Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 98 (1972)

Heft: 13: SIA spécial, no 3, 1972

Artikel: Sur certains systèmes surdéterminés dont le calcul incombe à l'ingénieur

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71551

Sur certains systèmes surdéterminés dont le calcul incombe à l'ingénieur

par A. ANSERMET, ingénieur-professeur

Généralités

Le calcul de systèmes surdéterminés est un des plus complexes qu'un ingénieur puisse avoir à traiter dans la pratique. Il se présente dans de nombreux domaines (structures à barres surabondantes, réseaux électrotélémétriques, réseaux de conduites électriques, etc.). La difficulté réside dans le fait que le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues. Une solution ne sera donc en général pas absolument exempte d'arbitraire. Ce problème donna lieu, outre-Rhin notamment, à d'abondantes publications ; il ne sera donc traité ici que sous forme fragmentaire en vue surtout de son application à des systèmes articulés [4] [1].

Les inconnues sont alors les coordonnées des nœuds mais spatialement 6 coordonnées sont susceptibles d'être choisies arbitrairement puisque la structure peut subir 3 rotations et 3 translations sans causer de déformation. N nœuds donnent donc lieu à $(3N-6)$ coordonnées inconnues et l'on peut concevoir jusqu'à $\frac{N(N-1)}{2}$ barres par la méthode dite des combinaisons binaires. Le choix des axes de coordonnées doit être judicieux ; il faut s'efforcer de diminuer l'influence des éléments non diagonaux dans la matrice de rigidité.

En outre, même si les équations initiales sont linéaires, on aura recours à une solution dite provisoire fournissant des valeurs approchées pour les inconnues ; les termes absolus des équations prennent alors des valeurs petites, ce qui facilite les calculs.

A cet effet, on rend le système statiquement déterminé en faisant abstraction des éléments surabondants (coupures de barres).

L'équation prend donc la forme générale :

$$(1)\quad v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + f_i \qquad \begin{matrix}(\text{poids } pi)\\ i = 1, 2, 3\ldots\end{matrix}$$

ces x, y, z étant donc des variations de coordonnées des nœuds tandis que les poids p_i interviennent par leurs valeurs relatives ce qui procure une liberté bienvenue au praticien.

Les coefficients et termes absolus seront obtenus parfois par voie semi-graphique. Le choix des barres à couper joue un rôle.

Avant de poursuivre on peut déjà former la valeur moyenne du rapport entre les poids a priori et a posteriori P_i.

$[pi : Pi]$ = nombre des inconnues.

Dans l'exemple numérique ci-après, on a 4 barres et 3 inconnues ; en moyenne : $Pi = \frac{4}{3} pi = 1.33\, pi$. Le poids est amplifié grâce à la barre surabondante. (Voir théorème [3], p. 68.)

Cette propriété est en outre un moyen de contrôle pour les calculs. Elle n'est valable qu'en appliquant la solution développée dans le cours d'analyse numérique de M. le prof. Descloux. Les poids p_i sont proportionnels aux coefficients d'élasticité E, à la section transversale de la barre et à l'inverse de la longueur de celle-ci. On sait que cette solution est classique.

Cas concret (solution prof. Descloux). On rend minimum $[p\,v\,v]$. C'est le cas le plus simple que l'on puisse concevoir ; il porte sur le sommet libre d'un pylône (3 inconnues).

Barres	a	b	c	p	P
1-2	+0.817	0.00	+0.577	0.64	0.915
1-3	0.00	−0.817	+0.577	0.96	1.20
1-4	−0.817	0.00	+0.577	0.64	0.915
1-5	0.00	+0.817	+0.577	0.96	1.20

Equations normales sous forme implicite (dérivées de l'énergie)

$$[p\,a\,v] = 0 \qquad [p\,b\,v] = 0 \qquad [p\,c\,v] = 0$$

$$1 : 0.915 = 1.093 \qquad\qquad 1 : 1.20 = 0.833$$

Matrice de rigidité

$$\begin{bmatrix} 0.854 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.28 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.067 \end{bmatrix}$$

Matrice coeff. de poids des inconnues

$$\begin{bmatrix} 1.170 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.781 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.937 \end{bmatrix}$$

$$1/P_1 = 1/P_3 = \overline{0.817}^2 \times 1.17 + \overline{0.577}^2 \times 0.937 = 1.093$$

$$1/P_2 = 1/P_4 = 0.833$$

$$[p : P] = 2\,(0.64 \times 1.093 + 0.96 \times 0.833) = 3.00$$

(3 inconnues)

Les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde de déformation du nœud sont proportionnelles à :

$$\sqrt{1.17} = 1.08 \qquad \sqrt{0.781} = 0.88 \qquad \sqrt{0.937} = 0.97$$

ce qui n'est pas défavorable.

Ces valeurs permettent de calculer le rayon de la sphère orthoptique lieu des sommets des trièdres trirectangles tangents à l'ellipsoïde. En posant $[p\,v\,v]$ = constant on obtient des ellipsoïdes concentriques se réduisant à un point pour une certaine valeur de la constante (minimum).

Variante : une solution préconisée par Jakobi ([3], p. 57) consiste à considérer 4 groupes de 3 équations en posant :

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0\,;\; v_1 = v_2 = v_4 = 0\,;\; v_1 = v_3 = v_4 = 0\,;\; v_2 = v_3 = v_4 = 0$$

Déjà avec 5 barres au lieu de 4 on aurait 10 groupes de 3 équations. On effectue ensuite, pour chaque inconnue, une compensation par voie de moyenne pondérée. Gauss qualifiait ce mode de calcul de voie détournée et peu naturelle (unnatürlicher Umweg).

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

Solution sans coupures. Le but recherché en opérant des coupures de barres est d'obtenir des valeurs provisoires pour les inconnues. Ce fut le mérite du professeur Mayor d'éviter ce fractionnement des variations de coordonnées des nœuds. Cet éminent staticien considère seulement deux états : l'initial en faisant abstraction de la ou des forces et l'état final. Il n'y a pas d'état intermédiaire et pas de termes absolus dans les équations aux déformations, ce qui exclut la formation de dérivées partielles de l'énergie. Les coefficients a, b, c... ne sont, théoriquement, plus rigoureusement les mêmes que précédemment mais bien pratiquement. Cette méthode de Mayor redevient très actuelle comme l'auteur de la publication EPUL nº 104 le montra. Un choix n'est pas très facile ; éventuellement, à titre de contrôle, on calculera avec coupures puis sans coupures.

Quel que soit le mode de calcul il convient d'insister sur le rôle que joue l'ellipsoïde de déformation des nœuds (Formänderungsellipsoid) ; il manque encore un élément : la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids. Mais pour le praticien cet élément joue un rôle secondaire car il ne contribue pas à fixer la forme mais l'échelle de la surface.

Quant aux essais et recherches sur modèles réduits préconisés par certains Instituts ils fournissent des éléments de contrôle mais ne suffisent pas toujours et occasionnent parfois des frais non négligeables.

Pour un groupe d'ellipsoïdes de déformation des nœuds c'est moins simple : on forme la matrice de rigidité et son inverse. Tous les éléments nécessaires sont alors connus.

Covariance. Bien que cette notion soit traitée à fond dans la littérature ([3], p. 107) il convient d'en faire mention. Au lieu de rendre minimum la somme des $p\ v\ v$ (travail déformation) il faut considérer l'expression: $[p\ v\ v] + p_{12}\, v_1\, v_2 + p_{13}\, v_1\, v_3 + \ldots$

Il y a deux matrices : $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$ et l'inverse $\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$

dites respectivement des poids, et des cofacteurs.

Le contrôle par les poids a posteriori n'est plus applicable. D'autres éléments de cet important problème ont fait l'objet de précédentes publications ; il n'est pas nécessaire de les développer à nouveau.

Conclusions

La solution relative aux systèmes surdéterminés au sens de la méthode des moindres carrés, développée dans le cours d'analyse numérique EPFL, se prête de façon remarquable au calcul de structures articulées à barres surabondantes. Elle permet notamment de calculer les ellipsoïdes de déformation des nœuds [4], élément jouant un rôle capital car si une de ces surfaces est très aplatie ou au contraire sphérique ce n'est pas la même chose. Ce calcul est devenu courant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Descloux : *Analyse numérique* (cours EPFL).
[2] F. Stüssi : *Baustatik I, II* (Birkhäuser Bâle).
[3] H. Wolf : *Ausgleichungsrechnung* (Dümmlersverlag, Bonn).
[4] A. Ansermet : *Neue Methode zur Berechnung von statisch unbestimmter Fachwerkkuppeln*, Chaire de statique Zürich (publication subsidiée par le Fonds national).

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet
Villa Les Glycines
Case postale 106, 1814 La Tour-de-Peilz

Abaques pour l'addition de vecteurs

par F. GARDIOL, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

1. Introduction

Qu'il s'agisse de l'ingénieur civil ou mécanicien devant déterminer la résultante d'un ensemble de forces ou de contraintes, du physicien qui étudie les vitesses et les accélérations dans des référentiels en mouvement ou de l'ingénieur électricien qui manipule des flèches de Fresnel pour la résolution d'un problème polyphasé déséquilibré, la plupart des ingénieurs sont amenés occasionnellement à additionner des grandeurs vectorielles. Lorsque les composantes de chaque vecteur sont données dans un repère cartésien, la résolution est immédiate et ne fait appel qu'à de simples additions. Par contre, lorsque les vecteurs sont spécifiés par leurs amplitudes et leurs directions respectives, le problème se complique : il faut alors déterminer les composantes dans un repère préalablement choisi, sommer ces composantes et finalement déterminer l'amplitude et la direction du vecteur résultant. Bien que ces différentes étapes de la résolution ne fassent appel qu'à des opérations algébriques et trigonométriques élémentaires, la résolution complète du problème n'en requiert pas moins un certain temps et peut donner lieu à des erreurs. Ce processus peut être fortement accéléré à l'aide des deux abaques présentés ici. Ces abaques permettent par ailleurs d'obtenir une meilleure compréhension du problème, comme on pourra le constater dans les exemples donnés par la suite.

De nos jours, grâce à l'ordinateur, l'addition de vecteurs ne présente aucun problème pour l'utilisateur disposant du programme de calcul adéquat. L'ingénieur peut néanmoins faire appel occasionnellement à la méthode graphique présentée ici qui, si elle est moins précise, permet de déterminer directement des ordres de grandeur ou de vérifier des résultats de calculs à l'ordinateur (précaution toujours souhaitable mais souvent oubliée...).