

Zeitschrift:	Bulletin technique de la Suisse romande
Band:	98 (1972)
Heft:	4
Artikel:	Le mécanique aléatoire de Georges Dedeant et Philippe Wehrlé, 1re partie: éléments d'analyse aléatoire
Autor:	Baatard, François / Magnin, Simone
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-71533

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

**Communications de la Chaire de la Mécanique de la turbulence
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et du groupe de travail EPFL-ISM**

La mécanique aléatoire de Georges Dedeback et Philippe Wehrlé

par FRANÇOIS BAATARD, professeur, Dr ès sc. techn., et SIMONE MAGNIN, lic. ès sc. math., assistante

**1^{re} partie : éléments d'analyse
aléatoire**

Introduction

En 1937 paraissait à l'Institut d'histoire des sciences et des techniques de l'Université de Paris, aux éditions Thalès, un fascicule intitulé : « La mécanique des fluides turbulents fondée sur des concepts statistiques » signé respectivement de Georges Dedeback alors sous-directeur scientifique de l'Organisation nationale de météorologie et de Philippe Wehrlé, directeur de ce dernier institut. C'était la première fois que l'on signalait le rôle, d'une manière rationnelle, des dépendances de probabilité traduites pratiquement par les corrélations dans l'évolution d'un fluide turbulent. D'autre part les auteurs faisaient apparaître l'importance de l'échelle et de la superposition des étages de perturbations.

En 1944 et 1945, G. Dedeback publiait dans les « Portugaliae Physica » : 1^o une analyse aléatoire et 2^o une mécanique aléatoire. Seules quelques notes aux comptes rendus de l'Académie des sciences de France avaient jusqu'alors attiré l'attention sur les conceptions de Dedeback et Wehrlé.

L'analyse aléatoire contient comme cas particulier l'analyse certaine : au contact la liaison donnée par la dépendance de probabilité vaut 1.

La catégorie première de la mécanique aléatoire est la dépendance de probabilité. Le relâchement de cette dernière met en évidence la diffusion du milieu et la dissipation de l'énergie par son passage d'un étage à un autre de moindre échelle. D'échelle plus fine que le réel apparent, la structure de l'étage sous-jacent détermine les phénomènes de ce réel apparent qui en sont les effets moyens construits par dépendances de probabilité.

La dépendance de probabilité (hasard lié) est déterminée parce que l'incertitude qui affecte une moyenne provient tout entière du terme d'indépendance (hasard pur).

La théorie de la viscosité turbulente de W. Heisenberg s'intègre dans la mécanique aléatoire dont elle adopte le processus d'évolution des tourbillons. La structure aléatoire rend compte en effet des forces de frottement et des dissipations d'énergie, le frottement n'étant explicable que par des échanges dus à la diffusion turbulente.

La mécanique aléatoire est celle du corpuscule aléatoire, capable de diffuser, les dépendances de probabilité se situant entre la liaison certaine du solide et la liaison hasard pur du gaz parfait ; elle s'exprime uniquement en termes de fonctions aléatoires, de leurs dérivées successives, de leurs écarts types et des dérivées de ces derniers.

Il y a autant de mécaniques statistiques qu'il existe de variétés de fonctions de connexion des champs de probabilité.

BIBLIOGRAPHIE

1. *La mécanique des fluides turbulents fondée sur des concepts statistiques* par G. DEDEBANT et Ph. WEHRLÉ. Thalès 1937-1939.
2. *Sur une méthode d'établissement des équations de l'hydrodynamique*. Note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences de France par G. DEDEBANT, M. KIVELIOVITCH, Philippe WEHRLÉ.
3. *Sur les équations aux dérivées partielles que vérifient les fonctions de distribution d'un champ aléatoire* par G. DEDEBANT, J. MOYAL, Ph. WEHRLÉ. *Id.* 5.2.1940.
4. *Sur l'équivalent hydrodynamique du corpuscule aléatoire* par G. DEDEBANT, J. MOYAL, Ph. WEHRLÉ. Note présentée par M. Louis DE BROGLIE. C. R. de l'Académie des sciences, 210-240.
5. *Mécanique aléatoire* par G. DEDEBANT et Ph. WEHRLÉ. *Portugaliae Physica* 1945.
6. *Les schémas aléatoires devant la relativité restreinte* par G. DEDEBANT. *Id.* 1946.
7. *Principes d'une mécanique aléatoire lagrangienne*. Note de MM. Ferdinand GONSETH et François BAATARD, et présentée par M. Georges DARMOIS. Académie des sciences de France, t. 244. Paris 1937.
8. *Structure générale d'une mécanique de la diffusion*, par François BAATARD. Thèse, Ecole polytechnique fédérale de Zurich. 1963. Rapporteur : Prof. Dr F. GONSETH. Corapporteur : Prof. Dr J. ACKERET.
9. *Mesure de l'inconnexe d'une fonction aléatoire — Théorie de la prévisibilité*. Thèse de Pierre RAVUSSIN, ing. phys. EPFL, Multi-Office. Lausanne 1971.

Il convient de remarquer aussi la grande part qu'a prise le professeur Bass dans l'élaboration mathématique des travaux de G. Dedeback et Ph. Wehrlé.

G. Dedeback et Ph. Wehrlé, avec lesquels nous avons travaillé et correspondu longuement, ont exprimé, de leur vivant, le vœu que soit réalisé le présent travail.

Première partie — Analyse aléatoire

Parmi toutes les analyses aléatoires caractérisées par autant de types de connexions des champs de probabilité des variables aléatoires entrant en jeu qui donnent lieu à autant de mécaniques aléatoires particulières, et vice versa, il en est qui conviennent particulièrement à la turbulence et aux champs dissipatifs : ce sont l'analyse aléatoire et la mécanique aléatoire basée sur des fonctions doublement dérивables en moyenne quadratique.

Chapitre premier — La dérivée aléatoire

L'algèbre des probabilités composées (ou conditionnelles) est plus générale que l'algèbre ordinaire ; ces types de probabilités ne se multiplient pas comme des nombres algébriques :

Règle de calcul :

La probabilité de l'événement complexe (a, b) est le produit de la probabilité de (a) par celle de (b) lorsque (a) s'est produit, c'est-à-dire par (b/a).

$$p(a, b) = p(a)p(b/a)$$

Or $p(b/a)$ traduit la dépendance de probabilité de b vis-à-vis de ce qui s'est produit (qui est mesurée pratiquement par la corrélation entre a et b).

Dans le cas d'indépendance, l'algèbre des probabilités rejoint l'algèbre ordinaire. A partir de l'algèbre des probabilités dépendantes, on construit une *analyse* par l'opération de *passage à la limite* (Fréchet, Paul Lévy, Cramer, Kolmogoroff, Markoff, Kintchine, Slutsky, etc.).

Nous présentons ici une généralisation de ces travaux, sans préjuger de la nature de la dépendance (ou de l'hérité statistique).

Définition :

Une fonction aléatoire équivaut à la loi de probabilité conjuguée

$F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$
pour que les variables aléatoires $X|_{t_1}, X|_{t_2} \dots X|_{t_n}$

puissent prendre les valeurs courantes x_1, x_2, \dots, x_n et ceci pour toute valeur de n .

Aux moyennes de Riemann, en raison de la discontinuité de la fonction aléatoire, on substitue les moyennes stochastiques données par des intégrales de Lebesgue-Stieltjes ; il y a une raison physique à cela : les moyennes temporelles prises dans un intervalle égal à la période sont des constantes et la dispersion $\overline{X'^2(t)} = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} (X|t - \bar{X})^2 dt$ est aussi constante. Il n'y a pas de diffusion à l'intérieur du fluide et pas de possibilité non plus de mettre en équation des phénomènes macroscopiquement évolutifs et en instance de diffusion, c'est-à-dire des *champs dissipatifs*.

Il est évident qu'avec les fonctions aléatoires et discontinues intégrables au sens de Lebesgue-Stieltjes ces difficultés disparaissent, sans attenter à la corrélation. Il va falloir reconnaître parmi cet ensemble de fonctions celles qui sont dérivables (exactement comme en théorie des fonctions analytiques on a choisi celles qui admettent une dérivée : les fonctions monogènes).

1. La différentielle aléatoire

$X|_t$ étant une fonction aléatoire, la *définissante aléatoire* est l'accroissement

$$Z(t, h) = X(t + h) - X(t)$$

L'espérance mathématique en est :

$$\bar{Z}(t, h) = \bar{X}(t + h) - \bar{X}(t) = h \frac{d\bar{X}}{dt}$$

(en supposant que $\bar{X}|_t$ est dérivable).

En supposant X purement aléatoire, donc de valeur probable nulle, l'*écart type* est :

$$\overline{Z^2}(t, h) = \bar{X^2}(t + h) + \bar{X^2}(t) - 2 \bar{X}(t + h) \bar{X}(t)$$

ou bien, avec :

$\sigma(t) = \text{écart type de } X$ et $r(t, t + h) = \text{dépendance de probabilité ou coefficient de corrélation entre } X(t) \text{ et } X(t + h)$:

$$\begin{aligned} Z^2(t, h) &= \sigma^2(t + h) + \sigma^2(t) - \\ &- 2 r(t, t + h) \sigma(t) \sigma(t + h) \end{aligned}$$

$\sigma(t)$, dérivable et si nécessaire analytique admet le développement de Taylor :

$$\sigma(t + h) = \sigma + h \sigma' + \frac{h^2}{2} \sigma'' + \dots$$

Pour que $\overline{Z^2}$ soit infiniment petit avec h , il est nécessaire et suffisant que $r(t, t + h)$ soit uniformément continue pour $h = 0$ c'est-à-dire que :

$$r(-0) = r(+0) = r(0) = 1$$

La liaison aléatoire devient certaine au contact et le calcul différentiel certain s'applique aux fonctions aléatoires au contact : ce dernier apparaît alors comme un cas particulier du calcul différentiel aléatoire.

2. Conditions de cohérence et structure correspondante d'une fonction aléatoire

Il est évident que l'on ne peut pas admettre sans autre, sous prétexte qu'un milieu physique présente une certaine décoordination, que des grandeurs y relatives et de caractère aléatoire soient groupées *ipso facto* en une fonction aléatoire ; tout au moins si l'on veut que celle-ci soit justifiable d'une classification et de règles de calcul, et notamment de la propriété d'être dérivable. Pour cela, les corrélations r_{ij} de n nombres aléatoires pris 2 à 2 doivent remplir des *conditions de cohérence* exprimant qu'une probabilité ne peut être négative.

Nous allons maintenant calculer un *développement de la fonction de corrélation* $r(t, t + h)$ d'une fonction aléatoire quelconque $X|_t$, sous certaines hypothèses de continuité.

Remarquons premièrement qu'une fonction certaine de h et de t qui aurait ses valeurs dans l'intervalle $[-1, +1]$ et qui vaudrait 1 pour $h = 0$ n'est pas automatiquement une fonction de corrélation. Pour que ce soit le cas il est nécessaire que cette fonction satisfasse aux *conditions de cohérence* que nous allons établir.

Soit, pour simplifier les calculs, n nombres aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n ; considérons $X'_1 = X_1 - \bar{X}_1, X'_2 = X_2 - \bar{X}_2, \dots, X'_n = X_n - \bar{X}_n$ et notons :

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X'_i$$

les λ_i étant des coefficients réels quelconques.

La forme quadratique :

$$\overline{X^2} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X'_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_i \sigma_j r_{ij}$$

où σ_i représente l'écart type de X_i , ne peut évidemment pas être négative ; le déterminant formé par les r_{ij} : $\Delta_n = |r_{ij}|$ doit donc être positif ou nul : c'est une des conditions de cohérence. En faisant le même raisonnement avec toutes les sommes de la forme $\sum \lambda_i X_i$, la somme portant sur toutes les combinaisons possibles d'un nombre quelconque de i , nous obtenons l'ensemble des conditions de cohérence imposées aux r_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$).

Pour une fonction aléatoire, il y aura un nombre infini de conditions de cohérence ; bornons-nous à écrire les deux premières :

Première condition de cohérence :

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & r(t, t+h) \\ r(t, t+h) & 1 \end{array} \right| \geq 0$$

quels que soient t et h ($\forall t, h$), et en développant : $1 - r^2(t, t+h) \geq 0$ ce qui est déjà connu (inégalité de Schwarz).

Deuxième condition de cohérence :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & r(t, t+h) & \\ r(t, t+h) & 1 & \\ r(t, t+h+k) & r(t+h, t+h+k) & \\ & r(t, t+h+k) & \\ & r(t+h, t+h+k) & 1 \end{array} \right| \geq 0$$

$\forall t, h, k$

qui prend, dans le cas stationnaire (du deuxième ordre), la forme :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & r(h) & r(h+k) \\ r(h) & 1 & r(k) \\ r(h+k) & r(k) & 1 \end{array} \right| \geq 0$$

Voici maintenant deux exemples de fonctions qui, à première vue, semblent être des fonctions de corrélation et, en fait, n'en sont pas :

1)

$$r(h) = \begin{cases} 1 - h^2 & \text{si } |h| < 1 \\ 0 & \text{si } |h| \geq 1 \end{cases}$$

en effet si $h = k = \frac{1}{2}$

Note :

Pour $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X'_i$ nous obtenons ainsi :

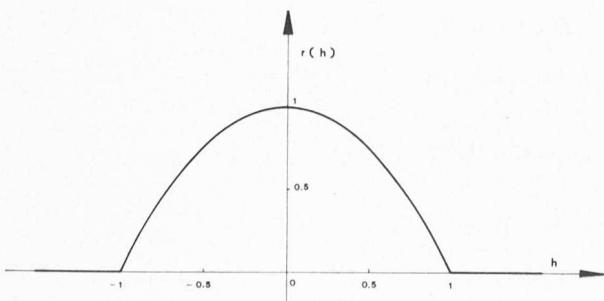


Fig. 1.

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{3} + \binom{n}{2} = (1+1)^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - (n+1)$$

conditions de cohérence. (La notation $\binom{n}{i}$ représente le nombre de combinaisons de n objets pris i à i .)

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{array} \right| = -\frac{1}{8} < 0$$

$$r(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } |h| \leq \tau \\ 0 & \text{si } |h| > \tau \end{cases}$$

$$\tau > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

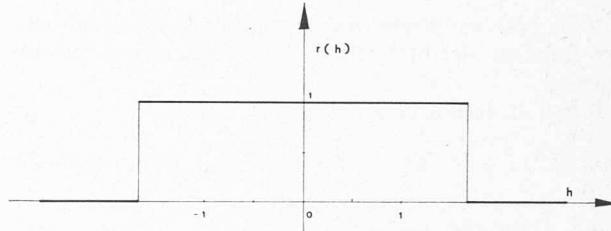


Fig. 2.

en effet si $h = k = \tau$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & \tau & 0 \\ \tau & 1 & \tau \\ 0 & \tau & 1 \end{array} \right| = 1 - 2\tau^2 < 0$$

S'il existe un $h \neq 0$ et un t pour lesquels $r(t, t+h) = \pm 1$ la deuxième condition de cohérence impose à $r(t, t+h)$ une forme remarquable. En effet cette condition devient :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & \pm 1 & \\ \pm 1 & 1 & \\ r(t, t+h+k) & r(t+h, t+h+k) & \\ & r(t, t+h+k) & \\ & r(t+h, t+h+k) & 1 \end{array} \right| \geq 0$$

$$\pm 2r(t, t+h+k)r(t+h, t+h+k) - r^2(t, t+h+k) - r^2(t+h, t+h+k) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$-[r(t, t+h+k) + r(t+h, t+h+k)]^2 \geq 0$$

— si $r(t, t+h) = 1$:

$$r(t, t+h+k) = r(t+h, t+h+k), \forall k$$

et dans le cas stationnaire :

$$r(h+k) = r(k), \forall k,$$

ce qui signifie que r est périodique de période h .

- si $r(t, t+h) = -1 : r(t, t+h+k) = -r(t+h, t+h+k)$, $\forall k$ et dans le cas stationnaire:
 $r(h+k) = -r(k)$, $\forall k$, ce qui entraîne:
 $r(0) = 1 = -r(h) = r(2h)$ et alors r est périodique de période $2h$.

3. La continuité en moyenne quadratique d'une fonction aléatoire.

a) Définissons maintenant la notion de continuité en moyenne quadratique: une fonction aléatoire $X|_t$ est continue en moyenne quadratique en t si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{(X|_{t+h} - X|_t)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{Z^2|_{t,h}} = 0 \text{ quelle que soit}$$

la façon dont h tende vers 0. Elle sera continue en moyenne quadratique si $\lim_{h \rightarrow 0} \overline{(X|_{t+h} - X|_t)^2} = 0$ en tout t .

Nous nous proposons d'étudier sous quelles conditions une fonction aléatoire est continue en moyenne quadratique.

Il faut et il suffit pour cela que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\overline{X^2|_{t+h}} + \overline{X^2|_t} - 2\overline{X|_t X|_{t+h}}) = 0 \quad \text{quel que}$$

soit t , c'est-à-dire que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{(\overline{X|_{t+h}} - \overline{X|_t})^2}_{\geq 0} + \underbrace{(\sigma(t+h) - \sigma(t))^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\sigma(t)\sigma(t+h)(1-r(t, t+h))}_{\geq 0} \right] = 0$$

$\sigma(t)$ désigne l'écart type de $X|_t$ et $r(t, t+h)$ le coefficient de corrélation entre $X|_t$ et $X|_{t+h}$.

Pour que la limite d'une somme de trois termes positifs soit nulle il faut et il suffit que la limite de chacun de ces termes soit nulle. Donc :

$$1^{\circ} \lim_{h \rightarrow 0} (\overline{X|_{t+h}} - \overline{X|_t})^2 = 0 \quad \text{ce qui signifie que}$$

$\overline{X|_t}$ est une fonction continue de t .

$$2^{\circ} \lim_{h \rightarrow 0} (\sigma(t+h) - \sigma(t))^2 = 0 \quad \text{c'est-à-dire que}$$

$\sigma(t)$ est une fonction continue de t .

$$3^{\circ} \lim_{h \rightarrow 0} 2\sigma(t)\sigma(t+h)(1-r(t, t+h)) = 0$$

c'est-à-dire :

$$4^{\circ} \lim_{h \rightarrow 0} 1 - r(t, t+h) = 0 \quad \text{quel que soit } t \text{ et quelle}$$

que soit la façon dont h tende vers 0.

En résumé : la condition nécessaire et suffisante pour que $X|_t$ soit continue en moyenne quadratique est que $\overline{X|_t}$ et $\sigma(t)$ soient continues et que $r(t, t+h)$ soit continue à gauche et à droite pour $h=0$.

b) Dans le cas où $X|_t$ est stationnaire (du deuxième ordre), $r(h)$ est même continue partout.

En effet, si $X|_t$ est stationnaire :

$$\overline{X|_t} = \text{cste} \text{ (que nous choisirons égale à 0)}$$

$$\overline{X^2|_t} = \text{cste} = \sigma^2$$

$$\overline{X|_t X|_{t+h}} = \sigma^2 r(h) = \text{fonction de } h \text{ seulement}$$

$$A = \sigma^2 |r(t_0+h) - r(t_0)| = |\overline{X|_t X|_{t+t_0+h}} -$$

$$|\overline{X|_t X|_{t+t_0}}| = |\overline{X|_t (X|_{t+t_0+h} - X|_{t+t_0})}|$$

L'inégalité de Schwarz ($|\overline{XY}| \leq \sqrt{\overline{X^2} \overline{Y^2}}$) entraîne :

$$A \leq \sqrt{\overline{X^2|_t} (\overline{X|_{t+t_0+h}} - \overline{X|_{t+t_0}})^2} \quad (\text{à cause de la stationnarité}) = \sqrt{\overline{X^2|_t} (2\overline{X^2|_t} - 2\overline{X|_{t+t_0+h}} \overline{X|_{t+t_0}})} =$$

$$= \sqrt{2\overline{X^2|_t}} \sqrt{\overline{X^2|_t} - \overline{X|_{t+h}} \overline{X|_t}} = \sqrt{2} \sigma^2 \sqrt{r(0) - r(h)}$$

entraîne : $|r(t_0+h) - r(t_0)| \leq \sqrt{2} \sqrt{r(0) - r(h)}$

ce qui signifie que si $r(h)$ est continue en $h=0$, elle le sera aussi en tout t_0 .

4. Développement du coefficient de corrélation dans le cas de la continuité en moyenne quadratique.

Si $X|_t$ est continue en moyenne quadratique, $r(t, t+h)$ est donc continue en $h=0$; soit α l'ordre d'infinitude de $1-r(t, t+h)$, nous pouvons représenter $r(t, t+h)$ par le développement :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda(t) |h|^\alpha - |h|^\alpha \varphi(t, h)$$

$\varphi(t, h)$ étant une fonction qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

Notre but est d'établir un développement de $\varphi(t, h)$. Nous savons que $r(t, t+h) = r(t+h, t)$; en remplaçant r par le membre de droite, nous obtenons la condition de symétrie :

$$\lambda(t+h) - \lambda(t) = \varphi(t, h) - \varphi(t+h, -h)$$

Supposons maintenant que $\lambda(t)$ est analytique :

$$\lambda(t+h) = \lambda(t) + h\lambda'(t) + \frac{h^2}{2!}\lambda''(t) + \dots$$

$$\varphi(t, h) = \lambda_1(t)h + \lambda_2(t)h^2 + \lambda_3(t)h^3 + \lambda_4(t)h^4 + \dots$$

et

$$\varphi(t+h, -h) = -\lambda_1h + (\lambda_2 - \lambda'_1)h^2 + (-\frac{\lambda''_1}{2} + \lambda'_2 - \lambda_3)h^3 + (-\frac{\lambda'''_1}{6} + \frac{\lambda''_2}{2} - \lambda'_3 + \lambda_4)h^4 + \dots$$

En portant le développement de $\varphi(t, h)$ et de $\varphi(t+h, -h)$ dans la condition de symétrie et en identifiant terme à terme, nous obtenons le système :

$$\text{coefficient de } h : \lambda' = 2\lambda_1$$

$$\text{coefficient de } h^2 : \frac{\lambda''}{2} = \lambda'_1$$

$$\text{coefficient de } h^3 : 2\lambda_3 + \frac{\lambda''_1}{2} - \lambda'_2 = \frac{\lambda'''_1}{6}$$

$$\text{coefficient de } h^4 : \frac{\lambda'''_1}{6} - \frac{\lambda''_2}{2} + \lambda'_3 = \frac{\lambda^{(4)}}{4!}$$

et ainsi de suite.

Les coefficients λ_i gardent cependant un grand caractère d'arbitraire car la première équation entraîne la deuxième, la troisième entraîne la quatrième, etc.

On obtient donc le développement :

$$r(t, t+h) = 1 - |h|^\alpha \lambda(t) - \\ - |h|^\alpha \left[\frac{\lambda'(t)}{2} h + \lambda_2(t) h^2 + \left(\frac{\lambda'_2(t)}{2} - \frac{\lambda'''(t)}{24} \right) h^3 + \dots \right]$$

5. Cas particuliers et classes correspondantes des fonctions aléatoires.

1^o Cas stationnaire :

$$r(t, t+h) = r(h) = 1 - |h|^\alpha (\lambda + \lambda_2 h^2 + \lambda_4 h^4 + \dots)$$

fonction paire quelconque telle que $r(h)$ satisfasse aux conditions de cohérence et où les λ_i sont des constantes.

2^o Cas analytique : $X|_t$ sera dite analytique si sa fonction de corrélation est analytique. A ce moment $\alpha = 2$ et

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda(t) h^2 - \frac{\lambda'(t)}{2} h^3 - \lambda_2(t) h^4 - \dots$$

3^o Cas analytique-stationnaire (ana-stat) :

$$r(t, t+h) = r(h) = 1 - \lambda h^2 - \lambda_2 h^4 - \dots$$

r est une fonction paire quelconque, mais satisfaisant toujours aux conditions de cohérence.

4^o Il nous faut maintenant tenir compte des *conditions de cohérence et calculer les restrictions qu'elles imposent au développement de $r(t, t+h)$* .

La première condition est, en fait, l'inégalité de Schwarz, elle est donc toujours vérifiée.

Passons à la seconde condition :

$$\begin{vmatrix} 1 & r(t, t+h) \\ r(t, t+h) & 1 \\ r(t, t+h+k) & r(t+h, t+h+k) \\ & r(t+h, t+h+k) \\ & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

i. e. :

$$1 - r^2(t, t+h) - r^2(t+h, t+h+k) - r^2(t, t+h+k) + \\ + 2 r(t, t+h) r(t+h, t+h+k) r(t, t+h+k) \geq 0$$

Nous voulons remplacer r par son développement dans cette inégalité ; nous nous bornerons au cas où $h = k$, ce qui nous donnera une condition nécessaire pour que la deuxième condition soit satisfaite (mais évidemment pas suffisante).

Calcul préliminaire :

$$r(t+h, t+2h) = r(t, t+h) + h A(t, h) \\ \text{où } A(t, h) = -|h|^\alpha (\lambda' + \lambda'' h + \dots)$$

La deuxième condition de cohérence pour $h = k$ est :

$$1 - r^2(t, t+h) - r^2(t+h, t+2h) - r^2(t, t+2h) + \\ + 2 r(t, t+h) r(t+h, t+2h) r(t, t+2h) \geq 0$$

$$[1 - r(t, t+2h)] [1 + r(t, t+2h) - 2r^2(t, t+h) - \\ - 2A(t, h)r(t, t+h)h] - A^2(t, h)h^2 \geq 0$$

d'autre part

$$1 + r(t, t+2h) - 2r^2(t, t+h) = |h|^\alpha |\lambda(-2^\alpha + 4) + \\ + h|^\alpha \lambda'(-2^\alpha + 2) + |h|^\alpha h^2 \lambda_2(-4 \cdot 2^\alpha + 4) - \\ - 2\lambda^2 |h|^{2\alpha} + \dots$$

La deuxième condition de cohérence devient :

$$[|h|^\alpha |2^\alpha \lambda + |h|^\alpha h 2^\alpha \lambda'| + |h|^\alpha h^2 4 \cdot 2^\alpha \lambda_2 + \dots] \cdot \\ \cdot [|h|^\alpha \lambda(-2^\alpha + 4) + |h|^\alpha h \lambda'(-2^\alpha + 4) + \\ + |h|^\alpha h^2 (-4 \cdot 2^\alpha \lambda_2 + 4 \lambda_2 + 2 \lambda'') - 2 \lambda^2 |h|^{2\alpha} + \dots] \\ - \lambda'^2 h^2 |h|^{2\alpha} + \dots \geq 0$$

Elle doit être vérifiée, en particulier, lorsque h tend vers 0. En ce cas, le terme de plus petit degré donnera son signe à l'expression :

Premier cas : $\alpha < 2$

$$|h|^{2\alpha} 2^\alpha \lambda^2 (-2^\alpha + 4) \geq 0$$

ce qui est vérifié et n'entraîne aucune condition nouvelle.

Conclusion : Cette classe de fonctions aléatoires contient toutes celles qui ne sont pas dérivables en moyenne quadratique.

Deuxième cas : $\alpha = 2$

$$h^6 [4\lambda + 4h\lambda' + 16h^2\lambda_2 + \dots] \cdot \\ \cdot [-16\lambda_2 + 4\lambda_2 + 2\lambda'' - 2\lambda^2 + \dots] - \lambda'^2 h^6 + \dots \geq 0$$

et qui entraîne :

$$-6\lambda_2 \geq \lambda^2 + \frac{\lambda'^2 - 8\lambda\lambda''}{8\lambda}$$

Conclusion : Cette classe contient les fonctions dérivables en moyenne quadratique.

Troisième cas : $\alpha > 2$

$$|h|^\alpha 2^\alpha \lambda^2 (-2^\alpha + 4) \geq 0 \text{ implique } \lambda = 0,$$

puis $\lambda_2^2(4-2^\alpha) \geq 0$ et $\lambda_2 = 0$ et ainsi de suite.

Conclusion : Cette classe contient les fonctions certaines.

Alors $r(t, t+h) = 1$ et la fonction aléatoire correspondante est de la forme : $A \cdot f(t)$ où A est une constante aléatoire et $f(t)$ une fonction certaine de t .

Dans le cas stationnaire nous arrivons évidemment aux mêmes conclusions, en particulier si $\alpha = 2$: $-6\lambda_2 \geq \lambda^2$, ce qui signifie que λ_2 est négatif ou nul.

6. La dérivée en moyenne quadratique.

Nous avons déjà établi la forme que prend la fonction de corrélation $r(t, t+h)$ correspondant à une fonction aléatoire continue en moyenne quadratique. Nous allons définir maintenant la notion de dérivée en moyenne quadratique et étudier l'influence de l'existence d'une telle dérivée sur la fonction $r(t, t+h)$.

Définition : Soit une fonction aléatoire $X|_t$; s'il existe une fonction aléatoire $\dot{X}|_t$ telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(X|_{t+h} - X|_t - \dot{X}|_t)^2}{h} = 0$$

$X|_t$ sera la dérivée en moyenne quadratique de $X|_t$ (au point t).

Décomposons premièrement $X|_t$ et $\dot{X}|_t$ en la somme d'une partie certaine et d'une partie purement aléatoire :

$$X|_t = \overline{X|_t} + X'|_t$$

$$\dot{X}|_t = \overline{\dot{X}|_t} + \dot{X}'|_t$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overline{X|_{t+h}-X|_t}}{h} - \dot{\overline{X|_t}} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{\overline{X|_{t+h}} + X'|_{t+h} - \overline{X|_t} - X'|_t}{h} - \dot{\overline{X|_t}} - \dot{X'|_t} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{\overline{X|_{t+h}-X|_t}}{h} - \dot{\overline{X|_t}} \right)^2 + \left(\frac{X'|_{t+h} - X'|_t}{h} - \dot{X'|_t} \right)^2 \end{aligned}$$

Comme ces deux termes sont positifs ou nuls, la condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{X|_t}$ ait une dérivée est que :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{X|_{t+h}-X|_t}}{h} \right)^2 &= 0 \\ 2) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{X'|_{t+h} - X'|_t}{h} - \dot{X'|_t} \right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

La condition 1) signifie que la fonction certaine $\overline{X|_t}$ est dérivable et que sa dérivée vaut : $\dot{\overline{X|_t}}$ (si $\dot{X'|_t}$ existe, bien entendu). Nous pourrons donc permutez la dérivation et l'opération moyenne.

Une condition nécessaire pour que 2) soit réalisée est :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{X'|_{t+h} - X'|_t}{h} \right)^2 = \dot{\overline{X'^2|_t}}$$

(Nous supposerons $\dot{\overline{X'^2|_t}}$ finie.)

Or :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X'|_{t+h} - X'|_t}{h} \right)^2 = \\ & = \frac{\sigma^2(t) + \sigma^2(t+h) - 2\sigma(t)\sigma(t+h)r(t, t+h)}{h^2} = \\ & = \left(\frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} \right)^2 + 2\sigma(t)\sigma(t+h) \frac{1-r(t, t+h)}{h^2} \end{aligned}$$

ces deux termes sont positifs ou nuls ; il faut alors que $\sigma(t)$ soit dérivable et que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-r(t, t+h)}{h^2}$ existe.

Nous avons donc :

$$\sigma'^2 + 2\sigma^2(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-r(t, t+h)}{h^2} = \dot{\overline{X'^2|_t}}$$

Remplaçons $r(t, t+h)$ par $1 - |h|^\alpha \lambda(t) - |h|^\alpha \varphi(t, h)$ dans la condition : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-r(t, t+h)}{h^2}$ existe.

Cela nous donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^\alpha \lambda(t) + |h|^\alpha \varphi(t, h)}{h^2} \text{ existe.}$$

Premier cas : $\alpha < 2$ et $\lambda(t) \neq 0$

Il ne peut pas y avoir de dérivée.

Deuxième cas : $\alpha > 2$

La limite est nulle et la fonction $X|_t$ est de la forme $Bf(t)$ où B est une constante aléatoire et $f(t)$ une fonction certaine. La dérivée d'une telle fonction est $Bf'(t)$ et ne présente pas beaucoup d'intérêt.

Troisième cas : $\alpha = 2$ et $\lambda(t) \neq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-r(t, t+h)}{h^2} = \lambda(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 r(t, t+h)}{\partial h^2} \Big|_{h=0}$$

Il s'agit de la dérivée en moyenne quadratique.

Remarques :

$$1) \text{ La condition d'existence de la } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-r(t, t+h)}{h^2}$$

n'est pas suffisante pour que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{X'|_{t+h}-X'|_t}}{h} - \dot{\overline{X'|_t}} \right)^2 = 0.$$

On peut montrer que si $\varphi(t, h)$ est de la forme $\frac{1}{h}\mu(t, h)$ où $\mu(t, h)$ est continue et nulle pour $h = 0$ et possède une dérivée première $\frac{\partial \mu}{\partial h}$ continue et nulle pour $h = 0$, alors cette condition est aussi suffisante.

2) Nous pouvons définir la dérivée de façon plus générale :

S'il existe $\dot{\overline{X|_t}}$ tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{X|_{t+h}-X|_t}}{h^{\alpha/2}} - \dot{\overline{X|_t}} \right)^2 = 0, \text{ où } \alpha \text{ est positif,}$$

alors $\dot{\overline{X|_t}}$ est la dérivée en moyenne quadratique de $X|_t$.

Nous arrivons alors aux conditions nécessaires :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{X|_{t+h}-X|_t}}{h^{\alpha/2}} \text{ existe et vaut } \dot{\overline{X|_t}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h^{\alpha/2}} \text{ existe}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-r(t, t+h)}{h^\alpha} \text{ existe.}$$

Comme on le voit, ce cas est intimement lié à celui où, dans le cas certain, la dérivée serait définie de la façon suivante :

$$\text{dérivée} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h^{\alpha/2}}, \alpha \text{ étant positif.}$$

3) Nous avons étudié, aussi bien pour la continuité que pour la dérivabilité en moyenne quadratique, ce qui se passe pour la fonction de corrélation $r(t, t+h)$. Il est beaucoup plus simple de voir ce qui se passe pour $\overline{X' |_t X' |_{t+h}} = \mu(t, t+h)$, fonction d'autocovariance.

Continuité :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{(X |_{t+h} - X |_t)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{(X |_{t+h} - \overline{X |_t})^2} + \\ + \overline{(X' |_{t+h} - X' |_t)^2} = 0$$

et alors : a) $\lim_{h \rightarrow 0} \overline{X |_{t+h}} = \overline{X |_t}$, $\overline{X |_t}$ est continue.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \overline{(X' |_{t+h} - X' |_t)^2} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(\sigma(t+h) - \sigma(t))^2}{\geq 0}}_{\geq 0} + \\ & + 2 \underbrace{\sigma(t) \sigma(t+h) (1 - r(t, t+h))}_{\geq 0} = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sigma(t)$ est continue et que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{X |_t X |_{t+h}} = \overline{X^2 |_t}$$

La fonction d'autocovariance $\overline{X' |_t X' |_s} = \mu(t, s)$ est donc continue au voisinage de la droite $t = s$.

Dérivabilité : une condition nécessaire et suffisante pour que $X' |_t$ soit dérivable en moyenne quadratique est (*théorème dû à Slutsky*) :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left(\frac{\overline{X' |_{t+h} - X' |_t}}{h} - \right. \\ \left. - \frac{\overline{X' |_{t+k} - X' |_t}}{k} \right)^2 = 0$$

(Nous supposerons $\overline{\dot{X}'^2 |_t}$ finie.)

Il est équivalent alors de dire que :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\overline{X' |_{t+h} - X' |_t}}{h} \cdot \frac{\overline{X' |_{t+k} - X' |_t}}{k} \text{ existe.}$$

Cette limite est égale à :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{h} \left[\frac{\overline{X' |_{t+h} X' |_{t+k} - X' |_{t+h} X' |_t}}{k} - \right. \\ \left. - \frac{\overline{X' |_t X' |_{t+k} - X'^2 |_t}}{k} \right] = \frac{\partial^2 \mu(t, s)}{\partial t \partial s}$$

au voisinage de la droite $t = s$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait dérivabilité est donc que la fonction d'autocovariance $\mu(t, s)$ admette une dérivée $\frac{\partial^2 \mu(t, s)}{\partial t \partial s}$ au voisinage de la droite $s = t$.

7. Corrélation entre la fonction et ses dérivées et développement de $r(h)$ suivant ses écarts types.

Ces quelques remarques faites, nous allons étudier un nouveau développement de $r(t, t+h)$ dans le cas où la fonction $X |_t$ correspondante possède des dérivées de tous les ordres.

Notations : $S_0^2(t)$: écart type de $X |_t$
 $S_1^2(t)$: écart type de $\dot{X} |_t$ etc.

Nous avons vu que :

$$\sigma'^2 + 2 \sigma^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - r(t, t+h)}{h^2} = \overline{\dot{X}'^2 |_t} \text{ ce qui donne avec}$$

les nouvelles notations :

$$S_0'^2(t) + 2 S_0^2(t) \lambda(t) = S_1^2(t)$$

d'où : $\lambda(t) = \frac{S_1^2(t) - S_0'^2(t)}{2 S_0^2(t)}$

$$\text{et } r(t, t+h) = 1 - \frac{h^2}{2} \frac{S_1^2(t) - S_0'^2(t)}{S_0^2(t)} + \text{termes d'ordre supérieur}$$

Comme r doit être inférieur ou égal à 1, il faut que $\frac{S_1^2 - S_0'^2}{S_0^2} \geq 0$ c'est-à-dire que $S_1 \geq |S_0'|$: la valeur absolue de la dérivée de l'écart type est donc inférieure ou égale à l'écart type de la dérivée.

D'ailleurs le rapport $\frac{S_0'}{S_1}$ est lui-même une fonction de corrélation. En effet nous pouvons montrer que

$$\frac{d}{dt} \psi(X) = \psi'(X) \cdot \dot{X}$$

Alors :

$$2 S_0 S_0' = \frac{d}{dt} S_0^2 = \frac{d}{dt} \overline{X'^2 |_t} = \frac{d}{dt} \overline{\dot{X}'^2 |_t} = \\ = 2 \overline{X' |_t \dot{X}' |_t} = 2 r(X', \dot{X}') S_0 S_1$$

d'où :

$$r(X', \dot{X}') = \frac{S_0'}{S_1}$$

En continuant à dériver $\overline{\dot{X}'^2 |_t}$, nous pouvons calculer

$$r(X', \ddot{X}'), r(X', \dddot{X}')$$

etc.

Par exemple :

$$2 S_0 S_0'' + 2 S_0'^2 = \frac{d^2}{dt^2} S_0^2 = 2 \overline{X' |_t \ddot{X}' |_t} + 2 \overline{\dot{X}'^2 |_t} = \\ = 2 r(X', \ddot{X}') S_0 S_2 + 2 S_1^2$$

d'où

$$r(X', \ddot{X}') = \frac{S_0 S_0'' + S_0'^2 - S_1^2}{S_0 S_2}$$

ce qui entraîne :

$$-S_0 S_2 \leq S_0 S_0'' + S_0'^2 - S_1^2 \leq S_0 S_2$$

8. Cas de la stationnarité en probabilité.

Etudions maintenant le cas particulier où $X |_t$ est stationnaire.

Dans ce cas nous avons :

$2 S_0^2 \lambda = S_1^2$ où λ et S_0 sont des constantes. L'écart type de la dérivée S_1 est donc aussi une constante et comme la fonction de corrélation de $\dot{X}|_t$ vaut

$$\frac{\overline{\dot{X}'|_t \dot{X}'|_s}}{\sqrt{\overline{\dot{X}'^2|_t}} \sqrt{\overline{\dot{X}'^2|_s}}} = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \overline{X'|_t X'|_s} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left[r(s-t) S_0^2 \right] \frac{1}{S_1^2}$$

elle ne dépend que de $(s-t)$. La dérivée d'une fonction stationnaire est donc aussi stationnaire; sa fonction de corrélation vaudra :

$$S(h) = - \frac{\partial^2 r(h)}{\partial h^2} \cdot \frac{S_0^2}{S_1^2}$$

et nous avons automatiquement :

$$r(X^{(n)}|_{t+h}, X^{(n)}|_t) = (-1)^n \frac{\partial^{2n} r(h)}{\partial h^{2n}} \cdot \frac{S_0^2}{S_n^2}$$

Donc :

$$\frac{\partial^{2n} r(h)}{\partial h^{2n}} \Big|_{h=0} = (-1)^n \frac{S_n^2}{S_0^2}$$

Nous savons en outre que :

$$r(X, \ddot{X}) = - \frac{S_1^2}{S_0 S_2} \quad \text{d'où : } S_1^2 \leq S_0 S_2$$

et nous avons évidemment la formule plus générale :

$$S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n+1}$$

Le développement de Taylor de $r(h)$ est :

$$r(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} h^{2n} \frac{\partial^{2n} r(h)}{\partial h^{2n}} \Big|_{h=0}$$

$$r(h) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{S_n}{S_0} \right)^2$$

9. Théorème de Khintchine.

Nous citerons maintenant l'important théorème de Khintchine :

La fonction $r(h)$ est la fonction de corrélation d'un processus stationnaire continu si et seulement si $r(h)$ peut se mettre sous la forme :

$$r(h) = \int \cos(hx) dF(x)$$

où $F(x)$ est une fonction de répartition.

On peut aussi dire que $r(h)$ peut se mettre sous la forme :

$\frac{1}{2} [\Phi(h) - \Phi(-h)]$ où $\Phi(h)$ est une fonction caractéristique.

En utilisant la forme de Khintchine, nous voyons que les inégalités :

$$S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n+1}$$

peuvent s'écrire :

$$\frac{2}{x^{2n}} \leq \frac{1}{x^{2n-2}} \frac{1}{x^{2n+2}}$$

inégalités qui découlent de celle de Schwarz.

Exemple : Soit $F(x)$ une fonction de répartition « en escalier » présentant des discontinuités de valeur a_n en $n x_0$ ($x_0 = \text{constante}$).

Nous avons alors : $\sum_0^\infty a_n = 1$

$$\text{et } r(h) = \sum_0^\infty a_n \cos(n x_0 h)$$

C'est la fonction de corrélation d'une fonction aléatoire analytique et stationnaire.

Remarque importante : Nous avons vu que

$$r(t, t+h) = 1 - \frac{h^2}{2} \frac{S_1^2(t) - S_0'^2(t)}{S_0^2(t)} + \dots ;$$

cela signifie en pratique que la connaissance des écarts types de $X|_t$ et de $\dot{X}|_t$ permet d'étudier la connexion de la fonction aléatoire pour h infiniment petit.

On peut même montrer que l'accroissement $(X|_{t+h} - X|_t)$ d'une fonction aléatoire stationnaire dérivable suit, pour h infiniment petit, une loi de Gauss d'écart type $h S_1$.

10. Fonction de connexion et corrélation vectorielle.

En dernier lieu, nous définirons la fonction de connexion. Soient deux constantes aléatoires U et V .

La fonction caractéristique de leur loi conjuguée est :

$$e^{i(\lambda u + \varphi v)} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\lambda^\alpha \varphi^\beta i^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} \overline{U^\alpha V^\beta}$$

si les moments $\overline{U^\alpha V^\beta}$ existent, bien entendu. Si U et V sont indépendantes nous aurons :

$$\overline{e^{i(\lambda u + \varphi v)}} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\lambda^\alpha \varphi^\beta i^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} \overline{U^\alpha} \overline{V^\beta} = \overline{e^{i\lambda u}} \cdot \overline{e^{i\varphi v}}$$

La fonction de connexion $\theta(\lambda, \varphi)$ sera :

$$\theta(\lambda, \varphi) = \overline{e^{i(\lambda u + \varphi v)}} - \overline{e^{i\lambda u}} \cdot \overline{e^{i\varphi v}}$$

et si U et V sont indépendantes cette fonction sera nulle.

Au lieu de U et V nous pouvons aussi choisir des vecteurs aléatoires A et B (définis comme en analyse certaine mais où les composantes sont aléatoires)

$$\theta(A, \Phi) = \overline{e^{i(AA + \Phi B)}} - \overline{e^{iA}} \cdot \overline{e^{i\Phi B}}$$

où A et Φ sont des vecteurs.

Si les vecteurs A et B sont indépendants entre eux, cette connexion sera nulle, quelle que soit la corrélation existante entre les composantes de A ou les composantes de B .

Cette fonction est donc intéressante par le fait qu'elle fait la séparation entre les propriétés statistiques internes d'un vecteur (relatives aux corrélations entre ses composantes) et les propriétés statistiques proprement vectorielles.

Chapitre II — Intégrales, primitives et équations différentielles aléatoires

En analyse aléatoire, il est nécessaire de rassembler sous forme statistique les diverses réalisations pour pouvoir définir la notion de dérivée. L'intégration, en revanche, se définit de façon beaucoup plus directe.

11. Définition et propriétés fondamentales.

Soit $U|_t$ une fonction aléatoire. Désignons par $\mathfrak{A}(t)$ une réalisation quelconque de $U|_t$ pour l'ensemble des valeurs de t à la suite d'une épreuve statistique, alors :

$$J = \int_a^b \mathfrak{A}(t) dt = \int_a^b U|_t dt$$

est l'intégrale de $U|_t$ sur l'intervalle (a, b) . L'intégrale J existe si la fonction $\mathfrak{A}(t)$ est sommable au sens de Lebesgue.

Il résulte immédiatement de cette définition que :

$$\int_a^b (U|_t + V|_t) dt = \int_a^b U|_t dt + \int_a^b V|_t dt$$

et que :

$$\int_a^b U|_t dt = \int_a^c U|_t dt + \int_c^b U|_t dt$$

quels que soient $U|_t$, $V|_t$, a , b et c .

L'intégrale aléatoire jouit encore de deux autres propriétés importantes :

Premier théorème : Si la fonction $|U|_t$ est sommable, on peut écrire :

$$\overline{\int_a^b U|_t dt} = \int_a^b \overline{U|_t} dt$$

Ce théorème, évident dans le cas où $U|_t$ est intégrable au sens de Riemann, a été démontré par Slutsky, et nous l'admettons.

Deuxième théorème : Si $U|_t$ est continue en moyenne quadratique la fonction aléatoire :

$$I|_t = \int_a^t U|_s ds$$

est dérivable en moyenne quadratique et a pour dérivée $U|_t$.

Soit $Z = \frac{I|_{t+h} - I|_t}{h} - U|_t$, il faut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{Z^2} = 0.$$

Comme en analyse ordinaire, nous avons :

$$Z = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (U|_s - U|_t) ds \quad \text{et}$$

$$Z^2 = \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} (U|_\alpha - U|_t) d\alpha \cdot \int_t^{t+h} (U|_\beta - U|_t) d\beta =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} (U|_\alpha - U|_t) (U|_\beta - U|_t) d\alpha d\beta$$

$$\text{et alors : } \overline{Z^2} = \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} (\overline{(U|_\alpha - U|_t) (U|_\beta - U|_t)}) d\alpha d\beta =$$

$$= \frac{1}{h^2} \left| \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} (\overline{(U|_\alpha - U|_t) (U|_\beta - U|_t)}) d\alpha d\beta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} |\overline{(U|_\alpha - U|_t) (U|_\beta - U|_t)}| d\alpha d\beta \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} \sqrt{(U|_\alpha - U|_t)^2} \sqrt{(U|_\beta - U|_t)^2} d\alpha d\beta$$

Comme $U|_t$ est une fonction aléatoire continue, on peut trouver une valeur h_0 de h telle que, si $h < h_0$:

$$\sqrt{(U|_{t+h} - U|_t)^2} < \varepsilon$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Il en résulte que :

$$\sqrt{(U|_\alpha - U|_t)^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{(U|_\beta - U|_t)^2} < \varepsilon$$

et que :

$$\overline{Z^2} \leq \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} \varepsilon^2 d\alpha d\beta = \varepsilon^2$$

ce qui montre bien que $\overline{Z^2}$ tend vers zéro avec h .

Nous voyons donc qu'une condition suffisante pour que $I|_t = \int_a^t U|_s ds$ soit dérivable en moyenne quadratique et ait pour dérivée $U|_t$ est que $U|_t$ soit continue en moyenne quadratique.

On peut montrer qu'au moins dans le cas stationnaire cette condition est aussi nécessaire.

12. Moyennes aléatoires et rôle de la connexion aléatoire pour l'existence de l'intégrale.

Si la fonction de corrélation de $U|_t$ vaut :

$$r(\alpha, \beta) = \frac{(U|_\alpha - \overline{U|_\alpha})(U|_\beta - \overline{U|_\beta})}{\sqrt{(U|_\alpha - \overline{U|_\alpha})^2} \sqrt{(U|_\beta - \overline{U|_\beta})^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \alpha \\ 1 & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

et si

$$I = \int_a^b U|_t dt$$

$$\overline{(I - \bar{I})^2} = \int_a^b \int_a^b S(\alpha) S(\beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0$$

alors le nombre aléatoire I se réduit à sa valeur moyenne :

$$I = \bar{I} = \int_a^b \overline{U|_t} dt$$

et l'intégrale de $U|_t$ cesse d'être aléatoire.

La constante aléatoire :

$$X = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} U|_s ds = \text{Moy}(U|_s)$$

peut être appelée *moyenne aléatoire* de la fonction aléatoire $U|_s$ dans l'intervalle $(t, t + \tau)$.

Posons $X' = X - \bar{X}$, $U'|_s = U|_s - \overline{U|_s}$

La variance de X est :

$$\overline{X'^2} = \frac{1}{\tau^2} \left(\int_t^{t+\tau} U'|_s ds \right)^2 = \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \overline{U'|_\alpha U'|_\beta} d\alpha d\beta$$

Désignons par $S(\alpha)$ l'écart type de $U|_\alpha$ et $r(\alpha, \beta)$ le coefficient de corrélation entre $U|_\alpha$ et $U|_\beta$.

Alors :

$$\overline{X'^2} = \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} S(\alpha) S(\beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

et on découvre le fait fondamental suivant :

L'écart type de l'intégrale aléatoire dépend essentiellement de la connexion du champ de la fonction à intégrer.

Ce fait jouera un rôle capital dans les fluides turbulents.

Cet écart type sera nul si $r(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$

c'est-à-dire si la connexion du champ à intégrer est nulle.

Si $r(\alpha, \beta) = 1$, c'est-à-dire si $U|_t = Bf(t)$ où B est une constante aléatoire et $f(t)$ une fonction certaine,

$$\begin{aligned} \overline{X'^2} &= \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} S(\alpha) S(\beta) d\alpha d\beta = \left(\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} S(\alpha) d\alpha \right)^2 = \\ &= (\text{Moy } S)^2 \end{aligned}$$

Dans le cas général $|r(\alpha, \beta)| \leq 1$, d'où :

$$\sqrt{\overline{X'^2}} \leq \text{Moy } S$$

Ainsi l'écart type de la moyenne aléatoire est au plus égal à la moyenne de l'écart type de la fonction.

Supposons maintenant que $U|_t$ soit une fonction aléatoire stationnaire, c'est-à-dire que $r(\alpha, \beta)$ ne soit fonction que de $(\beta - \alpha)$ et que $S(\alpha)$ soit une constante S . Alors :

$$\overline{X'^2} = \frac{S^2}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} r(\beta - \alpha) d\alpha d\beta = \frac{2S^2}{\tau^2} \int_0^\tau (\tau - s) r(s) ds$$

et l'on voit bien que, $|r(s)|$ étant ≤ 1

$$\overline{X'^2} \leq S^2$$

13. *Rôle de la connexion entre un grand nombre de variables aléatoires et la fluctuation de leur moyenne.*

Pour mieux comprendre l'importance de la connexion dans la notion d'intégrale aléatoire, nous allons observer ce qui se passe sur la moyenne arithmétique d'un très grand nombre de variables aléatoires.

Soit X la moyenne arithmétique de n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n de valeur probable nulle :

$$X = \frac{\sum X_i}{n}$$

Soit r_{ij} le coefficient de corrélation entre X_i et X_j et S_i l'écart type de X_i . L'écart type de X est donné par :

$$S^2 = \frac{1}{n^2} \sum \sum r_{ij} S_i S_j$$

Supposons, pour bien voir le fond de la question, les S_i tous égaux à 1 et les r_{ij} tous égaux à un même nombre r . On trouve :

$$S^2 = r + \frac{1-r}{n}$$

Lorsque $r = 0$ (c'est le cas, en particulier, si les variables sont indépendantes) S^2 vaut $\frac{1}{n}$ qui est un nombre très petit.

Au contraire, si les variables sont corrélées, l'écart type S cesse tout de suite d'être négligeable et S^2 vaudra approximativement r .

Donc : *la fluctuation de la moyenne d'un grand nombre de variables aléatoires est la conséquence de la corrélation entre ces variables.* Elle est d'ailleurs inférieure à leur fluctuation commune.

De plus, S^2 étant positif, on a lorsque n est fini :

$$r > \frac{-1}{n-1}$$

Si $n \rightarrow \infty$, r ne peut rester négatif.

Donc si un grand nombre de variables aléatoires présentent deux à deux la même corrélation, celle-ci ne saurait être négative.

14. Primitive d'une fonction aléatoire.

Comme nous avons étudié la dérivation d'une fonction aléatoire, il serait intéressant de définir l'opération inverse qui consiste à prendre la primitive d'une fonction. Nous nous bornerons à l'étude du cas où la fonction aléatoire $U|_t$ est stationnaire, d'écart type S et de coefficient de corrélation :

$$r(t_2 - t_1) = r(h)$$

Définition : Nous appelons primitive de $U|_t$ toute fonction aléatoire $X|_t$, qui admet $U|_t$ pour dérivée.

A cause des propriétés de la dérivée (la condition nécessaire et suffisante pour que $X|_t$ soit dérivable est que :

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2}$$

existe), nous voyons que toute fonction aléatoire qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2} = \overline{U_1 U_2}$$

est une primitive de $U|_t$ (et inversement toute primitive de $U|_t$ satisfait à cette équation).

Notation : $X|_{t_1} = X_1$, $X|_{t_2} = X_2$, $\overline{U'_1} = U_1 - \overline{U_1}$
 $U'_2 = U_2 - \overline{U_2}$, $X'_1 = X_1 - \overline{X_1}$

En intégrant l'équation : $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2} = \overline{U_1 U_2}$

nous obtenons :

$$\overline{X_1 X_2} = \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \overline{U'_1 U'_2} dt_1 dt_2 + c'_1(t_1) + c''_2(t_2) + \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \overline{U_1 U_2} dt_1 dt_2$$

les fonctions c'_1 et c''_2 étant arbitraires.

$$\overline{X_1 X_2} = S^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} r(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 + c'_1(t_1) + c''_2(t_2) + \frac{2}{U} t_1 t_2$$

Changeons de variables :

$$\begin{cases} s = t_2 - t_1 \\ t_1 = t_1 \text{ avec le} \end{cases} \quad \text{Jacobian} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

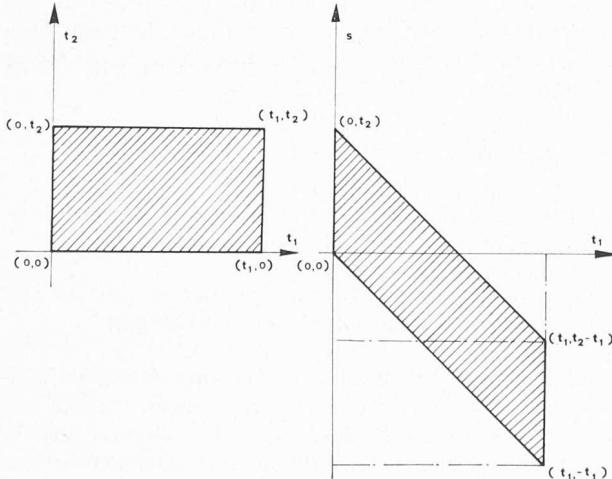


Fig. 3.

Alors :

$$\begin{aligned} \overline{X_1 X_2} &= S^2 \left[\int_0^{t_2} \int_0^{t_2-s} r(s) dt_1 ds + \int_{t_2-t_1}^0 \int_{-s}^{t_2-s} r(s) dt_1 ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-t_1}^{t_2-t_1} \int_s^{t_1} r(s) dt_1 ds \right] + c'_1(t_1) + c''_2(t_2) + \frac{2}{U} t_1 t_2 = \end{aligned}$$

$$= S^2 \left[- \int_0^{t_2-t_1} (t_2 - t_1 - s) r(s) ds + \int_{-t_1}^0 (t_1 + s) r(s) ds + \right. \\ \left. \underbrace{c'_1(t_1) + c''_2(t_2)}_{\text{ne dépend que de } t_1} + \frac{2}{U} t_1 t_2 \right]$$

$$+ \int_0^{t_2} (t_2 - s) r(s) ds \Big] + c'_1(t_1) + c''_2(t_2) + \frac{2}{U} t_1 t_2$$

D'où :

$$\overline{X_1 X_2} = -S^2 \int_0^h (h - s) r(s) ds + c'_1(t_1) + c''_2(t_2) + \frac{2}{U} t_1 t_2$$

avec $h = t_2 - t_1$ et c'_1, c''_2 fonctions arbitraires de t_1 et de t_2 .

Alors :

$$\overline{X'_1 X'_2} = -S^2 \int_0^h (h - s) r(s) ds + c_1(t_1) + c_2(t_2)$$

Or

$$\overline{X'_1 X'_2} \text{ et } -S^2 \int_0^h (h - s) r(s) ds \text{ sont symétriques en } t_1 \text{ et } t_2,$$

il faut alors que $(c_1(t_1) + c_2(t_2))$ le soit aussi, ce qui entraîne : $c_1 = c_2 = c$

Si $t_1 = t_2$, nous avons :

$$\sigma^2(t) = \overline{X'^2}|_t = 2c(t)$$

Nous obtenons :

$$\overline{X'_1 X'_2} = -S^2 \int_0^h (h - s) r(s) ds + \frac{1}{2} (\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2))$$

Nous pouvons écrire cette égalité sous une autre forme, soit l'intégrale :

$$Z|_t = \int_0^t U'|_s ds \quad (Z_1 = Z|_{t_1})$$

nous avons aussi :

$$\overline{X'_1 X'_2} = -\frac{(Z_2 - Z_1)^2}{2} + \frac{1}{2} (\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2))$$

Cela signifie que, en particulier, $\int_a^t U|_s ds$ est une primitive de $U|_t$.

15. Exemple d'une primitive particulièrement remarquable.

Considérons maintenant la primitive de $U'|_t$ particulière :

$$Z|_t = \int_0^t U'|_s ds$$

Nous savons alors que le moment rectangle de la primitive générale vaut :

$$\overline{X'_1 X'_2} = \frac{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) - (\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1)^2}{2} = \frac{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) - \Sigma^2(t_2 - t_1)}{2}$$

où

$$\Sigma^2(t) = \overline{Z^2|t}$$

Sa fonction de corrélation R sera :

$$R(t_1, t_2) = 1 - \frac{\Sigma^2(t_2 - t_1) - (\sigma(t_2) - \sigma(t_1))^2}{2\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$$

Pour que $R(t_1, t_2)$ satisfasse aux conditions de cohérence il faut imposer à la fonction indéterminée $\sigma(t)$ un certain nombre de restrictions. Ainsi, pour que R soit compris entre -1 et $+1$ il faut que :

$$|\sigma(t_2) - \sigma(t_1)| \leq \Sigma(t_2 - t_1) \leq \sigma(t_2) + \sigma(t_1)$$

Lorsque $h = t_2 - t_1$ tend vers zéro, cette condition nous donne : $|\sigma'| \leq S$, inégalité que nous avons démontrée déjà dans le chapitre précédent, où, rappelons-le, $\sigma(t)$ est l'écart type de $X|t$ et S l'écart type de sa dérivée $U|t$.

16. Primitives stationnaires.

Nous nous bornerons maintenant à étudier ce qui se passe dans le cas où $U|t$ admet des primitives stationnaires. Il faut pour cela que $\sigma(t)$ soit une constante, la fonction de corrélation R vaut alors :

$$R(h) = 1 - \frac{\Sigma^2(t_2 - t_1)}{2\sigma^2} = 1 - \frac{\Sigma^2(h)}{2\sigma^2}$$

La première condition de cohérence implique donc :

$$\sigma \geq \frac{\Sigma(h)}{2}$$

Il faut alors que :

$$\Sigma^2 = 2S^2 \int_0^h (h-s)r(s)ds \text{ reste bornée, quel que soit } h,$$

et en particulier quand $h \rightarrow \infty$, de telle sorte qu'on puisse choisir σ fini.

La seconde condition de cohérence entraîne que : $1 - 2r^2(h) + r(2h) \geq 0$ c'est-à-dire, dans notre cas :

$$1 - 2 \left(1 - \frac{\Sigma^2(h)}{2\sigma^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\Sigma^2(2h)}{2\sigma^2}\right) \geq 0$$

D'où :

$$\frac{\Sigma^4(h)}{\sigma^2} \leq 4\Sigma^2(h) - \Sigma^2(2h)$$

et alors : a) $2\Sigma(h) \geq \Sigma(2h)$

$$\text{b) } \sigma^2 \geq \frac{\Sigma^4(h)}{4\Sigma^2(h) - \Sigma^2(2h)}$$

Nous voyons que la condition b) est plus restrictive que celle imposée par la première condition de cohérence et nous pouvons penser que les conditions de cohérence d'ordre supérieur à 2 le seront encore plus.

La condition a) signifie que $\Sigma(h)$ ne pourra pas franchir la droite de coefficient angulaire S , à laquelle elle est tangente à l'origine :

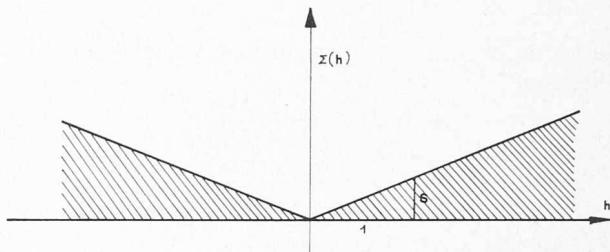


Fig. 4.

en hachuré : domaine où peut se trouver $\Sigma(h)$.

Comme $\Sigma(h)$ est bornée quel que soit h elle peut prendre l'une ou l'autre des allures suivantes :

a) *tendre vers une asymptote horizontale*, il en sera alors de même pour $R(h)$ qui tendra vers μ .

Considérons alors p instants ; il leur correspond $\frac{p(p-1)}{2}$

coefficients de corrélation et l'on peut toujours s'arranger, quelque grand que soit p , pour que ceux-ci soient aussi voisins de μ qu'on le désire. Or nous savons que si un très grand nombre de variables aléatoires présentent deux à deux la même corrélation, celle-ci ne peut pas être négative. Donc μ est nécessairement positif ou nul.

b) *être périodique ou presque périodique*, et $R(h)$ sera aussi périodique ou presque périodique.

Remarque : Si, à tout nombre positif ε , aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon)$, telle que tout intervalle de longueur l contienne au moins un nombre τ pour lequel on ait :

soit $r(\tau) > 1 - \varepsilon$, soit $r(\tau) < -1 + \varepsilon$

le coefficient de corrélation est une fonction *presque périodique* dont la presque période est, soit τ , soit 2τ .

Les fonctions aléatoires correspondantes peuvent être appelées : *fonctions aléatoires presque périodiques*.

Nous allons faire, en dernier lieu, une remarque intéressante : si $\Sigma(h)$ est bornée supérieurement, il existe une infinité d'intégrales stationnaires dont les écarts types σ sont bornés inférieurement. Il y en aura généralement une correspondant au minimum σ_0 des σ . Soit $\mathcal{R}(h)$ son coefficient de corrélation.

Les coefficients de corrélation $R(h)$ des autres intégrales stationnaires s'expriment au moyen de $\mathcal{R}(h)$ par la formule :

$$R(h) = \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \mathcal{R}(h)$$

On en déduit que :

$$R(h) \geq \mathcal{R}(h)$$

Ainsi, toutes les courbes $R(h)$ sont placées dans la région du plan comprise entre la courbe $\mathcal{R}(h)$ et la droite d'ordonnée $+1$.

De plus, si $\mathcal{R}(h)$ satisfait aux conditions de cohérence, $R(h)$ y satisfait aussi, en effet :

Les conditions de cohérence pour $R(h)$ sont :

$$\sum \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} R_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq 0 \quad \text{quels que soient les } \lambda_i \text{ et quel que soit } i.$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} R_{ij} \lambda_i \lambda_j &= \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} (\sum \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} \mathcal{R}_{ij} \lambda_i \lambda_j) + \\ &+ \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) (\sum \lambda_i^2) \geq \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} (\sum \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} \mathcal{R}_{ij} \lambda_i \lambda_j) \geq 0 \end{aligned}$$

si les \mathcal{R}_{ij} satisfont aux conditions de cohérence.

17. Equations différentielles aléatoires.

La théorie classique des équations différentielles repose sur le théorème fondamental : si, en tout point d'un intervalle (a, b) , la fonction $X(t)$ admet une dérivée nulle, alors $X(t)$ est une constante.

Ce théorème subsiste en analyse aléatoire, en effet :

$$1) \overline{X} \text{ ne dépend pas de } t \text{ car } \frac{d}{dt} \overline{X} = \overline{\dot{X}} = 0$$

2) $\overline{X|_{t_1} X|_{t_2}}$ ne dépend ni de t_1 , ni de t_2 , car

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \overline{X|_{t_1} X|_{t_2}} = \overline{\dot{X}|_{t_1} X|_{t_2}} = 0 = \overline{X|_{t_1} \dot{X}|_{t_2}} = \frac{\partial}{\partial t_2} \overline{X|_{t_1} X|_{t_2}}$$

$$3) \overline{(X|_{t_1} - \overline{X|_{t_1}})(X|_{t_2} - \overline{X|_{t_2}})} \text{ est alors une constante } C, \text{ donc aussi } \overline{(X|_t - \overline{X|_t})^2}$$

La fonction de corrélation est alors une constante et comme toute fonction de corrélation vaut 1 à l'origine, cette constante vaut 1.

Nous en déduisons immédiatement que $X|_t$ est une constante aléatoire.

Chapitre III — Calcul des variations

18. Le calcul des variations se transpose sans difficultés en analyse aléatoire et conduit à des équations d'Euler-Lagrange aléatoires.

Nous démontrerons d'abord le *lemme fondamental* :

Soit $Y|_t$ une fonction aléatoire arbitraire qui se réduit à la constante certaine zéro pour $t = t_1$ et $t = t_2$ (il est même suffisant que $Y|_t$ soit continue en moyenne quadratique).

Soit $Z|_t$ une seconde fonction aléatoire continue en moyenne quadratique.

Alors :

si $\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y|_t Z|_t} dt = 0$ quelle que soit $Y|_t$, $Z|_t$ ne peut être que le nombre certain zéro.

Notations : $\overline{Y|_t}, \overline{Z|_t}$: espérances de $Y|_t$ et $Z|_t$

$\overline{Y'|_t}, \overline{Z'|_t}$: parties purement aléatoires de $Y|_t$ et $Z|_t$

$$S^2(t) = \overline{Y'^2|_t}$$

$$\sigma^2(t) = \overline{Z'^2|_t}$$

$$r(t) = \frac{\overline{Y'|_t Z'|_t}}{\sigma(t) S(t)}$$

Comme nous avons supposé $Z|_t$ continue, $\sigma(t)$ et $\overline{Z|_t}$ seront continues.

L'hypothèse devient donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y \bar{Z}} dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{Y' Z'} dt = 0$$

Parmi les fonctions $Y|_t$ (qui sont arbitraires) choisissons celles d'espérance nulle. Leur écart type S , ainsi que leur corrélation avec $Z|_t$ restent cependant arbitraires.

Nous avons :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y' |_t Z' |_t} dt = \int_{t_1}^{t_2} (r(t) S(t)) \sigma(t) dt = 0$$

$r(t) S(t)$ étant une fonction arbitraire de t , nulle pour t_1 et t_2 et $\sigma(t)$ étant continue, le lemme fondamental du calcul des variations s'applique. Alors :

$$\sigma(t) = 0$$

D'où : $\overline{Z'|_t} = 0$ et par suite $\overline{Z|_t} = \overline{Z|_t}$

Choisissant maintenant des fonctions $Y|_t$ de valeur probable $\overline{Y|_t}$ non nulle (sauf pour t_1 et t_2 , on doit avoir :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y|_t} \overline{Z|_t} dt = 0$$

$\overline{Z|_t}$ étant continue et $\overline{Y|_t}$ étant arbitraire et nulle pour t_1 et t_2 (il suffit même que $\overline{Y|_t}$ soit continue), on peut appliquer une seconde fois le lemme fondamental. D'où :

$$\overline{Z|_t} = 0 \text{ et alors } \underline{\overline{Z|_t}} = 0$$

Le problème du calcul des variations aléatoires est la recherche des fonctions aléatoires $X|_t$ dérivables qui rendent extérieur l'intégrale :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\varphi(X, \dot{X}, t)} dt$$

et qui se réduisent pour t_1 et t_2 à des constantes aléatoires données.

φ est une fonction certaine de ses arguments, nous la supposerons doublement dérivable par rapport à X , \dot{X} et t .

La variation de I s'obtient, comme en analyse certaine, en remplaçant X par $X + \alpha Y$, Y étant une fonction aléatoire arbitraire continue et nulle pour t_1 et t_2 . On obtient, en faisant exactement les mêmes calculs que dans le cas certain :

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} Y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}} \right) \cdot \right) dt$$

car la formule d'intégration par parties s'applique aussi en analyse aléatoire.

Pour que $X|_t$ rende I extremum il faut que $\frac{\delta I}{\delta \alpha}$ soit nulle pour $\alpha = 0$. Il résulte alors du lemme fondamental que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}} \right) \cdot = 0 \quad (\text{Equation d'Euler-Lagrange})$$

Remarquons que cette condition, nécessaire, n'est pas toujours suffisante pour que I soit extremum.

Conclusions

On peut donc remarquer que l'analyse aléatoire et l'analyse certaine s'identifient au contact, puis divergent considérablement au fur et à mesure que les liaisons se relâchent. C'est cette constatation qui va permettre la mise en équation des milieux en instance de diffusion, particulièrement les milieux turbulents.

A cet effet, il sera procédé, en mécanique aléatoire, à l'énoncé des principes et des règles de calcul relatifs à l'évolution du corpuscule aléatoire R construit avec ses fonctions de distribution des probabilités conjuguées qui traduisent les interactions.

Adresse de l'auteur :

François Baatard, 14, rue Etraz, 1000 Lausanne.

Sur le problème relatif au contrôle des ouvrages d'art quant à leur stabilité et leurs déformations

par A. ANSERMET, ingénieur professeur

Généralités

Le nombre des ouvrages d'art allant en augmentant, il est opportun de perfectionner les méthodes tendant à contrôler leur stabilité et leurs déformations ; de grands progrès furent réalisés et le but de ces lignes est de rappeler succinctement en quoi consistent les mesures et surtout les calculs à effectuer. Des cas concrets seront présentés portant sur un téléphérique, un barrage, des charpentes, etc. Le problème est complexe.

Méthodes modernes de mesures

Ainsi qu'on le sait, grâce à l'électro- et la radiotélémétrie (voir publication EPUL N° 86), on dispose de procédés nouveaux dont l'emploi ne cesse de progresser. Citons le téléphérique de Klosters, le tunnel du Saint-Bernardin, etc. Les résultats obtenus, pour les ellipses d'erreur aux têtes de ce tunnel, donnaient toute satisfaction.

Pour le téléphérique [1]¹, le barrage de Sambuco, les méthodes de mesure et calculs furent perfectionnés. On tint compte surtout de la déviation de la verticale, élément assez nouveau. C'est un problème-fleuve comportant plus d'une solution. On ne peut plus se contenter de calculer l'influence des masses visibles comme ce fut le cas pour les tunnels du Simplon, du Lötschberg, etc. C'est moins simple, comme on le verra.

Mais une difficulté réside ailleurs : le praticien a choisi, pour effectuer des mesures, des emplacements donnant confiance quant à la stabilité. Or au cours des calculs des discordances sont constatées, faisant douter de cette stabilité. A cet égard, le cas du téléphérique joue un rôle à part.

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

Evolution des modes de calcul

On dispose de tout un éventail de moyens, surtout pour de grands ouvrages, car l'opérateur fait ses observations à partir d'un groupe de points fixes, à Sambuco par exemple six points, où l'on stationne périodiquement. Il en résulte des discordances d'une fois à l'autre ensuite d'erreurs de mesures. A la méthode des moindres carrés, dont l'application est depuis longtemps courante, s'ajoutent la statistique mathématique, les transformations (affine, d'Helmut, etc.) et même la géométrie projective (cas d'un amphithéâtre). Le calcul électronique devient courant.

Comme on le verra lors d'applications, certaines simplifications sont à signaler. Par suite d'instabilité ou de déformation, les coordonnées x_i, y_i, z_i d'un point ($i = 1, 2, 3 \dots$) varient de $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$. On peut dissocier parfois la planimétrie de l'altimétrie sans traiter le calcul spatialement comme le font des praticiens. Par voie de nivellation direct la variation Δz est déterminée à partir d'un repère de nivellation dont l'altitude absolue n'est pas nécessairement connue. Restent les $\Delta x_i, \Delta y_i$, susceptibles, dans certains cas, d'être déterminés directement.

Covariance. Une autre complication peut survenir quand on compense par la méthode des moindres carrés. L'indépendance des mesures n'est pas réalisée ; on dit aussi que les mesures sont corrélées. Des éléments nouveaux interviennent : les cofacteurs ou comultiplicateurs [2], [3]. Pour former la matrice dite des cofacteurs, certains praticiens ont recours à une précompensation (Vorausgleichung). On s'efforcera donc d'éviter la covariance.

Calcul des points de rattachement

En principe, pour un même ouvrage, on peut choisir arbitrairement une origine pour les altitudes et coordonnées planes ; l'orientation des axes x, y étant aussi arbitraire.