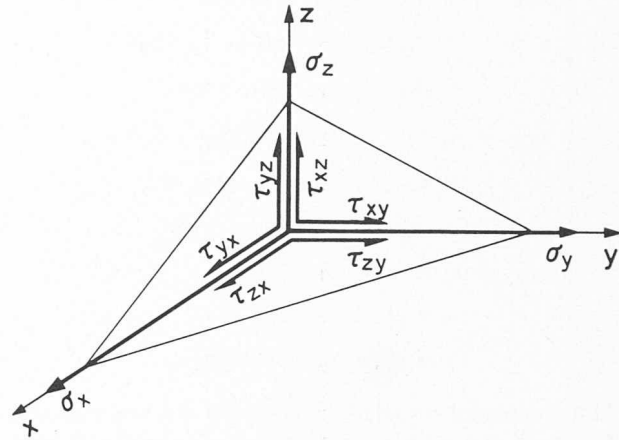


Fig. 3.

On appelle plan (x) le plan qui est perpendiculaire à l'axe x , etc. Selon ce qui vient d'être dit, la contrainte qui agit sur le plan x peut être décomposée en une contrainte normale σ_x et deux contraintes tangentielles selon les directions y et z : τ_{xy}, τ_{xz} . De même pour les deux autres plans nous avons les contraintes : $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ et $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

Cauchy a démontré pour la première fois que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ et $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Ainsi nous disposons de six composantes de contraintes.

En considérant l'équilibre d'un tétraèdre élémentaire autour du point P on démontre que ces six composantes ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) sont suffisantes pour la détermination de la contrainte sur un plan arbitraire passant par P .

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les cosinus directeurs de la normale du plan considéré et p_{ax}, p_{ay}, p_{az} les composantes de la contrainte selon les directions x, y et z , nous obtenons

$$(9) \quad \begin{cases} p_{ax} = \sigma_x \alpha_1 + \tau_{yx} \alpha_2 + \tau_{zx} \alpha_3 \\ p_{ay} = \tau_{xy} \alpha_1 + \sigma_y \alpha_2 + \tau_{zy} \alpha_3 \\ p_{az} = \tau_{xz} \alpha_1 + \tau_{yz} \alpha_2 + \sigma_z \alpha_3 \end{cases}$$

Une autre possibilité consiste à décomposer la contrainte p_x selon les trois directions suivantes :

- Une direction x' selon la direction de la normale
- Une direction y' située dans le plan de la section
- Une autre z' perpendiculaire aux deux autres.

Selon la direction x' on a :

$$\sigma'_x = \vec{p}_x \cdot \vec{a} = p_{ax} \alpha_1 + p_{ay} \alpha_2 + p_{az} \alpha_3$$

et finalement

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma'_x = & \sigma_x \alpha_1^2 + \sigma_y \alpha_2^2 + \sigma_z \alpha_3^2 + 2 \tau_{xy} \alpha_1 \alpha_2 + \\ & + 2 \tau_{yz} \alpha_2 \alpha_3 + 2 \tau_{zx} \alpha_3 \alpha_1 \end{aligned}$$

En choisissant deux autres plans perpendiculaires aux axes y' et z' avec comme indices les vecteurs β et γ , nous obtenons

$$(10) \quad \sigma'_y = \sigma_x \beta_1^2 + \sigma_y \beta_2^2 + \sigma_z \beta_3^2 + 2 \tau_{xy} \beta_1 \beta_2 +$$

$$+ 2 \tau_{yz} \beta_2 \beta_3 + 2 \tau_{zx} \beta_3 \beta_1$$

$$(10) \quad \sigma'_z = \sigma_x \gamma_1^2 + \sigma_y \gamma_2^2 + \sigma_z \gamma_3^2 + 2 \tau_{xy} \gamma_1 \gamma_2 +$$

$$+ 2 \tau_{yz} \gamma_2 \gamma_3 + 2 \tau_{zx} \gamma_3 \gamma_1$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{x'y'} = \bar{p}_a \cdot \bar{\beta} = \sigma_x \alpha_1 \beta_1 + \sigma_y \alpha_2 \beta_2 + \sigma_z \alpha_3 \beta_3 + \\ \quad + \tau_{xy} (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) + \tau_{yz} (\alpha_2 \beta_3 + \\ \quad + \beta_2 \alpha_3) + \tau_{zx} (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) \\ \tau_{y'z'} = \bar{p}_\beta \cdot \bar{\gamma} = \sigma_y \beta_2 \gamma_2 + \sigma_z \beta_3 \gamma_3 + \sigma_x \beta_1 \gamma_1 + \\ \quad + \tau_{yz} (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) + \tau_{zx} (\beta_3 \gamma_1 + \\ \quad + \gamma_3 \beta_1) + \tau_{xy} (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \\ \tau_{z'x'} = \bar{p}_\gamma \cdot \bar{\alpha} = \sigma_z \gamma_3 \alpha_3 + \sigma_x \gamma_1 \alpha_1 + \sigma_y \gamma_2 \alpha_2 + \\ \quad + \tau_{zx} (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + \tau_{xy} (\gamma_1 \alpha_2 + \\ \quad + \alpha_2 \gamma_1) + \tau_{yz} (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) \end{array} \right.$$

En comparant les relations (7) et (8) aux relations (10) et (11), on voit qu'elles sont analogues si on fait les correspondances suivantes entre les contraintes et les déformations :

$$\sigma_x \longleftrightarrow \varepsilon_x \quad 2 \tau_{xy} \longleftrightarrow \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y \longleftrightarrow \varepsilon_y \quad 2 \tau_{yz} \longleftrightarrow \gamma_{yz}$$

$$\sigma_z \longleftrightarrow \varepsilon_z \quad 2 \tau_{zx} \longleftrightarrow \gamma_{zx}$$

Dans un plan défini par sa normale $\bar{\alpha}$, la contrainte tangentielle $\bar{\tau}_\alpha$ peut prendre la forme suivante :

$$\tau_\alpha^2 = p_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2 = (p_{\alpha x} \alpha_2 - p_{\alpha y} \alpha_1)^2 + (p_{\alpha y} \alpha_3 - p_{\alpha z} \alpha_2)^2 + \\ + (p_{\alpha z} \alpha_1 - p_{\alpha x} \alpha_3)^2$$

Par conséquent, la contrainte tangentielle devient nulle pour les sections où

$$p_{\alpha x} : p_{\alpha y} : p_{\alpha z} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

Il est évident que pour une telle section on a

$$\bar{p}_\alpha = \bar{\alpha} \sigma \quad \text{ou} \quad p_{\alpha x} = \sigma \alpha_1 \quad p_{\alpha y} = \sigma \alpha_2 \quad p_{\alpha z} = \sigma \alpha_3$$

et le système (9) devient

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma) \alpha_1 + \tau_{yx} \alpha_2 + \tau_{zx} \alpha_3 = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_1 + (\sigma_y - \sigma) \alpha_2 + \tau_{zx} \alpha_3 = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_1 + \tau_{yz} \alpha_2 + (\sigma_z - \sigma) \alpha_3 = 0 \end{array} \right.$$

Ce système ne peut avoir de solutions non nulles que si son déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(13) \quad \sigma^3 - a\sigma^2 + b\sigma - c = 0$$

a, b, c = fonction des contraintes $\sigma_x \dots \tau_{xy} \dots$

L'équation (13) donne en général trois racines σ_1, σ_2 et σ_3 qui sont les valeurs des contraintes principales (pour lesquelles les τ sont nuls).

On peut démontrer qu'il est toujours possible de trouver trois directions perpendiculaires entre elles telles que les contraintes tangentielles soient nulles (directions principales).

Représentation géométrique de l'état de contrainte en un point

Nous venons de voir que l'état de contrainte en un point est défini par les équations (9) ou (10) et (11), tandis que l'état de déformation est défini par les équations analogues (4), (5), (6) et (7).

Par la suite, nous allons examiner quelques méthodes géométriques pour la représentation des lois trouvées. Vu l'analogie des équations régissant les contraintes et les déformations, il est indifférent de raisonner sur les unes ou sur les autres. Prenons les contraintes.

Soit σ_1, σ_2 et σ_3 les trois contraintes principales qui caractérisent l'état de contrainte en un point. On considère un système d'axes rectangulaire local $x y z$ parallèle aux trois directions σ_1, σ_2 et σ_3 . Il est évident qu'il n'y a pas perte de la généralité du problème du fait que les directions principales peuvent être définies pour chaque état de contrainte. On suppose par la suite que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Ellipsoïde de Lamé

Pour un système d'axes ainsi choisi on a

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad \sigma_z = \sigma_3$$

$$\tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Les équations (9) deviennent

$$p_{\alpha x} = \sigma_1 \alpha_1 \quad p_{\alpha y} = \sigma_2 \alpha_2 \quad p_{\alpha z} = \sigma_3 \alpha_3$$

et puisque $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, il vient

$$\frac{p_{\alpha x}^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_{\alpha y}^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_{\alpha z}^2}{\sigma_3^2} = 1$$

ou

$$(14) \quad \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

avec $x \equiv p_{\alpha x} \quad y \equiv p_{\alpha y} \quad z \equiv p_{\alpha z}$

L'équation (14) représente un ellipsoïde, appelé ellipsoïde de Lamé. Chaque rayon vecteur de 0 (voir figure 4) au point $P(x, y, z) \equiv P(p_{\alpha x}, p_{\alpha y}, p_{\alpha z})$ qui a pour longueur $P_\alpha = \sqrt{p_{\alpha x}^2 + p_{\alpha y}^2 + p_{\alpha z}^2}$ est égal à la contrainte résultante sur un plan passant par l'origine.

Une construction auxiliaire est nécessaire pour la détermination de ce plan (non reproduite ici).

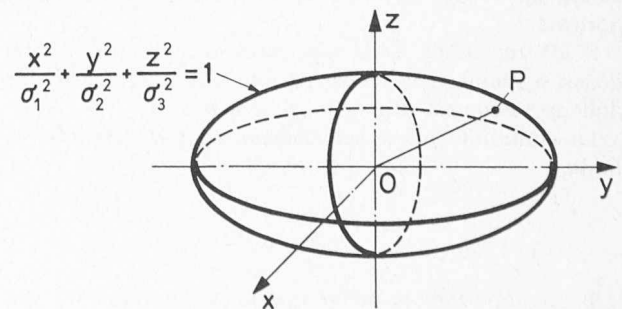


Fig. 4.

Quadrique indicatrice des tensions normales

Une autre méthode graphique pour la représentation de l'état de contrainte en un point peut être obtenue en considérant la surface.

$$(15) \quad \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm 1$$

$$(p_{\alpha x} \equiv x \quad p_{\alpha y} \equiv y \quad p_{\alpha z} \equiv z)$$

$$\text{On démontre que } \left[O P = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \right]$$

σ_n étant la contrainte normale au point considéré.

Les figures 5 et 6 montrent les trois formes de la surface (15).

Cercles de Mohr

La construction des cercles de Mohr constitue le moyen le plus commode pour la représentation des contraintes en un point. Elle fournit immédiatement la réponse à plusieurs questions difficiles à résoudre autrement. Ainsi par exemple elle donne immédiatement les contraintes normales et tangentielles pour un état de contrainte donné.

En admettant les mêmes suppositions que celles qui ont été faites pour les autres constructions géométriques, il vient :

$$\sigma_\alpha = \bar{p}_\alpha \cdot \bar{\alpha} = p_{\alpha x} \cdot \alpha_1 + p_{\alpha y} \cdot \alpha_2 + p_{\alpha z} \cdot \alpha_3$$

et puisque

$$p_{\alpha x} = \sigma_1 \alpha_1 \quad p_{\alpha y} = \sigma_2 \alpha_2 \quad p_{\alpha z} = \sigma_3 \alpha_3$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2$$

$$\bar{p}_\alpha = \bar{i} p_{\alpha x} + \bar{j} p_{\alpha y} + \bar{k} p_{\alpha z} = \bar{i} \sigma_1 \alpha_1 + \bar{j} \sigma_2 \alpha_2 + \bar{k} \sigma_3 \alpha_3$$

il vient

$$\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2$$

Nous avons ainsi le système d'équations :

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2 = \sigma_\alpha \\ \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2 = \sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 \end{cases}$$

Ces équations donnent :

$$(16') \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = \frac{(\sigma_\alpha - \sigma_2)(\sigma_\alpha - \sigma_3) + \tau_\alpha^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ \alpha_2^2 = \frac{(\sigma_\alpha - \sigma_3)(\sigma_\alpha - \sigma_1) + \tau_\alpha^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ \alpha_3^2 = \frac{(\sigma_\alpha - \sigma_1)(\sigma_\alpha - \sigma_2) + \tau_\alpha^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

La première de ces équations après quelques transformations donne

$$(17) \quad \tau^2 + \left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 \alpha_1^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 (1 - \alpha_1^2)$$

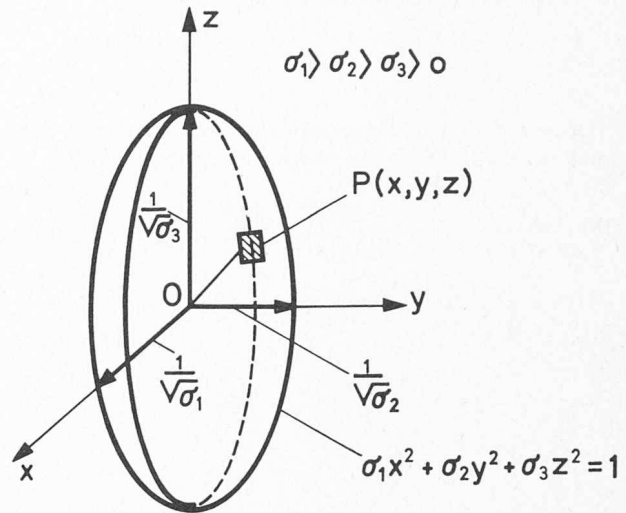


Fig. 5.

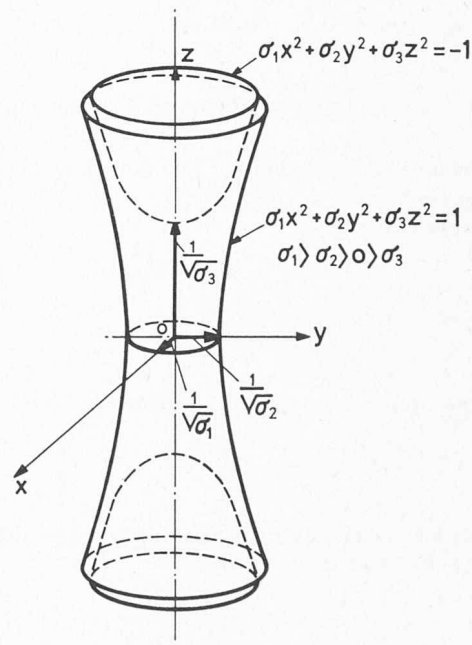


Fig. 6.

Cette équation, pour σ_1 , σ_2 et σ_3 données, représente une famille de cercles dans le plan σ_α , τ_α avec comme centre

$$\left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right]$$

le cosinus directeur α_1 étant le paramètre. Sachant que

$$0 \leq \alpha_1^2 \leq 1$$

on remarque que la famille des cercles est comprise entre les deux cercles limites :

$$\tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 = \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 \quad \alpha_1 = 0$$

$$\tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 = \left[\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 \quad \alpha_1 = 1$$

Ces cercles ont respectivement pour rayon

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

De même les deux autres équations donnant les α_2^2 et α_3^2 conduisent finalement aux deux équations suivantes :

$$(18) \quad \tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^2 = \left[\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^2 \alpha_2^2 + \left[\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right]^2 (1 - \alpha_2^2)$$

$$(19) \quad \tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 = \left[\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 \alpha_3^2 + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right]^2 (1 - \alpha_3^2)$$

représentant deux cercles ayant comme centres, respectivement :

$$\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0 \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0$$

Sur la figure 7, on voit les six cercles limites ainsi obtenus.

Il est évident que chaque point $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ doit se trouver dans la région hachurée.

La figure montre que :

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \quad \sigma_{min} = \sigma_3$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{min} = 0$$

La contrainte normale qui agit sur le plan τ_{max} est

$$\sigma_{\tau_{max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Pour trouver les cosinus du plan τ_{max} on retourne aux équations (16'). Ces équations, pour

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \quad \text{et} \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

donnent

$$\alpha_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En résumé, nous avons (pour un état de contrainte défini par les trois contraintes principales $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) :

a) La contrainte tangentielle *max* est égale à

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

b) Elle agit sur deux plans parallèles à la direction σ_2 et inclinés à 45° par rapport à σ_1 et σ_3 .

c) La contrainte normale correspondante est

$$\sigma_{\tau_{max}} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$$

d) Les σ_1 et σ_3 sont les σ_{max} et σ_{min} qui agissent sur le point considéré.

La construction des cercles de Mohr permet de résoudre les deux problèmes suivants :

a) Détermination des $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ agissant sur une section définie par les cosinus directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

b) Détermination des α_1, α_2 et α_3 quand les σ_α et τ_α sont donnés.

Revenons aux équations (17), (18) et (19). Ces trois équations peuvent encore s'écrire

$$(20) \quad \begin{cases} r_1^2 = \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right]^2 + \alpha_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) \\ r_2^2 = \left[\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right]^2 + \alpha_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3) (\sigma_2 - \sigma_1) \\ r_3^2 = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right]^2 + \alpha_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1) (\sigma_3 - \sigma_2) \end{cases}$$

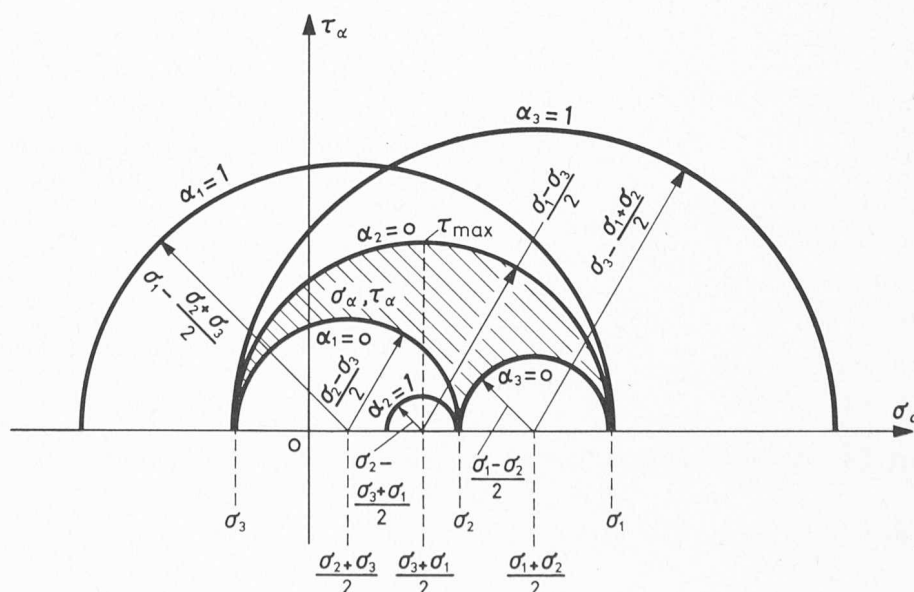


Fig. 7. — Cercles de Mohr pour l'état tridimensionnel des contraintes défini par les contraintes principales $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

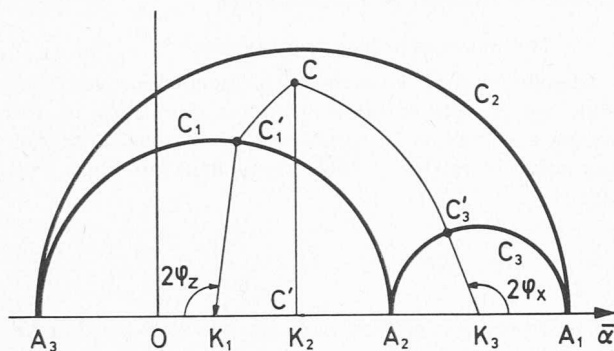


Fig. 8.

Dans ces équations, on remarque que

$$r_1 = f(\alpha_1) \quad r_2 = f(\alpha_2) \quad r_3 = f(\alpha_3)$$

Par conséquent, si $\alpha_1 = \text{const}$ (angle du vecteur $\bar{\alpha}$ par rapport à l'axe z const), $r_1 = \text{const}$. C'est-à-dire quand le vecteur $\bar{\alpha}$ tourne autour de l'axe z en maintenant un angle constant, le rayon r_1 décrit un arc de cercle. Les mêmes conclusions sont valables pour les rayons r_2 et r_3 .

En se basant sur ces remarques, on fait la construction suivante :

Sur une droite, on note les positions A_1, A_2, A_3 et on trace les cercles C_1, C_2 et C_3 .

Pour déterminer les contraintes $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ sur une section α définie par les angles :

$$\varphi_x = \widehat{j a} \quad \varphi_z = \widehat{k \alpha}$$

on mène les rayons $K_3 C_3$ et $K_1 C_1$ comme le montre la figure 8.

Par la suite, avec comme centres K_1 et K_3 on mène les arcs de cercle qui se coupent en C . On a : $OC' = \sigma_\alpha$, $CC' = \tau_\alpha$.

Etat bidimensionnel

Dans le cas où

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

la représentation géométrique se simplifie considérablement.

En admettant comme avant que les axes x, y et z sont choisis dans les directions σ_1, σ_2 et σ_3 , il vient :

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad \sigma_z = \sigma_3 = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Les équations précédentes se simplifient :

$$\begin{aligned} p_{\alpha x} &= \sigma_1 \alpha_1 & p_{\alpha y} &= \sigma_2 \alpha_2 & \text{ou} \\ p_{\alpha x} &= \sigma_1 \cos \theta & p_{\alpha y} &= \sigma_2 \sin \theta \end{aligned}$$

et

$$(21) \quad \begin{cases} p_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_2^2 \sin^2 \theta} \\ \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les cercles de Mohr constituent une méthode graphique pour résoudre les deux problèmes a) et b) de la page 122, avec

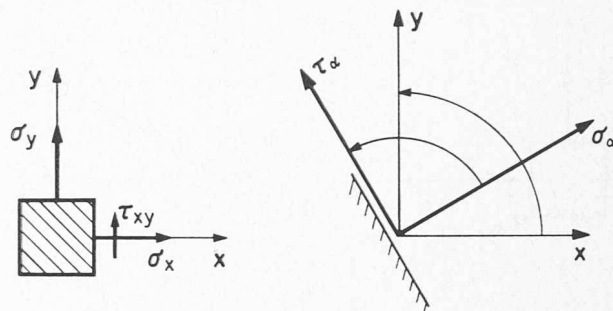


Fig. 9.

comme données les contraintes σ_1, σ_2 et σ_3 . Mais on ne peut pas en général résoudre le problème inverse, c'est-à-dire déterminer σ_1, σ_2 et σ_3 si sont données les contraintes qui agissent sur une section arbitraire.

Cependant, ce problème peut être résolu dans le cas des contraintes bidimensionnelles.

Soient alors des axes qui ne coïncident pas avec les directions σ_1 et σ_2 . Dans ce cas :

$$p_{\alpha x} = \sigma_x \alpha_1 + \tau_{xy} \alpha_2$$

$$p_{\alpha y} = \tau_{xy} \alpha_1 + \sigma_y \alpha_2$$

Après quelques opérations, on trouve :

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases}$$

Pour les déformations correspondantes, on a :

$$(23) \quad \begin{cases} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\varepsilon \gamma_\alpha}{2} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases}$$

Les équations (22) peuvent s'écrire encore de la façon suivante :

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

Note sur la convention des signes

Les σ_x, σ_y sont considérés positifs dans le cas de la traction.

Le τ_{xy} est considéré positif lorsqu'il est orienté comme sur la figure 9.

La même convention est faite pour les σ_α et τ_α .

Les équations (24) représentent un cercle. Nous remarquons que si l'on trace le cercle et que l'on fait varier l'angle 2θ dans une direction, dans la section correspondante l'angle θ varie dans le sens opposé.

La représentation la plus usuelle du cercle de Mohr garde la même direction pour la variation des angles et pour cette raison on doit modifier la convention de signe pour la contrainte tangentielle (voir figure 10).

Les équations (24) deviennent ainsi

$$(25) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

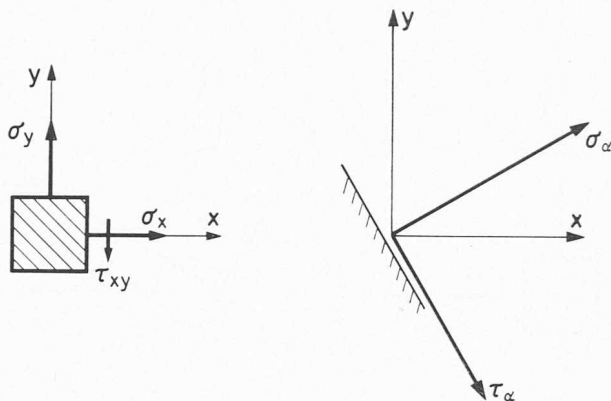


Fig. 10.

Nous venons de dire que ces équations représentent un cercle. Ce fait est mis en évidence après l'élimination de l'angle 2θ . Il vient alors :

$$(26) \quad \left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

C'est l'équation d'un cercle avec comme centre et rayon :

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) \quad \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Le paramètre 2θ est compté à partir du rayon vecteur au point $Q(\sigma_x, \tau_{xy})$, dans le sens inverse de la marche des aiguilles d'une montre, jusqu'au point $P(\sigma, \tau)$.

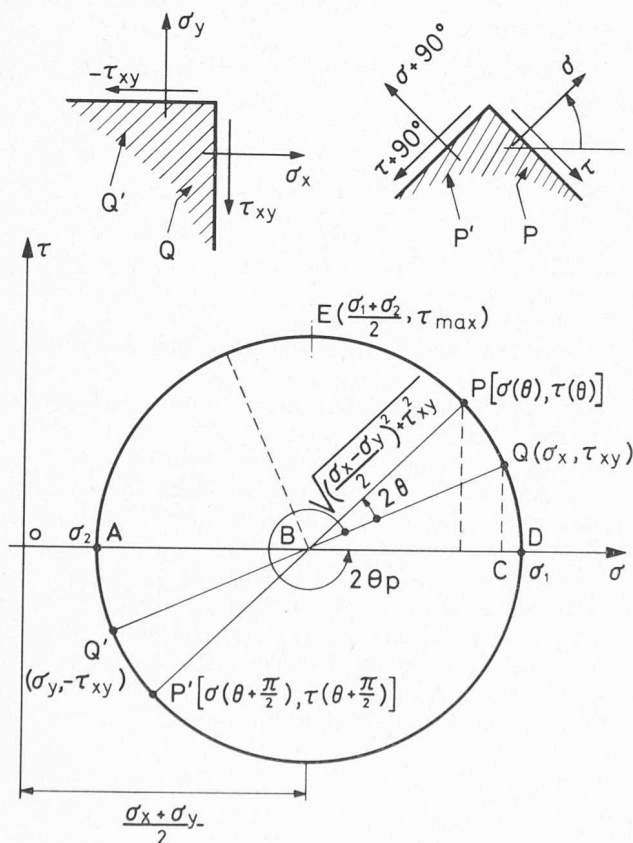


Fig. 11.

Conclusion résultant de la construction

a) Contraintes principales en un point

Chaque point sur le cercle représente un plan bien déterminé passant par le point considéré d'un corps et il a comme coordonnées les contraintes qui agissent sur le plan. Les points A et D ($\tau = 0$) correspondent aux plans principaux :

$$\sigma_{1,2} = OB \pm BP = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Ces expressions peuvent aussi être calculées par différenciation des relations précédentes. Il est évident qu'elles représentent les contraintes max et min qui peuvent agir sur un plan quelconque passant par le point.

b) Orientation des plans principaux

Appelons θ_p l'angle déterminant l'orientation des plans principaux. On a :

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \operatorname{tg}(2\pi - \widehat{CBQ}) = -\operatorname{tg} \widehat{CBQ} = -\frac{CQ}{BC} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Cette équation donne deux valeurs possibles pour l'angle θ_p . On utilise l'équation auxiliaire

$$\sin 2\theta_p = \sin(2\pi - \widehat{CBQ}) = -\frac{CQ}{BQ} = -\frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

qui donne l'angle du plan où agit σ_1 .

c) τ_{max} et orientation des plans sur lesquels il agit

Il est évident que

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\tau_{max}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CBQ} \right) = \frac{BC}{CQ} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

ou

$$\sin 2\theta_{\tau_{max}} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CBQ} \right) = \frac{BP}{BC} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

pour spécifier l'angle.

$$\text{On a encore } \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

d) La méthode du pôle

Le point Q'' est appelé le pôle et a une propriété unique. Une droite menée du point Q'' (pôle) à un point P définit le plan PQ sur lequel agissent les contraintes (σ, τ) (la normale de ce plan ayant la même pente par rapport à l'axe x que la droite $Q''P$ par rapport à $Q''Q$) (fig. 12).

Relations entre les contraintes et les déformations

Jusqu'à présent, les contraintes et les déformations ont été examinées séparément sur la base des considérations purement théoriques, la seule supposition quant au comportement du matériau étant sa continuité. Ainsi les relations trouvées sont valables pour tous les corps qui sont faits d'une matière continue.

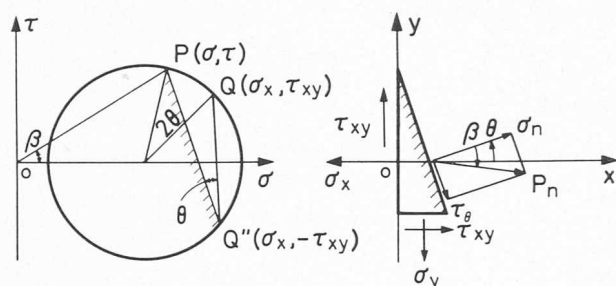


Fig. 12.

Les relations qui lient les contraintes et les déformations sont basées sur des lois expérimentales qui varient suivant le matériau. Ainsi la mécanique est divisée en différentes branches, traitant chacune une classe des matériaux spécifiés (mécanique des fluides, mécanique de la plasticité). La théorie de l'élasticité s'occupe avec les solides sollicités dans leur domaine élastique.

Les relations développées plus loin sont basées sur cette dernière hypothèse.

Loi de Hooke

On considère une barre mince soumise à une force F progressivement croissante. On suppose que la charge est uniformément répartie sur la section. On obtient ainsi le diagramme suivant :

Pour la partie OP nous avons (fig. 13) :

$$(27) \quad \sigma_x = E \varepsilon_x$$

E : constante de proportionnalité.

La valeur de cette constante dépend du matériau. La relation (27) qui montre la proportionnalité de la contrainte et des déformations est appelée *loi de Hooke*.

Loi de Hooke généralisée

On vient de voir que chaque état de contrainte et de déformation peut être défini au moyen de six composantes. Une généralisation logique de la loi de Hooke consiste à faire de chaque composante des contraintes une fonction linéaire des déformations ; cela a été fait par Cauchy :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z + C_{14} \gamma_{xy} + \\ &+ C_{15} \gamma_{yz} + C_{16} \gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= C_{61} \varepsilon_x + C_{62} \varepsilon_y + C_{63} \varepsilon_z + C_{64} \gamma_{xy} + \\ &+ C_{65} \gamma_{yz} + C_{66} \gamma_{zx} \end{aligned}$$

C'est la loi de Hooke généralisée.

$C_{11} \dots$: constantes élastiques du matériau indépendantes des contraintes et des déformations.

On peut démontrer par des considérations sur l'énergie de déformation que pour des corps isotropes (les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions) les 36 constantes ne sont pas indépendantes mais liées entre elles par des relations de sorte qu'il y a deux (et seulement deux) constantes élastiques indépendantes.

Ainsi nous obtenons :

$$\sigma_x = \lambda J_1 + 2 G \varepsilon_x \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

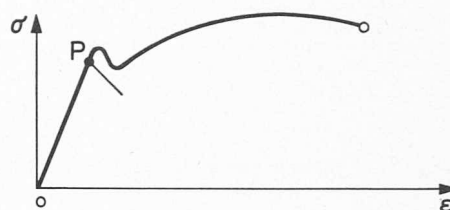


Fig. 13.

$$\sigma_y = \lambda J_1 + 2 G \varepsilon_y \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \lambda J_1 + 2 G \varepsilon_z \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

avec

λ : constante de Lamé

G : module de cisaillement

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

On remarque que si $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ il est $\gamma_{xy} =$

$$= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Pour des corps isotropes, les axes principaux des contraintes et des déformations coïncident.

Signification physique des constantes élastiques

a) Cisaillement pur

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

τ_{xy} = contrainte appliquée.

Les équations précédentes donnent :

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{\text{contraintes de cisaillement}}{\text{déformation angulaire}} = \text{module de cisaillement}$$

b) Cas de la traction simple

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

σ_x = contrainte appliquée.

Les équations précédentes donnent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\lambda + G}{G(3\lambda + 2G)} \sigma_x \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z &= -\frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} \sigma_x \end{aligned}$$

Auparavant, nous avons défini la constante E dans un essai de traction simple :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

Il vient :

$$\lambda = \frac{G(2G - E)}{E - 3G}$$

d'autre part :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = - \frac{\lambda}{2 G (3 \lambda + 2 G)} \cdot \frac{G (3 \lambda + 2 G)}{\lambda + G} \varepsilon_x =$$

$$= - \frac{\lambda}{2 (\lambda + G)} \varepsilon_x = - \nu \varepsilon_x \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\lambda}{2 (\lambda + G)}$$

ν = le rapport négatif $\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ dans le cas de la traction simple.

En choisissant les E , ν comme constantes élastiques, nous obtenons :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 (1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2 (1 + \nu)}{E} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2 (1 + \nu)}{E} \tau_{zx}$$

et

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} ((1 - \nu) \varepsilon_x + \nu (\varepsilon_y + \varepsilon_z))$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} ((1 - \nu) \varepsilon_y + \nu (\varepsilon_z + \varepsilon_x))$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} ((1 - \nu) \varepsilon_z + \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_y))$$

Etat plan des contraintes

$$\sigma_z = 0$$

Il vient :

$$(1 - \nu) \varepsilon_z = - \nu (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z = - \frac{\nu}{(1 - \nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Donc

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} \left((1 - \nu) \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - \frac{\nu^2}{(1 - \nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right)$$

$$= \frac{E}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} \left(\frac{\varepsilon_x (1 - 2 \nu + \nu^2 - \nu^2) + \varepsilon_y (-\nu^2 + \nu - \nu^2)}{(1 - \nu)} \right)$$

$$= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

Finalement

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

BIBLIOGRAPHIE

DEL PEDRO, M., *Résistance des matériaux*. Lausanne.

DURELLI, PHILIPS, TSAO : *Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain*. Mc Graw-Hill.

DALLY, RILEY : *Experimental stress analysis*. Mc Graw-Hill.

Κ. ΓΕΩΡΓΙΚΟΠΟΥΛΟΥ : 'Αντοχή των υλικών. Σ. Παπαδογιάννη.

Adresse des auteurs :

Institut des métaux et des machines de l'Ecole polytechnique fédérale, 34, chemin de Bellerive, 1007 Lausanne.

La nouvelle presse à filer de 7200 tonnes de l'Aluminium suisse S.A., à Chippis

par PIERRE HOFFMANN, ingénieur SIA

L'aluminium prend une place toujours plus importante dans la construction, dans le génie civil et dans de nombreuses branches de l'industrie. Il est livré sous forme de pièces moulées, de pièces laminées et de profilés obtenus par filage. Les applications de ces profilés dont les formes peuvent être extrêmement diverses sont innombrables. Dans certaines d'entre elles, on a besoin de très fortes sections. Il en est ainsi, par exemple, pour les profilés entrant dans la constitution de structures porteuses (bâtiment et génie civil), de façades, d'ossatures de véhicules routiers et ferroviaires, d'engins de manutention de toutes sortes, de machines, ainsi que pour ceux utilisés en électrotechnique et dans les constructions navales et aéronautiques. Ces fortes sections peuvent naturellement être obtenues en assemblant deux ou plusieurs profilés au

moyen de cordons de soudure, par exemple. Mais il est évidemment préférable de les filer d'une seule pièce. C'est pourquoi l'Aluminium suisse S.A. a décidé d'acquérir et d'installer dans son usine de Chippis une presse à filer capable d'exercer sur les billettes un effort de poussée de 7200 tonnes et qui est actuellement la plus forte presse à filer de Suisse. La plus grande presse à filer d'Europe, pouvant exercer une poussée de 8500 tonnes, se trouve en Allemagne et les trois plus grandes presses du monde, pour une poussée de 12 500 tonnes, sont en service aux Etats-Unis. Il existe, d'autre part, une presse de 9500 tonnes au Japon. Les grandes presses ne permettent pas seulement de fabriquer des profilés plus grands, mais ceux-ci peuvent avoir des parois plus minces et des formes plus compliquées. De plus, les alliages de grande résis-