Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 98 (1972)

Heft: 9

Artikel: Le mécanique aléatoire de Georges Dedebant et Philippe Wehrlé, 2e partie: mécanique du corpuscule aléatoire

Autor: Baatard, François / Magnin, Simone

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71545

Communication de la Chaire de la mécanique de la turbulence de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et du groupe de travail EPFL-ISM

La mécanique aléatoire de Georges Dedebant et Philippe Wehrlé [1]

par le professeur FRANÇOIS BAATARD, Dr ès sc. techn., et SIMONE MAGNIN, lic. ès sc. math., assistante

(Suite)

2e partie : mécanique du corpuscule aléatoire

Introduction

La mécanique aléatoire est celle du *corpuscule aléatoire* défini par sa fonction de distribution R des probabilités conjuguées positions-vitesses ; R contient donc les dépendances de probabilités et même toutes les corrélations définissables dans un *fluide* :

1) de probabilité, *modèle prévisionnel* du fluide réel (lois locales) ;
2) *réel et dissipatif d'énergie* obtenu par des moyennes de champ calculées à partir de R (lois globales).

Le corpuscule aléatoire R a pour coordonnées de position et de vitesse des fonctions aléatoires du temps lesquelles choisies doublement dérivables en moyenne quadratique donnent lieu à une mécanique de R qui est celle des milieux turbulents en instance de diffusion. Le corpuscule aléatoire R est aussi une association, par le jeu des probabilités composées, d'une densité de probabilité de présence $\rho(x, y, z\,; t)$ et d'un champ aléatoire des vitesses $f(u, v, w\,; x, y, z, t)$ c. à. d. pour une dimension, par exemple :

$$R(u, x\,; t) = \rho(x\,; t)\, f(u\,; x, t)$$

Le problème de la diffusion turbulente est dès lors celui de la *connexion des champs de probabilité* obtenus à partir de R. Le mécanisme de la dissipation d'énergie est le suivant : par relâchement des dépendances de probabilité dans l'espace positions-vitesses aléatoire, une partie de l'énergie cinétique se dissémine entre les micro-particules de l'étage sous-jacent jusqu'au stade thermique. La structure aléatoire sous-jacente permet donc de rendre compte des actions de viscosité turbulente, soit des forces de frottement au niveau des moyennes.

La dépendance de probabilité est parfaitement déterminée parce que l'incertitude affectant une moyenne calculée avec la loi de probabilité conjuguée R provient tout entière du terme d'indépendance en probabilité (hasard pur et fluctuation). R a ainsi pour pôles le certain et le hasard pur.

Les dépendances de probabilité $R(x, u\,; t)$ jouent donc en mécanique aléatoire le rôle des liaisons (statistiques) ; elles en constituent la catégorie première ; R est une fonction d'état définissant le milieu en instance de diffusion. Comme X et U sont choisies doublement dérivables en moyenne quadratique, les moments des divers ordres du corpuscule aléatoire R sont des fonctions macroscopiques dérivables bien qu'une réalisation quelconque de X ou de U puisse être parfaitement discontinue.

[1] Voir *Bulletin technique de la Suisse romande* No 4, du 19 février 1972.

L'analyse aléatoire (1er fascicule) constitue la base mathématique de la mécanique aléatoire.

20. *Force d'expansion et diffusion du corpuscule aléatoire.*

Le corpuscule aléatoire est l'ensemble des 3 coord. X, Y, Z qui sont des fonctions aléatoires du temps, dérivables au moins 2 fois en moyenne quadratique.

La mécanique aléatoire repose sur le principe que :

$\int_{t_0}^{t_1} \overline{L(X, \dot{X}; t)}\, dt$ est extremum, L étant la fonction de Lagrange.

Cela conduit aux équations :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

(ce fait est démontré dans « l'analyse aléatoire » : calcul des variations, § 19) qui s'écrivent dans le cas le plus simple :

$$\ddot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X}$$

$V(X)$ étant le potentiel de la force extérieure.

Nous en tirons immédiatement que :

$$\overline{\ddot{X}} = -\overline{\frac{\partial V}{\partial X}} \tag{1}$$

La mécanique certaine part du principe que :

$\int_{t_0}^{t_1} L(\overline{X}, \dot{\overline{X}}, t)\, dt$ est extremum ; elle obtient dans le cas simple où nous sommes placés

$$\overline{\ddot{X}} = -\frac{\partial V(\overline{X})}{\partial \overline{X}} = \ddot{\overline{X}} \quad (\text{car } \overline{\dot{X}} = \dot{\overline{X}},\ \overline{\ddot{X}} = \ddot{\overline{X}}, \text{ etc.}). \tag{2}$$

La mécanique certaine néglige donc la force :

$$F = -\left(\overline{\frac{\partial V}{\partial X}} - \frac{\partial V(\overline{X})}{\partial \overline{X}}\right) \tag{3}$$

Pour mieux comprendre le véritable sens de cette expression, supposons que $X' = X - \bar{X}$ soit faible devant $\bar{X}$, de telle sorte qu'on puisse développer $V(X)$ en série de Taylor :

$$V(X) = V(\bar{X} + X') = V(\bar{X}) + (X - \bar{X}) \left.\frac{\partial V}{\partial X}\right|_{\bar{X}} +$$

$$+ \frac{1}{2}(X - \bar{X})^2 \left.\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right|_{\bar{X}} + \frac{1}{3!}(X - \bar{X})^3 \left.\frac{\partial^3 V}{\partial X^3}\right|_{\bar{X}} + \dots$$

Alors :

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \left.\frac{\partial V}{\partial X}\right|_{\bar{X}} + (X - \bar{X}) \left.\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right|_{\bar{X}} + \frac{1}{2}(X - \bar{X})^2 \left.\frac{\partial^3 V}{\partial X^3}\right|_{\bar{X}} + \dots$$

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial X}} = \frac{\partial V(\bar{X})}{\partial \bar{X}} + \frac{1}{2}\overline{(X - \bar{X})^2} \left.\frac{\partial^3 V}{\partial X^3}\right|_{\bar{X}} + \dots$$

L'expression (3) vaut donc :

$$F = -\left(\frac{\partial V(\bar{X})}{\partial \bar{X}} + \frac{1}{2}\overline{(X - \bar{X})^2} \left.\frac{\partial^3 V}{\partial X^3}\right|_{\bar{X}} + \dots - \frac{\partial V(\bar{X})}{\partial \bar{X}}\right)$$

$$F = -\frac{1}{2}\overline{X'^2} \left.\frac{\partial^3 V}{\partial X^3}\right|_{\bar{X}} - \dots$$

Nous voyons donc que la mécanique certaine ignore une force qui dépend de $\overline{X'^2}$, c'est-à-dire de la *diffusion du corpuscule*.

En conclusion, la force de diffusion est une fonction de la distribution en densité du corpuscule aléatoire :

$$F = -\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t)\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} - \frac{\partial V(\bar{X})}{\partial \bar{X}}\right) dx$$

Chapitre IV — Connexion du champ de probabilité associé au corpuscule R

21. *Champ de vecteurs aléatoires associé au corpuscule R.*

Dans l'espace à 3 dimensions, un vecteur aléatoire est l'ensemble des 3 variables aléatoires : $U|_P$, $V|_P$, $W|_P$ fonctions du point P.

Entre deux points P_1 et P_2 du fluide de probabilité défini par R on peut construire les 9 moments conjugués (grandeurs macroscopiques définissant le fluide réel) :

$$(4.1) \qquad \begin{Vmatrix} \overline{U_1U_2} & \overline{U_1V_2} & \overline{U_1W_2} \\ \overline{V_1U_2} & \overline{V_1V_2} & \overline{V_1W_2} \\ \overline{W_1U_2} & \overline{W_1V_2} & \overline{W_1W_2} \end{Vmatrix}$$

qui forment un tenseur non symétrique dit *tenseur de connexion* et qui devient symétrique lorsque $P_1 \to P_2$: c'est alors le *tenseur de corrélation* dont celui de von Karman est un cas particulier.

On aurait très bien pu écrire ce tenseur avec les coefficients de la corrélation et les écarts-types relatifs aux variables U, V, W, par exemple :

$$\overline{U_1' V_2'} = r_{u_1v_2}\,\sigma_{u_1}\,\sigma_{v_2} \quad \left(\text{puisque } \sigma_{u_1} = \sqrt{\overline{U_1'^2}}\right)$$

Les neuf dérivées partielles aléatoires des composantes d'un vecteur :

$$(\dot{U}_x,\ \dot{U}_y,\ \dot{U}_z,\ \dot{V}_x,\ \dot{V}_y,\ \dot{V}_z,\ \dot{W}_x,\ \dot{W}_y,\ \dot{W}_z)$$

forment un tenseur à composantes aléatoires.

Elles déterminent 45 moments du second ordre :

a) 9 moments quadratiques du type $\overline{\dot{U}_x^2}$

b) 9 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x\,\dot{U}_y}$

c) 9 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x\,\dot{V}_x}$

d) 18 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x\,\dot{V}_y}$

Ces 45 moments du 2e ordre sont les limites, quand $P_1 \to P_2$, des dérivées partielles par rapport à tous les couples fournis par deux coordonnées d'indices différents du groupe de 6 fonctions de 6 variables :

$\overline{U_1U_2}$ $(x_1, y_1, z_1\,;\, x_2, y_2, z_2)$ $\overline{V_1W_2}$ $(x_1, y_1, z_1\,;\, x_2, y_2, z_2)$

$\overline{V_1V_2}$ $(x_1, y_1, z_1\,;\, x_2, y_2, z_2)$ $\overline{U_1V_2}$ $(x_1, y_1, z_1\,;\, x_2, y_2, z_2)$

$\overline{W_1W_2}$ $(x_1, y_1, z_1\,;\, x_2, y_2, z_2)$ $\overline{U_1W_2}$ $(x_1, y_1, z_1\,;\, x_2, y_2, z_2)$

Cela fournit $9 \cdot 6 = 54$ moments, mais $\overline{U_1U_2}\ (= \overline{U_2U_1})$, $\overline{V_1V_2}$, $\overline{W_1W_2}$ étant symétriques donnent deux fois les mêmes dérivées partielles (quand celles-ci sont prises par rapport à des coordonnées de noms différents) ; ainsi :

$$\overline{\dot{U}_x\dot{U}_y} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2}\,\overline{U_1U_2} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}\,\overline{U_1U_2}$$

Il reste donc bien : $54 - 9 = 45$ moments distincts.

22. *Cas particulier : tenseur de connexion dans le cas d'homogénéité et d'isotropie.*

Il se présente comme cas particulier du tenseur (4.1) qui se simplifie selon la méthode classique de réduction en :

$$(4.2) \qquad \begin{Vmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & g(r) & 0 \\ 0 & 0 & g(r) \end{Vmatrix}$$

$f(r)$ et $g(r)$ étant respectivement les fonctions longitudinales et transversales de corrélation.

23. *Fonction de connexion infinitésimale du corpuscule aléatoire.*

Si la fonction de connexion et la corrélation vectorielle du corpuscule aléatoire correspondent aux fonctions de connexion et de corrélation vectorielles définies au § 9 du fascicule 1 ; la connexion infinitésimale du corpuscule aléatoire est définie par le début du développement en série de $r(h)$:

$$r(h) = 1 - \frac{h^2}{2!}\,\frac{S_1^2}{S_0^2} + \dots$$

S_0^2 et S_1^2 étant respectivement les écarts-types de la fonction et de sa dérivée première.

La connaissance de l'écart-type de la dérivée en un point permet donc l'exploration infinitésimale de la connexion du corpuscule aléatoire en ce point.

Remarque et conclusion : les propriétés des champs de vecteurs aléatoires que nous avons énoncées ci-dessus définissent en fait des propriétés d'une fonction aléatoire de plusieurs variables.

Chapitre V — Densité de probabilité conjuguée et équivalent hydrodynamique du corpuscule aléatoire

24. *Equations aux dérivées partielles régissant les densités de probabilité du corpuscule aléatoire.*

Soit $X|_t$ une fonction aléatoire de la variable certaine t, dérivable n fois en moyenne quadratique. Cette dérivabilité va entraîner une forme particulière pour la densité de probabilité conjuguée de $X|_t, \dot{X}|_t, \ldots X^{(n)}|_t$. Dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire dans le cas du corpuscule aléatoire, la densité de probabilité conjuguée $S(x, u, a; t)$ de $X|_t, \dot{X}|_t = U|_t, \ddot{X}|_t = A|_t$ devra satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} u + \frac{\partial S}{\partial u} a\right) da = 0$$

pour autant que S soit dérivable par rapport à t, x, u et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} u + \frac{\partial S}{\partial u} a\right) da$ soit continue par rapport à x et u.

En effet, soit $\psi(X, U)$ une fonction certaine de X et de U, dérivable par rapport à X et U et s'annulant lorsque l'une des variables certaines x ou u tend vers $\pm \infty$. Alors :

$$\frac{d}{dt} \overline{\psi(X, U)} = \overline{\frac{d}{dt} \psi(X, U)} = \overline{\frac{\partial \psi}{\partial X} \cdot \dot{X}} + \overline{\frac{\partial \psi}{\partial U} \cdot \dot{U}}$$

çette égalité est vérifiée quel que soit $\psi(X, U)$ dérivable par rapport à X et U, elle devient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u)\, S(x, u, a; t)\, du\, dx\, da =$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi(x, u)}{\partial x} u\, S(x, u, a; t)\, dx\, du\, da +$$

$$+ \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi(x, u)}{\partial u} a\, S(x, u, a; t)\, du\, dx\, da$$

En intégrant par parties le second membre :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u)\, S(x, u, a; t)\, du\, dx\, da =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi(x, u)\, u\, S(x, u, a; t) \right|_{-\infty}^{+\infty} du\, da -$$

$$- \iiint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u)\, u \frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial x}\, dx\, du\, da +$$

$$+ \iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi(x, u)\, a\, S(x, u, a; t) \right|_{-\infty}^{+\infty} dx\, da -$$

$$- \iiint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u)\, a \frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial u}\, du\, dx\, da$$

Par hypothèse $\psi(x, u)$ s'annule si x ou u tend vers $\pm \infty$, alors :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u) \left[\frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial t} + u \frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial x} + a \frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial u}\right] du\, dx\, da = 0$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, u) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial t} + u \frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial x} + a \frac{\partial S(x, u, a; t)}{\partial u}\right] da\, du\, dx = 0$$

Cette équation doit être vérifiée pour toute fonction $\psi(x, u)$ dérivable par rapport à x et u et s'annulant si x ou u tend vers $\pm \infty$;

si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + a \frac{\partial S}{\partial u}\right) da$ est continue par rapport à x et u :

$$(1) \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + a \frac{\partial S}{\partial u}\right) da = 0}$$

Soit $\overline{A}$, l'espérance de A lorsque x et u sont donnés :

$$\overline{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} a T(a \mid x, u; t)\, da = \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{S(x, u, a; t)}{R(x, u; t)}\, da = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} a\, S(x, u, a; t)\, da}{\int_{-\infty}^{+\infty} S(x, u, a; t)\, da}$$

$T(a \mid x, u; t)$ est la densité de probabilité conditionnelle de A étant donnés x et u ;

$R(x, u; t)$ est la densité de probabilité conjuguée de $X|_t$ et $\dot{X}|_t$.

En remplaçant dans (1) :

$$(2) \qquad \boxed{\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial u} (\overline{A} R) = 0}$$

Dans le cas où $X|_t$ est dérivable n fois en moyenne quadratique, l'équation (1) se généralise sous la forme :

$$(3) \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial x} + a \frac{\partial M}{\partial u} + \ldots + l \frac{\partial M}{\partial k}\right) dl = 0}$$

où $M(x, u, a, \ldots, k, l; t)$ est la densité de probabilité conjuguée de $X|_t, \dot{X}|_t, \ldots, X^{(n)}|_t$; pour autant que M soit dérivable par rapport à $t, x, u, \ldots, k$ et que l'expression $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial M}{\partial t} + \ldots + l \frac{\partial M}{\partial k}\right) dl$ soit continue par rapport à $x, u, a, \ldots, k$. Les équations faisant intervenir la densité de probabilité conjuguée de $X|_t, \dot{X}|_t, \ldots, X^{(m)}|_t$, pour tout $1 \leqq m < n$, doivent, bien entendu, toujours être vérifiées. En particulier, si $m = 1$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u\,\frac{\partial R}{\partial x}\right) du = 0} \tag{4}$$

où $R(x, u; t)$ est la densité de probabilité conjuguée de $X|_t$ et $\dot{X}|_t$. Si $\rho(x; t)$ est la densité de probabilité de $X|_t$ et si $\overline{U}$ est l'espérance de U lorsque x est donné, l'équation (4) devient :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{U}\rho) = 0} \tag{5}$$

Remarques : 1) Lorsque la fonction aléatoire $X|_t$ est remplacée par une fonction vectorielle aléatoire : $(X_1|_t, X_2|_t, \ldots X_n|_t)$, l'équation (1) se généralise sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\left(\frac{\partial S(x_1 \ldots, x_n, u_1 \ldots, u_n, a_1 \ldots, a_n; t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}u_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial u_i}a_i\right) da_1 \ldots da_n = 0 \tag{6}$$

2) Si la fonction aléatoire $X|_t$ est doublement dérivable en moyenne quadratique et si $\psi(X)$ est une fonction certaine de X deux fois dérivable :

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\overline{\psi(X)} = \overline{\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}\dot{X} + \frac{\partial\psi}{\partial X}\ddot{X}}$$

Cette équation, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho\overline{U^2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{A}) = 0$$

où $\rho(x; t)$ est la densité de probabilité de $X|_t$ et $\overline{U^2}$ et $\overline{A}$ sont les espérances de U^2 et A étant donné x.

Exemple : Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0$$

c'est le cas de l'oscillateur à fréquence aléatoire : $X|_t = A\sin(\Omega t - \Phi)$ où A, Ω et Φ sont trois constantes aléatoires.

Comme $X|_t$ est doublement dérivable en moyenne quadratique, la densité de probabilité conjuguée de $X|_t$ et $\dot{X}|_t$: $R(x, u; t)$ doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + u\,\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}(\overline{A}R) = 0$$

qui peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + u\,\frac{\partial R}{\partial x} - \omega^2 x\,\frac{\partial R}{\partial u} = 0$$

Si $X|_t$ est stationnaire, $\dfrac{\partial R}{\partial t} = 0$ et il reste :

$$u\,\frac{\partial R}{\partial x} - \omega^2 x\,\frac{\partial R}{\partial u} = 0$$

La solution générale de cette équation aux dérivées partielles est :

$$R(x, u; t) = R\left(\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \omega\right)$$

25. *Equation générale de transfert.*

Soit $S(x, u, a, b, c; t)$ la densité de probabilité conjuguée de $X|_t$ et d'un certain nombre de ses dérivées, par exemple : $\dot{X}|_t, \ddot{X}|_t, \dddot{X}|_t$ et $X^{(\mathrm{IV})}|_t$. L'équation (3) devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}u + \frac{\partial S}{\partial u}a + \frac{\partial S}{\partial a}b + \frac{\partial S}{\partial b}c\right) dc = 0$$

Soit une fonction certaine quelconque dérivable :

$$\psi(X, U, A, B; t)$$

Alors :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\psi(x, u, a, b; t)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}u + \frac{\partial S}{\partial u}a + \frac{\partial S}{\partial a}b + \frac{\partial S}{\partial b}c\right) dc\,du\,da\,db = 0$$

et cela entraîne :

$$\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial(\psi S)}{\partial t} + \frac{\partial(u\psi S)}{\partial x} + \frac{\partial(a\psi S)}{\partial u} + \frac{\partial(b\psi S)}{\partial a} + \frac{\partial(c\psi S)}{\partial b}\right) dc\,du\,da\,db =$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} S\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial(u\psi)}{\partial x} + \frac{\partial(a\psi)}{\partial u} + \frac{\partial(b\psi)}{\partial a} + \frac{\partial(c\psi)}{\partial b}\right) dc\,du\,da\,db =$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} S\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} + a\frac{\partial\psi}{\partial u} + b\frac{\partial\psi}{\partial a} + c\frac{\partial\psi}{\partial b}\right) dc\,du\,da\,db =$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} S\dot{\psi}\,dc\,du\,da\,db$$

Si $S(x, u, a, b, c; t)$ s'annule lorsque u, a ou b tend vers $\pm\infty$, ce qui n'est pas restrictif, cette égalité devient :

$$\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial(\psi S)}{\partial t} + \frac{\partial(u\psi S)}{\partial x}\right) dc\,du\,da\,db =$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} S\dot{\psi}\,dc\,du\,da\,db$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\psi S\,dc\,du\,da\,db + \frac{\partial}{\partial x}\iiiint_{-\infty}^{+\infty}u\psi S\,dc\,du\,da\,db =$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} S\dot{\psi}\,dc\,du\,da\,db$$

$$(7) \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\cdot\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{U\psi}\cdot\rho) = \overline{\dot{\psi}}\cdot\rho} \qquad \text{équation de transfert.}$$

où $\rho(x;t)$ est la densité de probabilité de $X|_t$ et $\overline{\psi}$, $\overline{U\psi}$, $\overline{\dot{\psi}}$ les espérances de ψ, $U\psi$ et $\dot{\psi}$ lorsque x est donné.

Remarque : La grandeur ψ peut être fonction de $X|_t$ et d'un nombre *quelconque* de ses dérivées ; il suffit, pour faire le raisonnement précédent de choisir une densité de probabilité conjuguée de ($X|_t$ et du même nombre de ses dérivées + un).

Dans le cas général de l'équation (6), l'équation de transfert (7), devient :

$$(8) \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\cdot\rho) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i\psi}\cdot\rho) = \overline{\dot{\psi}}\cdot\rho}$$

26. *Equations aux valeurs probables d'un fluide turbulent.*

Toutes les équations des paragraphes précédents ont été établies sans préjuger d'une application quelconque : mais il va apparaître ici que ces équations contiennent implicitement celles aux valeurs probables d'un fluide turbulent. Il devient évident que l'on peut assimiler la densité du fluide turbulent à la densité de probabilité conjuguée $\rho(X_i;t)$ du corpuscule aléatoire R dont les coordonnées X_i sont des fonctions aléatoires doublement dérivables en moyenne quadratique ; la vitesse moyenne $U(X_i;t)$ du fluide en chaque point étant la moyenne liée de la vitesse aléatoire de la particule.

Soient

$$U_i' = U_i - \overline{U_i}, \quad C'^2 = \sum_{i=1}^{3} U_i'^2, \quad \psi' = \psi - \overline{\psi}, \quad A_i' = A_i - \overline{A_i}$$

Soit maintenant l'opérateur $\dfrac{d_o}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\overline{U_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$

L'équation de transfert (8) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\overline{\dot{\psi}}\cdot\rho &= \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\cdot\rho) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i\psi}\cdot\rho) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\cdot\rho) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i}\,\overline{\psi}\rho) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i'\psi'}\rho) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\cdot\rho) + \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\psi}\cdot\rho) + \overline{\psi}\rho\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i'\psi'}\rho)
\end{aligned}$$

$$\overline{\dot{\psi}}\cdot\rho = \frac{d_o}{dt}(\overline{\psi}\rho) + \rho\overline{\psi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i'\psi'}\rho)$$

En remplaçant ψ par 1, U_i et $\dfrac{1}{2}C'^2$, l'équation précédente donnera respectivement l'équation de continuité, les équations du mouvement probable et l'équation d'énergie.

27. *Equation de continuité.*

a) $\psi = 1$:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i}\cdot\rho) = 0} \qquad \text{équation de continuité}$$

ou, sous une autre forme :

$$\frac{d_o\rho}{dt} + \rho\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} = 0$$

28. *Equations du mouvement et tenseur de corrélation des vitesses.*

b) $\psi = U_i$:

$$\overline{\dot{U_i}}\cdot\rho = \frac{d_o}{dt}(\overline{U_i}\cdot\rho) + \rho\,\overline{U_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{U_j} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{U_j'U_i'}\rho)$$

$$\overline{A_i}\cdot\rho = \rho\frac{d_o}{dt}\overline{U_i} + \underbrace{\overline{U_i}\frac{d_o\rho}{dt} + \rho\overline{U_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{U_j}}_{=\,0\ \text{(équation de continuité)}} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{U_j'U_i'}\rho)$$

$$\boxed{\frac{d_o\overline{U_i}}{dt} = \overline{A_i} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{U_j'U_i'}\rho)} \qquad \text{équations du mouvement probable.}$$

Si T est le tenseur :

$$\begin{Vmatrix}
-\rho\overline{U_1'^2} & -\rho\overline{U_1'U_2'} & -\rho\overline{U_1'U_3'} \\
-\rho\overline{U_1'U_2'} & -\rho\overline{U_2'^2} & -\rho\overline{U_2'U_3'} \\
-\rho\overline{U_1'U_3'} & -\rho\overline{U_2'U_3'} & -\rho\overline{U_3'^2}
\end{Vmatrix}$$

$$\frac{d_o\overline{U_i}}{dt} = \overline{A_i} + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}$$

29. *Equation thermodynamique et d'énergie du fluide turbulent.*

c) $\psi = \dfrac{1}{2}C'^2$

$$(9) \qquad \overline{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}C'^2}\cdot\rho = \frac{d_o}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho\,\overline{C'^2}\right) + \rho\cdot\frac{1}{2}\overline{C'^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{U_i'C'^2}\frac{\rho}{2}\right)$$

Soient $K = \dfrac{1}{3}\overline{C'^2}$ le module de la vitesse d'agitation et $S = ln(K^{3/2}\cdot\rho^{-1})$ l'entropie de l'étage de perturbation, alors : $S = \dfrac{3}{2}\,ln\,K - ln\,\rho$ et :

$$\frac{d_oS}{dt} = \frac{3}{2K}\frac{d_oK}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d_o\rho}{dt}$$

$$-\rho K\frac{d_oS}{dt} = -\frac{3}{2}\rho\frac{d_oK}{dt} + K\frac{d_o\rho}{dt}$$

L'équation (9) devient :

$$\frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}C'^2}\cdot\rho = \frac{d_o}{dt}\left(\frac{3}{2}\rho K\right) + \frac{3}{2}\rho K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{U_i' C'^2}\,\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}C'^2}\cdot\rho = \frac{3}{2}K\frac{d_o\rho}{dt} + \frac{3}{2}\rho\frac{d_oK}{dt} + \frac{3}{2}\rho K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{U_i' C'^2}\,\frac{\rho}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho}{2}\,\overline{U_i' C'^2}\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{3}{2}K\frac{d_o\rho}{dt}}_{} - \rho K\frac{d_oS}{dt} - K\frac{d_o\rho}{dt} - \frac{3}{2}\rho K\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{C'^2}\cdot\rho$$

$$= \frac{3}{2}K\rho\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} \quad \text{(éq. de continuité)}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho}{2}\overline{U_i' C'^2}\right) = -\rho K\frac{d_oS}{dt} + K\rho\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}C'^2}\cdot\rho$$

Calcul du terme : $\frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}C'^2}$

$$\frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}C'^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\overline{\frac{d}{dt}U_i'^2} = \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'\frac{dU_i'}{dt}} = \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'\frac{dU_i}{dt}} -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'\frac{d\overline{U_i}}{dt}} = \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'A_i} - \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i\left(\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{U_i})\cdot U_j\right)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'A_i'} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\overline{U_i'U_j'\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j}} = \sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'A_i'} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\overline{U_i'U_j'}\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j}$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho}{2}\,\overline{U_i'C'^2}\right) = -\rho K\frac{d_oS}{dt} + \frac{1}{3}\overline{C'^2}\rho\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{U_i} + \rho\sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'A_i'} - \rho\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\overline{U_i'U_j'}\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j}$$

Ainsi le tenseur de turbulence prend l'aspect suivant :

$$T' = \begin{Vmatrix} -\rho\overline{U_1'^2} + \frac{1}{3}\rho\overline{C'^2} & -\rho\,\overline{U_1'U_2'} & -\rho\,\overline{U_1'U_3'} \\ -\rho\,\overline{U_1'U_2'} & -\rho\overline{U_2'^2} + \frac{1}{3}\rho\overline{C'^2} & -\rho\,\overline{U_2'U_3'} \\ -\rho\,\overline{U_1'U_3'} & -\rho\,\overline{U_2'U_3'} & -\rho\overline{U_3'^2} + \frac{1}{3}\rho\overline{C'^2} \end{Vmatrix}$$

On remarque qu'il peut être décomposé en *un tenseur des tensions* (ou des viscosités turbulentes) *construit à partir des corrélations des vitesses* $T_{ij} = -\rho\,\overline{U_i'U_j'}$ et en un *tenseur des pressions turbulentes* $P_{ij} = \frac{1}{3}\rho\,\overline{C'^2}\,\delta_{ij}$

Donc :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\rho}{2}\,\overline{U_i'C'^2}\right) = -\rho K\frac{d_oS}{dt} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\overline{U_i}}{\partial x_j}T'_{ij} + \rho\sum_{i=1}^{3}\overline{U_i'A_i'}}$$

(équation d'énergie)

L'équation thermodynamique et d'énergie du fluide turbulent contient :

Le premier membre représente le flux d'énergie turbulente à travers les parois d'une micro-particule.

Les termes du second membre représentent :

1er terme : le produit de la variation d'entropie de l'étage de perturbation par le module de la vitesse d'agitation qui est l'analogue de la température car $\rho K = \frac{1}{3}\rho\,\overline{C'^2}$

2e terme : le travail accompli par les tensions de viscosité turbulente, autrement dit, la quantité d'énergie cinétique du mouvement moyen qui, par unité de temps, se dissipe en énergie turbulente.

3e terme : une fonction dissipative dépendant des corrélations vitesse-accélération.

30. *Quelques conclusions au sujet des équations précédentes.*

La mécanique aléatoire a ainsi pu être particularisée en une mécanique des fluides turbulents et dissipatifs dont quelques équations fondamentales sont écrites ci-dessus.

D'autres résultats et grandeurs de la mécanique de la turbulence peuvent être obtenus facilement en utilisant la dérivée en moyenne quadratique et les propriétés mathématiques du corpuscule aléatoire :

micro et macro-échelles de la turbulence, loi de la décroissance de Taylor, etc.

Une analyse spectrale plus complète que celle que permettent les calculs traditionnels fournit également d'intéressants renseignements (voir plus loin).

31. *Primitive X de U et mécanique de la diffusion.*

En plus de la force d'expansion du corpuscule aléatoire il existe une autre circonstance qui explique que la mécanique aléatoire soit justement celle de la diffusion turbulente : elle est liée à une indétermination plus grande que celle de la mécanique certaine dans laquelle une vitesse définit un seul corpuscule à un changement d'origine près. En effet la primitive X de U, définie par son moment rectangle, dépend d'une fonction arbitraire.

Il y a donc une infinité de corpuscules distincts admettant la même vitesse.

Chapitre VI — Cinématique statistique du corpuscule aléatoire dans l'espace de Hilbert

32. *L'espace aléatoire est un espace de Hilbert.*

Soit E l'ensemble des variables aléatoires.

E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, *en effet :*

l'ensemble E muni de la loi $+$: $(X, Y) \to X + Y$ est un groupe :

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

$$X + Y = Y + X$$

il existe un élément 0 tel que : $0 + X = X$

il existe toujours un élément $(-X)$ tel que : $X + (-X) = 0$

L'application : $(\alpha, X) \to \alpha X \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad X \in E$

vérifie : $\lambda(\mu X) \quad = (\lambda\mu) X$

$$(\lambda + \mu) X = \lambda X + \mu X$$
$$1 \cdot X = X$$
$$\lambda (X + Y) = \lambda X + \lambda Y$$

ceci quels que soient X, Y, $Z \in E$ et λ et $\mu \in \mathbf{R}$.

L'application $(X, Y) \to \overline{XY}$ *est une forme hermitienne de* $E \times E$ *dans* **R**, en effet :

$$\overline{(X+Y)\,Z} = \overline{XZ} + \overline{YZ}$$
$$\overline{\alpha X \cdot Y} = \alpha\, \overline{XY}$$
$$\overline{XY} = \overline{YX}$$

Cette forme hermitienne est *positive* car $\overline{X^2} \geqq 0$, quel que soit X ; elle est même *définie positive* car si $\overline{X^2} = 0$, $X = 0$ et réciproquement.

Comme l'espace E *est complet*, **E est un espace de Hilbert.**

33. *Cinématique aléatoire stationnaire.*

Comme E est un espace de Hilbert, l'inégalité de Schwarz est vérifiée (c'est d'ailleurs une conséquence de la 1re condition de cohérence) :

$$\overline{XY}^{\,2} \leqq \overline{X^2} \cdot \overline{Y^2}$$

La norme de X peut alors se définir comme étant

$$\| X \| = \sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\overline{X}^2 + \overline{X'^2}}$$

et le produit scalaire est l'application $(X, Y) \to \overline{XY}$.

Cas aléatoire stationnaire : soit une fonction aléatoire $X|_t$ stationnaire telle que $\overline{X|_t} = 0$, $\overline{X^2|_t} = S_0^2$, $\overline{X|_t X|_{t+h}} = S_0^2\, r(h)$

L'« angle » α entre $X|_t$ et $X|_{t+h}$ est alors donné par :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{X|_t X|_{t+h}}}{S_0^2} = r(h)$$

et le carré de la distance comprise entre les extrémités de $X|_t$ et $X|_{t+h}$ vaut :

$$d^2 = \overline{(X|_{t+h} - X|_t)^2} = 2\, S_0^2\, (1 - r(h)) = 2\, S_0^2\, (1 - \cos \alpha)$$

La formule obtenue est, en fait, celle de la géométrie classique donnant la longueur d du 3e côté d'un triangle isocèle dont on connaît l'angle opposé α et la longueur S_0 des 2 côtés égaux.

Si la fonction aléatoire $X|_t$ est dérivable, $r(h)$ peut se développer sous la forme :

$$r(h) = 1 - \frac{S_1^2}{S_0^2}\frac{h^2}{2\,!} + \frac{S_2^2}{S_0^2}\frac{h^4}{4\,!} - \ldots$$

où S_i est l'écart type de la dérivée ième de $X|_t$.

Lorsque $h = dt$ est très petit, l'élément d'arc de la trajectoire hilbertienne vaudra : ds = partie principale de d = partie principale de $S_0 \sqrt{2\,(1 - r(h))}$; en remplaçant $r(h)$ par son développement ds devient :

$$ds = S_1 dt \implies v = \frac{ds}{dt} = S_1$$

Par conséquent, la vitesse du point représentatif sur sa trajectoire est constante et égale à l'écart type S_1.

L'accélération tangentielle est alors nulle et l'accélération est entièrement normale. Elle vaut :

$$\gamma_n = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{\overline{(X|_{t+2h} - 2\,X|_{t+h} + X|_t)^2}}}{h^2} = S_2 = \gamma_n$$

34. *Calcul du rayon de courbure et du rayon de torsion.*

Calcul du rayon de courbure : c'est la limite du rayon du cercle circonscrit au triangle $X|_t$, $X|_{t+h}$, $X|_{t+h+k}$, quand h et k tendent simultanément et indépendamment vers 0.

Les côtés a, b, c du triangle dont les sommets sont les extrémités de $X|_t$, $X|_{t+h}$ et $X|_{t+h+k}$ ont pour partie principale :

$$a = \sqrt{\overline{(X|_{t+h} - X|_t)^2}} = S_0 \sqrt{2\,(1 - r(h))} =$$
$$= S_0 \sqrt{2\left(\frac{S_1^2}{S_0^2}\frac{h^2}{2\,!} - \frac{S_2^2}{S_0^2}\frac{h^4}{4\,!} + \ldots\right)}$$

$$a = \sqrt{S_1^2\, h^2 - S_2^2\, \frac{h^4}{12} + \ldots} = \sqrt{\left(S_1 h - \frac{S_2^2 h^3}{S_1} \cdot \frac{1}{24}\right)^2 + \ldots}$$

$$a = S_1\, h - \frac{S_2^2}{S_1}\frac{h^3}{24} + \ldots$$

$$b = \sqrt{\overline{(X|_{t+h+k} - X|_{t+h})^2}} = S_1\, k - \frac{S_2^2}{S_1}\frac{k^3}{24} + \ldots$$

$$c = \sqrt{\overline{(X|_{t+h+k} - X|_t)^2}} = S_1 (h + k) - \frac{S_2^2}{S_1}\frac{(h+k)^3}{24} + \ldots$$

Si $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ l'aire du triangle vaut :

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = \frac{S_1 S_2\, (h + k)\, hk}{4} + \ldots$$

Le produit des côtés vaut :

$$a\,b\,c = S_1^3\, hk\, (h + k) + \ldots$$

Par conséquent, la limite du rayon du cercle circonscrit $\left(= \dfrac{a\,b\,c}{4\,A}\right)$ vaut :

$$R = \frac{S_1^3\, (h + k)\, hk}{S_1 S_2\, (h + k)\, hk} = \frac{S_1^2}{S_2}$$

Remarque : on arrive de façon plus rapide à ce résultat si on emploie directement la formule de géométrie :

$$R = \frac{\|\dot{X}\|^3}{\|\dot{X}\times\ddot{X}\|} = \frac{S_1^3}{S_1 S_2} = \frac{S_1^2}{S_2}$$

La norme du produit vectoriel du dénominateur est le produit des normes de $\dot{X}|_t$ et $\ddot{X}|_t$ car ces deux vecteurs sont « perpendiculaires »: $\overline{\dot{X}|_t\ddot{X}|_t} = 0$ dans le cas stationnaire.

Calcul du rayon de torsion :

La formule employée en géométrie donne :

$$R_1 = \frac{(\dot{X}\times\ddot{X})^2}{\text{dét}\,(\dot{X},\ddot{X},\dddot{X})} = \frac{(S_1S_2)^2}{\sqrt{\begin{vmatrix} \overline{\dot{X}^2} & \overline{\dot{X}\ddot{X}} & \overline{\dot{X}\dddot{X}} \\ \overline{\ddot{X}\dot{X}} & \overline{\ddot{X}^2} & \overline{\ddot{X}\dddot{X}} \\ \overline{\dddot{X}\dot{X}} & \overline{\dddot{X}\ddot{X}} & \overline{\dddot{X}^2} \end{vmatrix}}}$$

$$R_1 = \frac{(S_1\,S_2)^2}{\sqrt{\begin{vmatrix} S_1^2 & 0 & -S_2^2 \\ 0 & S_2^2 & 0 \\ -S_2^2 & 0 & S_3^2 \end{vmatrix}}} = \frac{(S_1\,S_2)^2}{\sqrt{S_1^2\,S_2^2\,S_3^2 - S_2^6}} =$$

$$= \frac{S_1^2\,S_2}{\sqrt{S_1^2\,S_3^2 - S_2^4}} = R_1$$

35. *Cinématique dans le cas général.*

Cas général :

Soit $X'|_t$ la partie purement aléatoire de $X|_t$: $X'|_t = X|_t - \overline{X|_t}$.

Alors :

$$r\,(t, t+h) = \frac{\overline{X'|_t X'|_{t+h}}}{\sqrt{\overline{X'^2|_t}}\,\sqrt{\overline{X'^2|_{t+h}}}} = \frac{\overline{X'|_t\,X'|_{t+h}}}{S_0\,(t)\,S_0\,(t+h)}$$

En supposant que $S_0(t)$ et $X'|_t$ soient un certain nombre de fois dérivables :

$$S_0\,(t+h) = S_0\,(t) + h\,S_0'\,(t) + \frac{h^2}{2\,!}\,S_0''\,(t) + \frac{h^3}{3\,!}\,S_0'''\,(t) + \dots$$

$$\overline{X'|_t\,X'|_{t+h}} = \overline{X'^2|_t} + h\,\overline{X'|_t\,\dot{X}'|_t} + \frac{h^2}{2\,!}\,\overline{X'|_t\,\ddot{X}'|_t} + \frac{h^3}{3\,!}\,\overline{X'|_t\,\dddot{X}'|_t} + \dots$$

$$= S_0^2\,(t) + h\,S_0\,(t)\,S_0'\,(t) + \frac{h^2}{2\,!}\big(S_0\,(t)\,S_0''\,(t) + S_0'^2\,(t) - S_1^2(t)\big) + \frac{h^3}{3\,!}\big(S_0\,(t)\,S_0'''\,(t) + 3\,S_0'(t)S_0''(t) - 3\,S_1\,(t)S_1'\,(t)\big) + \dots$$

En effet :

$S_0^2 = \overline{X'^2|_t}$ d'où, en dérivant : $S_0\,S_0' = \overline{X'|_t\,\dot{X}'|_t}$

En dérivant une seconde fois :

$$S_0\,S_0'' + S_0'^2 = \overline{X'|_t\,\ddot{X}'|_t} + \overline{\dot{X}'^2|_t} = \overline{X'|_t\,\ddot{X}'|_t} + S_1^2$$

et : $\qquad \overline{X'|_t\,\ddot{X}'|_t} = S_0\,S_0'' + S_0'^2 - S_1^2$

De même :

$$S_1 = \overline{\dot{X}'^2|_t} \quad \text{d'où } \overline{\dot{X}'|_t\,\ddot{X}'|_t} = S_1\,S_1'$$

et $\overline{X'|_t\,\dddot{X}'|_t} + \overline{\dot{X}'|_t\,\ddot{X}'|_t} = S_0\,S_0''' + 3\,S_0'\,S_0'' - 2\,S_1\,S_1'$

d'où : $\qquad \overline{X'|_t\,\dddot{X}'|_t} = S_0\,S_0''' + 3\,S_0'\,S_0'' - 3\,S_1\,S_1'$

En remplaçant $S_0\,(t+h)$ et $X'|_{t+h}$ par leur développement dans l'expression de $r\,(t, t+h)$, $r\,(t, t+h)$ prend la forme :

$$r(t,t+h) = 1 + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{S_0'^2 - S_1^2}{S_0^2} + \frac{h^3\,(S_0S_0'S_0'' - S_0S_1S_1' - S_0'^3 + S_0'S_1^2)}{2\,S_0^3} +$$

$$+ \frac{h^4}{4\,!\,S_0^4}\,(4\,S_0^2\,S_0'\,S_0''' + 3\,S_0^2\,S_0''^2 - 4\,S_0^2\,S_1\,S_1'' - 4\,S_0^2\,S_1'^2 +$$

$$+ S_0^2S_2^2 - 18\,S_0S_0'^2S_0'' - 12\,S_0'^2S_1^2 + 12\,S_0'^4 + 6\,S_0S_0''S_1^2 +$$

$$+ 12\,S_0S_0'S_1S_1') + \dots$$

Comme dans le cas aléatoire stationnaire, le module de la vitesse v vaut $S_1(t)$ et celui de l'accélération vaut $S_2(t)$ mais cette accélération n'est plus entièrement normale à la trajectoire car ici S_1 dépend de t et possède une dérivée non nulle :

— accélération tangentielle : $\dfrac{dv}{dt} = S_1'\,(t) = \gamma_s$

— accélération normale : $\gamma_n = \sqrt{S_2^2\,(t) - S_1'^2\,(t)}$

Le rayon de courbure de la trajectoire vaut alors :

$$R = \frac{\|\,\dot{X}\,\|^3}{\|\,\dot{X}\times\ddot{X}\,\|} = \frac{S_1^3}{S_1\sqrt{S_2^2 - S_1'^2}} = \frac{S_1^2\,(t)}{\sqrt{S_2^2\,(t) - S_1'^2\,(t)}}$$

Conclusion : on voit donc que tous les éléments cinématiques sont calculés en fonction des écarts types de la fonction aléatoire et de ses dérivées, ainsi que de leurs dérivées.