Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 98 (1972)

Heft: 9

Artikel: Calcul direct de l'énergie électromagnétique par approximation de la fonction de potentiel magnétique

Autor: Derron, Denis

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-71544

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

COMMUNICATION DES CHAIRES DE MACHINES ÉLECTRIQUES DE L'EPF-LAUSANNE (Professeurs MM. J. Chatelain et M. Jufer)

Calcul direct de l'énergie électromagnétique par approximation de la fonction de potentiel magnétique

par DENIS DERRON

Calcul de l'énergie électromagnétique

1. Introduction

Le but de la méthode proposée est de pouvoir calculer rapidement l'énergie électromagnétique d'un domaine non saturé et homogène, en connaissant les conditions sur la frontière de ce domaine, mais sans passer par les résolutions traditionnelles du problème de Dirichlet.

2. Hypothèses

— La perméabilité μ est constante dans le domaine considéré.
— La densité de courant J est nulle.
— Le domaine est de forme cylindrique et peut se traiter comme un domaine bidimensionnel, dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.
— Les équations de Maxwell au départ sont les suivantes :

(1) $$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} = 0$$

(2) $$\overrightarrow{\text{div}}\,\vec{H} = 0$$

3. Problème mathématique

L'énergie électromagnétique W, dans un volume v de frontière S se calcule à l'aide de l'intégrale :

(3) $$W = \frac{1}{2}\iiint_v B.H\,dv$$

De l'équation (1), se déduit immédiatement que

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta$$

H dérive d'un potentiel magnétique scalaire θ.
D'autre part, l'équation (2) nous donne :

$$-\text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta = 0$$

d'où $$\Delta\theta = 0$$

θ est donc un champ laplacien.

Soit x, y, z, des coordonnées cartésiennes dans le volume v.

$\theta\,(x, y, z)$ est une fonction harmonique dans le volume v.

En effet : — elle est de classe C^2 ;
— elle satisfait à l'équation de Laplace ;
— elle est continue dans l'ensemble fermé $v + S$.

Revenons à (3) :

$$W = \tfrac{1}{2}\iiint_v \mu\,H^2\,dv = \frac{\mu}{2}\iiint_v (\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta)^2\,dv$$

Donc (4) $$W = \frac{\mu}{2}\iiint_v (\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta)^2\,dx\,dy\,dz$$

Passons au problème plan :

Etant donné les hypothèses faites, nous avons un volume v cylindrique ; et nous ne nous occupons que d'une « tranche » plane de ce cylindre, le domaine D de frontière Γ. D est dans le plan (x, y).

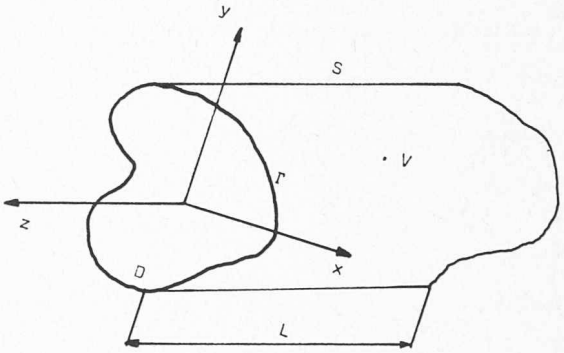

Fig. 1.

L étant la longueur du cylindre considéré, nous avons maintenant la formulation mathématique du problème à résoudre, soit :

(5) $$W = L \cdot \frac{\mu}{2}\iint_D (\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta)^2\,dx\,dy$$

Problème : Tenant compte des conditions ci-dessus, et connaissant la valeur « g » de θ sur Γ, déterminer W.

4. Principe de la méthode

Supposons connues les fonctions harmoniques :

$$V_0\,(x, y) \equiv 1\ ;\ V_1\,(x, y)\ ;\ \ldots\ ;\ V_n\,(x, y)$$

On recherche une approximation $V\,(x, y)$ de $\theta\,(x, y)$, de la forme :

$$V = \sum_{i=0}^{n} C_i\,V_i\,(x, y)$$

avec la condition (6) $\iint_D (\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta - \overrightarrow{\text{grad}}\,V)^2\,dx\,dy =$ minimum.

Puisque $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_0 = 0$, cette condition ne permet pas de déterminer le coefficient C_0, ce qui ne joue aucun rôle, puisque l'on désire calculer (5) et non pas θ lui-même.

Désormais, on ignore V_0 et l'on peut poser :

$$V = \sum_{i=1}^{n} C_i\, V_i\,(x, y)$$

Les C_i restent donc à déterminer, à l'aide de la condition (6), qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \iint_D \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(\theta - \sum_{j=1}^{n} C_j\, V_j) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,(\theta - \sum_{i=1}^{n} C_i\, V_i) \right) dx\, dy = 0$$

d'où (7) :

$$\iint_D (\overrightarrow{\text{grad}}\,(\theta - \sum_{j=1}^{n} C_j\, V_j) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, V_i)\, dx\, dy = 0 \; (i = 1,2,\ldots,n)$$

On peut transformer cette dernière relation par la formule de Green.

Soit f et h, deux fonctions de classe C^2 :

$$(8) \qquad \iint_D \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, h\, dx\, dy = -\iint_D f \cdot \Delta h\, dx\, dy + \int_\Gamma f \cdot \frac{dh}{dn} \cdot ds$$

où $\frac{dh}{dn}$ est la dérivée de h dans la direction de la normale extérieure à Γ.

En posant : $\quad f = \theta - \sum_{j=1}^{n} C_j\, V_j$

$h = V_i$

avec $\Delta V_i = 0$ par définition

(7) devient : $\quad \int_\Gamma \left(\theta - \sum_{j=1}^{n} C_j\, V_j \right) \frac{dV_i}{dn}\, ds = 0$

Ou encore :

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Gamma V_i \frac{dV_i}{dn}\, ds \right) C_j = \int_\Gamma \theta \frac{dV_i}{dn}\, ds \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

On remarque que le membre de droite peut être calculé directement puisque θ est connu sur Γ ($\theta = g$ donné) ; le membre de gauche (sauf C_i) est également connu.

Posons : (10) $\quad a_{ij} = \int_\Gamma V_j \frac{dV_i}{dn}\, ds \qquad A = (a_{ij})$

(11) $\quad b_i = \int_\Gamma g \frac{dV_i}{dn}\, ds \qquad \vec{b} = (b_i)$

$\vec{c} = (c_i)$

(9) devient le système d'équations linéaires :

$$(12) \qquad A\,\vec{C} = \vec{b}$$

D'autre part, en posant dans (8) $f = V$, $h = V$, et en tenant compte du fait que $\Delta V = 0$, il vient :

$$\frac{2\,\widetilde{W}}{\mu \cdot L} \equiv \iint_D (\overrightarrow{\text{grad}}\, V)^2\, dx\, dy = \int_\Gamma V \frac{dV}{dn}\, ds$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Gamma V_j \frac{dV_i}{dn}\, ds \right) C_j\, C_i = \vec{C}^T \cdot A \cdot \vec{C} = \vec{C}^T \cdot \vec{b}$$

$\widetilde{W}$ étant l'approximation de W cherchée :

$$(13) \qquad \widetilde{W} = \vec{C}^T \cdot \vec{b} \cdot \frac{\mu \cdot L}{2}$$

5. Résumé de la méthode

1. Calculer les éléments a_{ij} et b_i selon (10) et (11).
2. Résoudre (12).
3. $\widetilde{W}$ est l'approximation de W cherchée sous (5).

6. Remarques

— En posant dans (8) $f = V_j$, $h = V_i$, avec $\Delta V_i = 0$, on a :

$$a_{ij} = \iint_D \overrightarrow{\text{grad}}\, V_j \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, V_i\, dx\, dy = \int_\Gamma V_j \frac{dV_i}{dn}\, ds$$

Ceci prouve la symétrie de la matrice A : $a_{ij} = a_{ji}$.

— On pourrait calculer a_{ji} par une intégrale de surface ; il est cependant beaucoup plus simple et plus rapide d'utiliser les intégrales sur la frontière, c'est-à-dire (10).

7. Choix des fonctions V_i

Soit $\underline{Z} = x + iy$. On sait, de par la théorie des fonctions analytiques, que les fonctions :

$$\alpha_K\,(x, y) = Re\,(\underline{Z}^K)$$
$$\beta_K\,(x, y) = Jm\,(\underline{Z}^K)$$

sont des fonctions harmoniques ; on peut donc poser :

$V_1 = \alpha_1 \quad V_2 = \beta_1 \quad V_3 = \alpha_2 \quad V_4 = \beta_2 \quad V_5 = \alpha_3$
$V_6 = \beta_3 \quad \ldots$

De plus, nous avons les relations :

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\, \alpha_K\,(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\, \beta_K\,(x, y) = K \cdot Re\,\{\underline{Z}^{K-1}\} \\ \frac{\partial}{\partial x}\, \beta_K\,(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y}\, \alpha_K\,(x, y) = K \cdot Jm\,\{\underline{Z}^{K-1}\} \end{aligned}$$

Loi de formation des fonctions V_i :

A l'aide du binôme de Newton, on peut trouver les formules donnant directement les fonctions $V_i\,(x, y)$.

a) *i est impair :*

Posons $\qquad m = \frac{i+1}{2}$

$$(15) \qquad \alpha_m = V_i = \sum_{j=1,3,5,\ldots}^{2\left[\frac{K+1,1}{4}\right]+1} x^{m-j+1}\, y^{j-1} \cdot \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot j}{(m-j+1)\,!} \cdot (-1)^{\frac{j+3}{2}}$$

Posons $\quad m = \dfrac{i}{2}$

$$\beta_m = V_i = \sum_{j=2,4,6,\ldots}^{2\left[\frac{K-0,1}{4}+1\right]} x^{m-j+1}\, y^{j-1} \cdot \tag{16}$$

$$\cdot \frac{m\cdot(m-1)\,.\,\ldots\,.\,j}{(m-j+1)\,!} \cdot (-1)^{\frac{j+2}{2}}$$

8. Intégration curviligne numérique

Les intégrales (10), (11) sont de la forme :

$$\int_\Gamma f \frac{dh}{dn}\, ds,$$

Soit $\vec{n}\,(n_x, n_y)$ la normale extérieure, et $\vec{S}\,(S_x, S_y)$, la tangente à Γ, orientée dans le sens trigonométrique positif. On a :

$$n_x = S_y$$

$$n_y = -S_x$$

donc : $$\int_\Gamma f \frac{dh}{dn}\, ds = \int_\Gamma f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} h \cdot n_x + \frac{\partial}{\partial y} h \cdot n_y\right) ds$$

$$= \int_\Gamma f \frac{\partial}{\partial x} h \cdot S_y\, ds - \int_\Gamma f \frac{\partial}{\partial y} h \cdot S_x\, ds$$

Dans notre cas, nous connaissons explicitement

$$f \frac{\partial}{\partial x} h \quad \text{et} \quad f \frac{\partial}{\partial y} h$$

(voir formule (14)). Nous sommes donc ramenés au calcul d'intégrales de la forme :

$$\int_\Gamma p \cdot S_x\, ds \quad \text{et} \quad \int_\Gamma q \cdot S_y\, ds$$

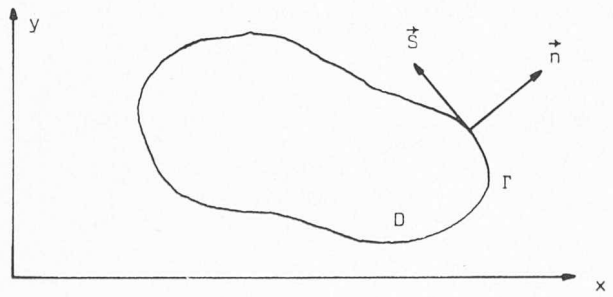

Fig. 2.

On remplace Γ par un contour polygonal, et l'on est dès lors ramené à évaluer les intégrales sur un segment de droite.

Considérons par exemple :

$$\int_{\overline{Pi\,Pi+1}} p\, S_x\, ds$$

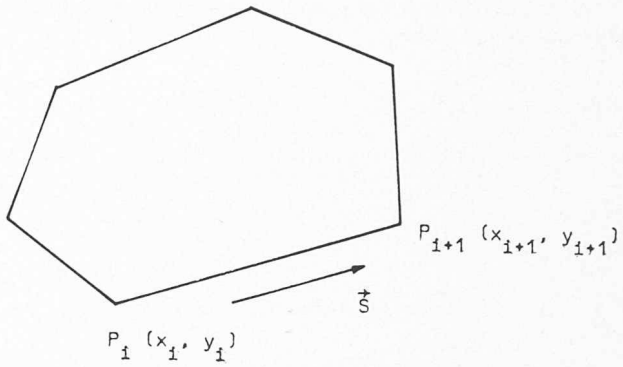

Fig. 3.

Soit S_i et S_{i+1}, les abscisses curvilignes de P_i et P_{i+1} ; on a :

$$\int_{\overline{Pi\,Pi+1}} p\, S_x\, ds = S_x \int_{Si}^{Si+1} p\,(x(s), y(s))\, ds$$

S_x étant bien entendu constant sur une droite, on a une intégrale ordinaire dans le membre de gauche. On utilise la formule du trapèze :

$$S_x \int_{Si}^{Si+1} p\,(x(s), y\,(s))\, ds = S_x\, \frac{S_{i+1}-S_i}{2}\,(p(x(S_i), y(S_i)) +$$

$$+\, p(x(S_{i+1}), y(S_{i+1}))$$

$$= \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,(p(x_i, y_i) + p(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Le même calcul peut être fait pour la seconde intégrale ; on a donc les approximations :

$$\int_{\overline{Pi\,Pi+1}} p\, S_x\, ds = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}(p(x_i, y_i) + p(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

(17)

$$\int_{\overline{Pi\,Pi+1}} q\, S_y\, ds = \frac{y_{i+1}-y_i}{2}\,(q(x_i, y_i) + q(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

9. Calcul des a_{ij}

Toute figure géométrique peut être mise sous la forme d'un polygone. Pour toute courbe qui n'est pas une droite, il est évident que l'approximation sera d'autant meilleure que le nombre de côtés du polygone est plus grand.

Soit M le nombre de sommets du polygone. De (10) et (17), nous tirons :

$$a_{ij} = \int_\Gamma V_j \frac{dV_i}{dn}\, ds = \int_\Gamma V_j \frac{dV_i}{dx} \cdot S_y\, ds - \int_\Gamma V_j \frac{dV_i}{dy} \cdot S_x\, ds$$

Posons : $\quad p = V_j \dfrac{dV_i}{dy} \qquad q = V_j \dfrac{dV_i}{dx}$

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{y_{m+1}-y_m}{2}\,(q(x_m, y_m) + q(x_{m+1}, y_{m+1})) - \right.$$

$$\left. - \frac{x_{m+1}-x_m}{2}\,(p(x_m, y_m) + p(x_{m+1}, y_{m+1})) \right)$$

Suivant la parité de i et j, nous sommes amenés à distinguer quatre cas pour a_{ij}.

Posons : $\underline{Z}_m^{\frac{i}{2}} = R_m \qquad \underline{Z}_m^{\frac{j+1}{2}} = \underline{T}_m$

$\underline{Z}_m^{\frac{i}{2}-1} = \underline{S}_m \qquad \underline{Z}_m^{\frac{i-1}{2}} = \underline{U}_m$

a) *i et j sont pairs :*

$$a_{ij} = \frac{i}{4} \sum_m (Jm(\underline{R}_m) \cdot Jm(\underline{S}_m) \cdot (y_{m+1} - y_{m-1}) - Jm(\underline{R}_m) \cdot Re(\underline{S}_m)(x_{m+1} - x_{m-1}))$$

b) *i et j sont impairs :*

$$a_{ij} = \frac{i+1}{4} \sum_m (Re(\underline{T}_m) \cdot Re(\underline{U}_m)(y_{m+1} - y_{m-1}) + Re(\underline{T}_m) \cdot Jm(\underline{U}_m)(x_{m+1} - x_{m-1}))$$

c) *i est pair et j est impair :*

$$a_{ij} = \frac{i}{4} \sum_m (Re(\underline{T}_m) \cdot Jm(\underline{S}_m) \cdot (y_{m+1} - y_{m-1}) - Re(\underline{T}_m) . Re(\underline{S}_m)(x_{m+1} - x_{m-1}))$$

d) *i est impair et j est pair :*

$$a_{ij} = \frac{i+1}{4} \sum_m (Jm(\underline{R}_m) \cdot Re(\underline{U}_m) \cdot (y_{m+1} - y_{m-1}) + Jm(\underline{R}_m) \cdot Jm(\underline{U}_m)(x_{m+1} - x_{m-1}))$$

10. Calcul des b_i

Des équations (11) et (17), nous pouvons tirer :

$$b_i = \int_\Gamma g \frac{dV_i}{dn} ds = \int_\Gamma q\, S_y\, ds - \int_\Gamma p\, S_x\, ds$$

En posant : $p = g \dfrac{dV_i}{dy} \qquad q = g \dfrac{dV_i}{dx}$

$$b_i = \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2} \cdot q(x_m, y_m) - \frac{x_{m+1} - x_{m-1}}{2} \cdot p(x_m, y_m) \right)$$

Suivant la parité de i, nous distinguerons deux cas pour b_i :

a) *i est pair :*

$$b_i = \frac{i}{4} \sum_m (g_m \cdot Jm(\underline{S}_m)(y_{m+1} - y_{m-1}) - g_m \cdot Re(\underline{S}_m) \cdot (x_{m+1} - x_{m-1}))$$

b) *i est impair :*

$$b_i = \frac{i+1}{4} \sum_m (g_m \cdot Re(\underline{U}_m) \cdot (y_{m+1} - y_{m-1}) + g_m \cdot Jm(\underline{U}_m)(x_{m+1} - x_{m-1}))$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour résoudre le système (12), donc pour calculer l'énergie. Mais, sans beaucoup de calculs supplémentaires, la méthode nous fournit d'autres renseignements intéressants, comme nous allons le voir.

11. Calcul des potentiels

Il peut être en effet intéressant de connaître le potentiel magnétique θ en un ou plusieurs points de coordonnées données, afin par exemple de dessiner les lignes équipotentielles.

Cependant, il est bien évident que l'énergie ne dépend pas de la valeur absolue des potentiels, mais uniquement de leur répartition dans le plan. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que C_o est indéterminé. Nous sommes donc amenés à choisir arbitrairement *un* point de la figure comme point de référence pour les valeurs du potentiel, ce qui permet de déterminer C_o, à l'aide des formules (15) et (16).

Nous avons en effet :

$$\theta(x_o, y_o) = C_o + \Sigma_i C_i V_i(x_o, y_o)$$

12. Calcul du champ magnétique

Là aussi, la valeur du champ, ainsi que sa direction, sont des grandeurs intéressantes à connaître (pour des questions de saturation par exemple).

Par définition, $\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \theta$.

Soit (x_o, y_o) les coordonnées du point dont on veut calculer le champ :

$$H_x(x_o, y_o) = -\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x_o, y_o}$$

$$H_y(x_o, y_o) = -\left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{x_o, y_o}$$

$$H_x(x_o, y_o) = -\sum_{i=1,3,5,\ldots} C_i \cdot \frac{i+1}{2} \cdot Re\left\{(x_o + jy_o)^{\frac{i-1}{2}}\right\} - \sum_{i=2,4,6,\ldots} C_i \cdot \frac{i}{2} \cdot Jm\left\{(x_o + jy_o)^{\frac{i}{2}-1}\right\}$$

$$H_y(x_o, y_o) = \sum_{i=1,3,5,\ldots} C_i \cdot \frac{i+1}{2} \cdot Jm\left\{(x_o + jy_o)^{\frac{i-1}{2}}\right\} + \sum_{i=2,4,6,\ldots} C_i \cdot \frac{1}{2} \cdot Re\left\{(x_o + jy_o)^{\frac{i}{2}-1}\right\}$$

Ici, $j = \sqrt{-1}$

13. Applications pratiques de la méthode

13.1 *Définition d'un système d'axes cartésiens*

On a tout avantage à choisir un système dont l'origine se situe près du « centre » du domaine, de façon à diminuer les erreurs d'arrondi de l'ordinateur.

13.2 *Définition de la frontière Γ*

Pour le moment, nous ne considérons que les domaines ayant une frontière d'un seul tenant, c'est-à-dire sans îlots.

D'autre part, on peut considérer que les machines électriques nous offrent des domaines dont les frontières comprennent soit des segments de cercles, soit des segments de droite. Ceci permet de faire un programme de « polygonalisation » entièrement automatique de n'importe quelle figure géométrique, avec autant de points qu'on le désire sur le pourtour.

13.3 *Définition de la fonction g*

La fonction g fixe les conditions aux limites du potentiel. Cette fonction doit être définie en tous les sommets du polygone formant Γ. Il est avantageux de faire un programme automatique pour calculer g suivant des répartitions linéaires ou sinusoïdales.

14. Résultats pratiques

Pour avoir une bonne idée de la précision de la méthode, il est nécessaire de choisir tout d'abord des figures géométriques simples, pour lesquelles il est possible de définir mathématiquement l'énergie, sans devoir utiliser des méthodes approchées, elles-mêmes imprécises.

14.1 *Remarques*

14.1.1 *Nombre d'approximations V_i*

Le programme de calcul a été fait en simple précision. De ce fait, on remarque que quelle que soit la figure, il est inutile d'aller beaucoup au-delà de 10 (dix) approximations, car alors les erreurs d'arrondi de l'ordinateur diminuent la précision. Par contre, on doit prendre au moins 5 (cinq) approximations pour avoir un résultat correct.

14.1.2 *Nombre de sommets du contour Γ*

Il existe une certaine corrélation entre le nombre d'approximations I et M, le nombre de sommets de Γ. En pratique, on remarque qu'il est favorable de prendre M 50 à 100 fois plus grand que I.

14.1.3 *Résultats pour le calcul de l'énergie*

On constate que pour des figures « simples » (triangles, carrés, et les figures convexes), la précision obtenue est excellente, puisqu'elle est supérieure au $^0/_{00}$.

Par contre, dès que le domaine se complique, et que l'on a une frontière telle une denture par exemple, les résultats deviennent complètement faux. Comme limite d'utilisation, on peut fixer une figure en forme de « L », où l'erreur est de l'ordre du %, sur la valeur de l'énergie.

Mais il faut ici faire une observation très importante. Si nous définissons un troisième axe cartésien z', sur lequel nous reportons les valeurs de $g(x, y, z')$, nous constatons que plus la surface g se rapproche d'un plan, meilleure est la précision. Même si la figure géométrique est beaucoup plus compliquée qu'un « L », la précision de la méthode redevient meilleure que le $^0/_{00}$ si g est dans un plan.

14.1.4 *Résultats pour le calcul de potentiel*

Ici, les résultats sont beaucoup moins bons. En effet, la méthode a été établie de façon que l'approximation soit bonne pour l'énergie, mais sans aucune condition sur la répartition du potentiel.

De fait, on constate que si g est dans un plan, les conditions aux limites sont respectées, même si la figure est compliquée. Plus g s'éloigne d'un plan, plus les lignes équipotentielles deviennent imprécises et l'on constate qu'elles ont tendance à se situer elles aussi dans un plan. Dans le cas de la figure en forme de « L », les équipotentielles peuvent être incorrectement réparties alors que la valeur de l'énergie est néanmoins précise.

14.1.5 *Résultats pour le calcul du champ H*

L'on peut simplement dire que, dans la mesure où les équipotentielles sont correctes, les valeurs obtenues pour H le sont aussi.

15. Conclusions

— Méthode extrêmement rapide et précise pour l'énergie.
— Ne convient pas pour des domaines trop compliqués.
— Ne convient que sous certaines conditions pour calculer précisément la répartition du potentiel et du champ magnétique.

16. Possibilités de développement de la méthode

16.1 *Domaines avec îlots*

Un premier pas à faire est d'élargir le champ d'application de la méthode. Pour cela, il est possible d'introduire la possibilité d'avoir des îlots dans le domaine :

Rappel : Nous avions les fonctions

$$V_i = \begin{cases} J_m \left\{ \underline{Z}^{\frac{i}{2}} \right\} = \beta_{\frac{i}{2}} & \text{si } i \text{ est pair} \\ Re \left\{ \underline{Z}^{\frac{i+1}{2}} \right\} = \alpha_{\frac{i+1}{2}} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

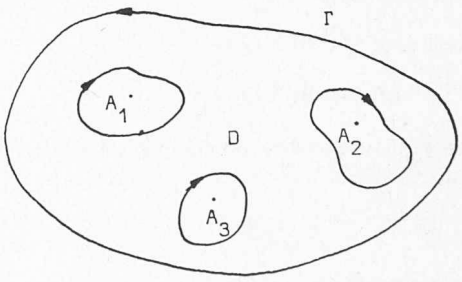

Fig. 4.

Soit $\underline{A} = (x_a + jy_a)$, x_a et y_a étant les coordonnées du point A, point qui se trouve à l'intérieur d'un îlot.

On peut démontrer que, pour traiter ce cas, il faut non seulement prendre des fonctions $\underline{Z}^p$ comme précédemment, mais encore des fonctions $(\underline{Z} - \underline{A})^{-n}$, donc aux anciennes fonctions V_i viennent s'ajouter les nouvelles fonctions $V'k$:

$$V'k = \begin{cases} J_m \left\{ \underline{Z} - \underline{A} \right\}^{-\frac{k}{2}} = \beta'_{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ pair} \\ Re \left\{ \underline{Z} - \underline{A} \right\}^{-\frac{k+1}{2}} = \alpha'_{\frac{k+1}{2}} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

Donc :

$$\theta = \sum_i C_i V_i + \sum_L \sum_K C'_{LK} V'_{LK}$$

où L numérote les îlots.

La suite du calcul est la même qu'avant, mais, bien entendu, le nombre de cas pour les a_{ij} et les b_i vont augmenter. Cette partie de la théorie n'a pas été éprouvée sur des cas pratiques ; nous ne pouvons par conséquent pas donner de résultats.

16.2 *Augmenter la précision*

Il serait certainement possible d'améliorer encore la précision, et par suite de pouvoir prendre des domaines plus compliqués, si l'on pouvait prendre un plus grand nombre d'approximation V_i. Pour pouvoir le faire, il faut diminuer les erreurs d'arrondi, et par conséquent travailler en double précision.

17. Exemples

a) Figure pour laquelle le potentiel est situé dans le plan :

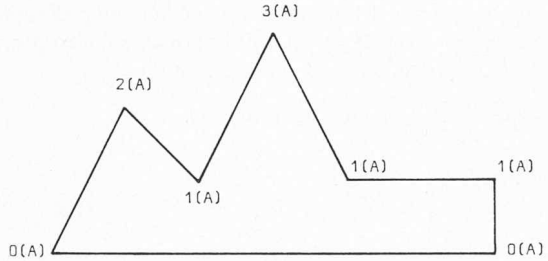

Fig. 5.

La répartition du potentiel est linéaire sur les côtés.

W calculé $= 0{,}534.10^{-5}$ (J)

$\widetilde{W} \quad = 0{,}534.10^{-5}$ (J)

b) Figure pour laquelle le potentiel n'est pas situé dans un plan :

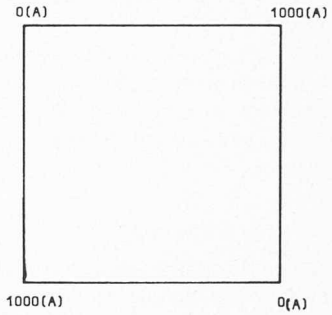

Fig. 6.

Ici aussi, la répartition du potentiel est linéaire sur les côtés du carré.

W calculé $= 0{,}419$ (J)

$\widetilde{W} \quad = 0{,}419$ (J)

Les valeurs indiquées sur les figures sont celles du potentiel magnétique en ampères.

Ces deux exemples représentent les deux sortes de domaines pour lesquels la méthode est bonne :

a) Un domaine géométriquement « compliqué », mais avec les valeurs du potentiel situées dans un plan.

b) Un domaine géométriquement « simple », avec les valeurs du potentiel pouvant être réparties autrement que dans un plan.

Nous tenons à remercier tout particulièrement M. le Professeur J. Descloux de l'EPFL, dont les conseils précieux nous ont permis d'élaborer cette méthode.

BIBLIOGRAPHIE

J. D. Méthée : *Analyse vectorielle*. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Adresse de l'auteur :
Denis Derron, ing. dipl. EPUL
22, ch. de Bellerive, 1007 Lausanne

Bibliographie

Richtig und Falsch im Wärmeschutz, Feuchtigkeitsschutz, Bautenschutz, par *Karl Moritz*, ingénieur-conseil, Aalen, Württ. 2e édition. Wiesbaden — Berlin, Bauverlag GMBH, 1970. — Un volume 17×24 cm, 618 pages, 320 figures, 49 tableaux. Prix : relié, 75 DM.

Ouvrage faisant part d'une riche somme d'expériences et apportant une précieuse contribution à l'art de bien construire, spécialement en matière de bâtiments, dans les domaines de l'isolation thermique et de la protection contre l'humidité.

On sait combien, en ces domaines, de petites erreurs peuvent donner naissance à de gros défauts et entraîner de graves inconvénients.

L'auteur s'est attaché à classer les diverses sources d'erreurs, en décrivant de nombreux exemples de solutions à adopter et de celles à exclure, en justifiant les dispositions préconisées et, chaque fois que cela est possible, en déterminant par le calcul les dimensions des éléments en cause.

De nombreux tableaux donnent les caractéristiques des matériaux classiques et des plus récents (plastiques, etc.) à prendre en considération dans les projets.

Ce livre constitue un guide de caractère essentiellement pratique et d'application immédiate qui sera apprécié de tous les constructeurs, architectes et ingénieurs, ayant des problèmes d'isolation à résoudre.

Publications diverses

Lufttechnische Berechnungen im Mollier — *i*, *x* — Diagramm, par Dr.-Ing. habil. *W. Häussler*, Professor an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt. Dresden, Verlag Theodor Steinkopff, 1969. — Un volume 15× 21 cm, XVI-218 pages, 126 figures, 14 tableaux. Prix : relié, 43,20 DM.

Voiles minces en béton armé, par *André Paduart*, ingénieur civil des Constructions AIBr, agrégé de l'Enseignement supérieur, professeur à l'Université Libre de Bruxelles. Paris, Eyrolles, éditeur, 1969. — Un volume 16×24 cm, 149 pages, 74 figures.

Sous une forme condensée, l'auteur donne quelques principes concernant la construction des voiles en béton armé, puis en expose plus longuement leur calcul :

1. Introduction. — 2. Classification des formes. — 3. Dispositions architecturales. — 4. Technologie des voiles minces. — 5. Bases du calcul des voiles minces. — 6. Voiles plans. — 7. Calcul des membranes. — 8. Calcul des coques. — 9. Instabilité de l'équilibre.