**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande

**Band:** 98 (1972)

**Heft:** 1

**Artikel:** Analyse limite de plaques circulaires avec la condition de plasticité de Von Mises

**Autor:** Guerlement, G. / Lamblin, D.O.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-71527

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 01.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Analyse limite de plaques circulaires avec la condition de plasticité de Von Mises [1]

par G. GUERLEMENT et D.O. LAMBLIN, de la Faculté polytechnique de Mons (Belgique), Département d'architecture, Professeur Marcel SAVE

## 1. Introduction

L'analyse limite des plaques circulaires parfaitement plastiques a été étudiée par de nombreux auteurs [2] [3] [6] [7] [8] [9] [2] et un nombre important de solutions ont été proposées pour le critère de Tresca. Dans ce cas, la linéarité de la condition d'écoulement facilite l'intégration des équations d'équilibre. En général, pour une condition d'écoulement non linéaire, les équations d'équilibre doivent être intégrées numériquement et peu de solutions sont connues à ce jour [4].

Ce rapport développe une méthode systématique permettant d'obtenir des solutions pour une condition d'écoulement arbitraire non linéaire ; la méthode est ensuite appliquée à la condition d'écoulement de Von Mises et des solutions complètes correspondant à plusieurs cas de charge courants sont obtenues. Ces solutions sont valables moyennant les hypothèses habituelles de l'analyse limite des plaques parfaitement plastiques soumises à flexion : les efforts tranchants sont des « réactions » et les forces de membrane sont négligées. Les charges limites calculées n'ont donc une signification physique que si le rapport R/H du rayon de la plaque à sa semi-épaisseur est supérieur à 5 et inférieur à 40.

## 2. Equations fondamentales

Soient $r$, $\theta$, $z$ les coordonnées cylindriques de la plaque ; $z$ étant dirigé verticalement vers le bas. Avec les notations des figures 1a et 1b, où les forces et les moments sont considérés comme positifs dans le sens indiqué, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{d}{dr}(rM_r) = M_\theta + rT, \tag{1}$$

$$rT = -\int_o^r p(r)\, r\, dr - qb, \tag{2}$$

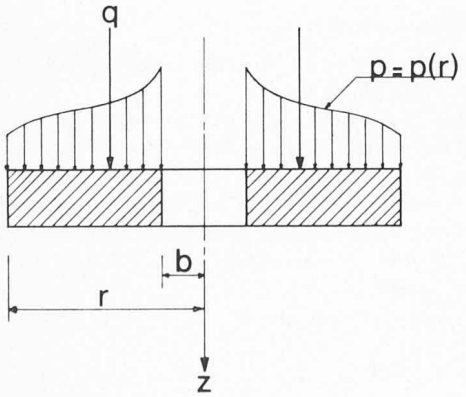



Fig. 1a. — Charges appliquées sur la plaque.

$q$ étant une charge linéique circulaire uniforme qui peut être une réaction. Par élimination de $T$ entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation fondamentale

$$\frac{d}{dr}(rM_r) = M_\theta - \int_o^r p(r)\, r\, dr - qb. \tag{3}$$

La condition d'écoulement s'écrit :

$$f(M_r/M_o,\, M_\theta/M_o) = 0, \tag{4}$$

où $f$ est une fonction arbitraire satisfaisant les conditions suivantes : dans le plan $(M_\theta, M_r)$, (4) représente une courbe fermée contenant l'origine, de concavité partout dirigée vers l'origine et symétrique par rapport à la bissectrice des axes coordonnés. D'autre part, dans ce rapport, nous admettons que (4) est telle que $M_\theta/M_o$ peut être exprimé explicitement en fonction de $M_r/M_o$ ; $M_o$ est le moment plastique par unité de longueur de la plaque.

Le mécanisme d'écoulement peut être décrit par la vitesse $w$ (dérivée par rapport au temps de la flèche) laquelle est liée aux composantes $K_r$, $K_\theta$ du vecteur vitesse de courbure par les relations :

$$K_r = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad K_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \tag{5}$$

$K_r$ et $K_\theta$, associées aux moments de flexion par la loi de normalité, sont données par

$$K_r = \lambda \frac{\delta f}{\delta M_r} \qquad K_\theta = \lambda \frac{\delta f}{\delta M_\theta} \tag{6}$$

où $\lambda$ est un scalaire non négatif. Les relations (6) sont seulement valables en un point régulier de la courbe d'écoulement $\left(\frac{\delta f}{\delta M_r}, \frac{\delta f}{\delta M_\theta}\right.$ continues en ce point$\left.\right)$. En un point singulier, les composantes $K_r$ et $K_\theta$ du vecteur vitesse de courbure sont généralisées selon :

$$K_r = \lambda(1-\alpha)\left(\frac{\delta f}{\delta M_r}\right)_1 + \lambda\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta M_r}\right)_2,$$

$$K_\theta = \lambda(1-\alpha)\left(\frac{\delta f}{\delta M_\theta}\right)_1 + \lambda\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta M_\theta}\right)_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{7}$$

Ces relations signifient que le vecteur vitesse de courbure est localisé dans l'angle des deux normales limites à la courbe d'écoulement au point considéré.

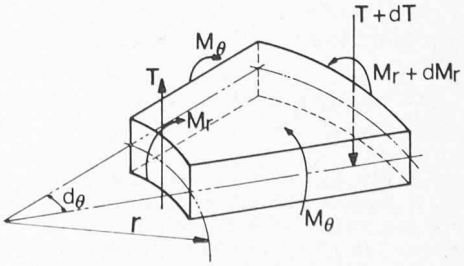



Fig. 1b. — Eléments de réduction sollicitant un élément de plaque.

[1] Cet article est publié avec l'appui de l'*Institut de la construction métallique (ICOM)* de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Il constitue le texte d'une conférence donnée en mai 1970 à la Facolta di Ingegneria de l'Université de Cagliari par le professeur Marcel Save.

[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

## 3. Méthode numérique

Considérons la condition d'écoulement

$$M_\theta/M_o = g\,(M_r/M_o) \tag{8}$$

et les variables non dimensionnelles

$$y = M_r/M_o\,, \quad x = r/R\,. \tag{9}$$

Supposons la plaque entièrement plastifiée sous la charge limite et portons les expressions de $M_\theta/M_o$, $M_r/M_o$, $r/R$, tirées de (8) et (9) dans (3) nous obtenons l'équation différentielle non linéaire du premier ordre :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left[-y + g(y) - \frac{R^2}{M_o}\int_o^x p\,(xR)\,x\,dx - \frac{qb}{M_o}\right] \tag{10}$$

conditions initiales $x = x_i$, $y = y_i$,

conditions au contour : $x = x_f$, $y = y_f$ . (11)

L'intégration de (10) quand $p$ ou $q$ est donné, avec les conditions aux limites (11) fournit une valeur de la charge $q$ ou $p$ à l'état limite.

Hopkins et Wang [4] ont étudié la plaque soumise à une pression uniforme et à une pression répartie annulairement à partir du centre avec une condition d'écoulement arbitraire (la condition de Von Mises fut particulièrement considérée). Ils ont proposé deux méthodes pour intégrer les équations de forme analogue à (10). La première méthode est basée sur des intégrations analytiques successives de (10) où l'expression initiale de $y$ est trouvée à l'aide d'un critère simple (par exemple le critère de Tresca). Cette méthode est rapidement convergente mais ne semble pas applicable à n'importe quel cas de charge vu les difficultés mathématiques rencontrées et la nécessité de connaître une expression analytique de $y$. La seconde méthode est la méthode des isoclines, plus générale mais graphique. Dans ce rapport, on utilise une méthode numérique générale applicable à tout cas de charge symétrique de révolution et à toute forme de la condition d'écoulement.

Pour une valeur de l'intensité de la charge appartenant à un intervalle suffisamment large pour contenir, à coup sûr, la charge limite, l'équation (10) est intégrée à partir des conditions initiales $x_i$, $y_i$ jusqu'au contour $x = 1$, $y = y_f^*$ à l'aide de la méthode de Runge-Kutta [12]. Si la valeur choisie pour l'intensité de la charge diffère de la valeur limite, $y_f^*$ diffère de $y_f$. L'intégration de (10) est alors recommencée avec une valeur différente de l'intensité de la charge jusqu'à ce que l'égalité de $y_f^*$ et de $y_f$ soit réalisée [3]. La méthode peut être améliorée par un procédé de convergence. Notons $l^+$ et $l^-$ les limites de l'intervalle contenant l'intensité limite $l$ (égale à $p$ ou $q$ selon le cas étudié) de la charge et $y^+$ et $y^-$ les conditions au contour résultant de l'intégration de (10) avec les valeurs $l^+$ et $l^-$ substituées à la charge limite.

Nous avons évidemment l'une des situations suivantes :

$$y_f^- < y_f < y_f^+ \quad \text{ou} \quad y_f^+ < y_f < y_f^- \,. \tag{12}$$

[3] L'équation (10) peut aussi s'intégrer à partir des conditions initiales $x_i$, $y_i$ jusqu'aux conditions au contour $x = x^*$, $y = y_f$ pour une valeur choisie a priori de l'intensité de la charge. Le paramètre $x^*$ définit la géométrie de la plaque dont l'intensité de la charge limite est celle choisie. Cette méthode n'est pas itérative mais elle ne permet pas d'obtenir la charge limite pour une géométrie imposée.

Après examen des valeurs relatives de $y_f^+$, $y_f^-$, $y_f$, il est possible d'interpoler entre $l^+$ et $l^-$ pour obtenir une meilleure valeur de l'intensité $l^*$ de la charge. Par intégration de (10) on détermine la valeur de $y_f^*$ correspondant à $l^*$. Selon les valeurs relatives de $y_f^*$ et $y_f$, $l^*$ remplacera $l^+$ ou $l^-$ et l'interpolation sera recommencée. La dernière itération fournit $y_f^*$ égal à $y_f$ avec une erreur aussi faible qu'on le désire. La fonction $y = y\,(x)$ correspondante est la distribution du moment radial de flexion.

Un programme Fortran IV, écrit pour l'ordinateur IBM 1130 de la Faculté polytechnique de Mons (Belgique), permet d'appliquer automatiquement la méthode précédente. L'intégration est faite par une « subroutine » complétée d'un test de précision [13] des résultats. L'équation (10) est donnée pour chaque cas étudié dans un sous-programme « function » ; il est donc facile d'appliquer le programme à n'importe quel cas de charge sans modifications importantes.

## 4. Applications

4.1 La méthode exposée précédemment est appliquée à la condition d'écoulement de Von Mises donnée par :

$$f = [(M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2)/M_o^2] - 1 = 0 \tag{13}$$

ou [4]

$$2M_\theta/M_r = M_r/M_o \pm (4 - 3M_r^2/M_o^2)^{1/2} \tag{14}$$

où le signe positif ou négatif est adopté selon que le point $(M_r, M_\theta)$ appartient à l'arc BAHGF ou à l'arc FEDCB (fig. 2) respectivement.

L'équation (10) devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2}\,y \pm \frac{1}{2}\,(4-3y^2)^{1/2} - \frac{R^2}{M_o}\int_o^x p(xR)\,x dx - \frac{qb}{M_o}\right]. \tag{15}$$

Pour estimer les bornes $l^-$ et $l^+$ de l'intervalle contenant la charge limite, on peut utiliser les conditions d'écoulement représentées par les hexagones de Tresca inscrit et circonscrit à l'ellipse de Von Mises. Les théorèmes de l'analyse limite [9] nous assurent que la charge limite réelle est comprise entre ces bornes.

4.2 *Plaques simplement appuyées*

*a)* Plaque circulaire chargée uniformément sur un anneau (fig. 3(a))

Comme la plaque est complètement plastifiée, en vertu de la symétrie, on a au centre $M_r = M_\theta = M_o$ (point $A$ de la fig. 2). Ce régime plastique est valable sur $0 \leq r \leq a$. Pour $a < r < R$, $K_\theta$ doit être positif. Le profil représentatif de l'état de sollicitation sur le critère d'écoulement est AIH (fig. 2), le point $H$ correspond à $r = R$ car, au contour, on a $M_r = 0$.

L'équation (15) devient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2x}\,(4-3y^2)^{1/2} - \frac{pR^2}{2M_o}\left[x - \frac{1}{x}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right] \tag{16}$$

avec les conditions d'intégration

$$x_i = \frac{a}{R}\,, \quad y_i = 1,$$

$$x_f = 1, \quad y_f = 0.$$

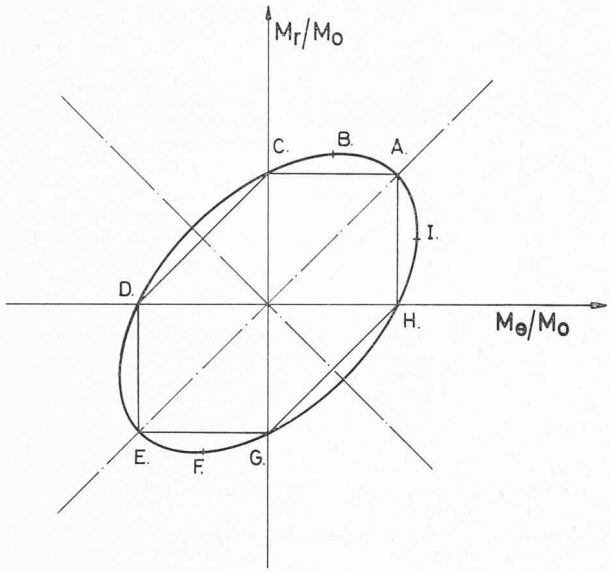



Fig. 2. — Condition de plasticité de Von Mises.

Des limites inférieure et supérieure de la charge limite sont données par [3] :

$$\frac{p^- R^2}{2M_o} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^3}\right], \tag{17}$$

$$p^+ = \frac{2}{\sqrt{3}}\, p^- \,. \tag{18}$$

Le rapport $p/p^-$ de la charge limite exacte de Von Mises à celle de Tresca est donné en fonction de $\frac{a}{R}$ (fig. 3).

La solution présentée ici tend asymptotiquement vers la solution obtenue par Hopkins et Wang [4] lorsque $\frac{a}{R}$ tend vers 0 ; mais la procédure numérique devient difficile dans ce cas.

La loi de variation du moment radial est donnée à la figure 9 pour différentes valeurs de $\frac{a}{R}$

*b)* Plaque circulaire soumise à une ligne de charge circulaire (fig. 3 (b))

Le régime plastique et les conditions d'intégration sont les mêmes que ceux du cas a).

L'équation (15) devient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Y}{2x} + \frac{1}{2x}(4-3y^2)^{1/2} - \frac{qa}{M_o x} \,. \tag{19}$$

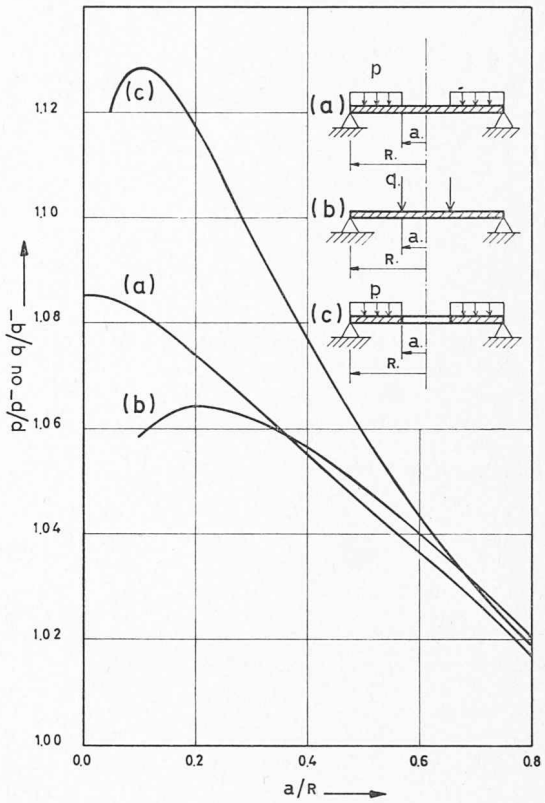
Des bornes inférieure et supérieure de la charge sont données par [8]

$$\frac{q^- a}{M_o} = \frac{1}{1-\frac{a}{R}}\,, \quad q^+ = \frac{2}{\sqrt{3}}\, q^- \,. \tag{20}$$

Le rapport $q/q^-$ est porté en fonction de $\frac{a}{R}$ à la figure 3 et le moment radial en fonction de $x$ à la figure 10.

*c)* Plaque annulaire chargée uniformément (fig. 3 (c))

En $r = a$, $M_r = 0$. Le point représentatif se trouve en $H$ (fig. 2) car $K_\theta$ doit être positif. Lorsque $r$ croît, le point représentatif de l'état de sollicitation se déplace à partir de $H$ le long de $IAB$ et revient en $H$ pour $r = R$. Si le profil des sollicitations reste toujours à droite de $B$, ce que nous supposons, l'équation (16) doit être considérée.



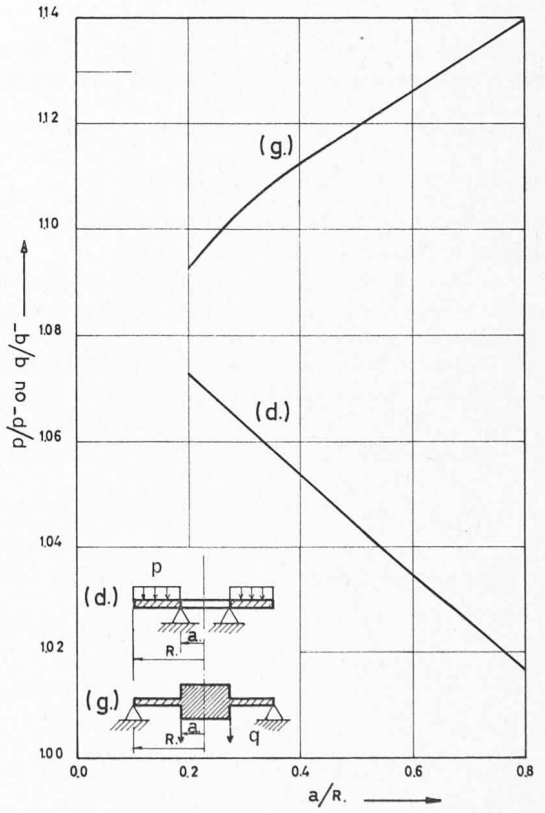




Fig. 3. — Charges limites non dimensionnelles pour les plaques simplement appuyées.

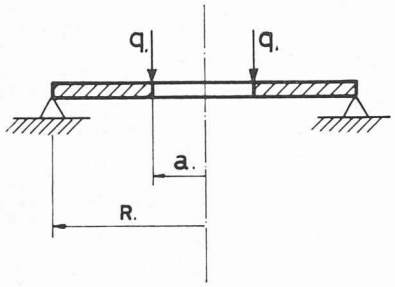



Fig. 4. — Plaque annulaire soumise à une ligne de charge circulaire.

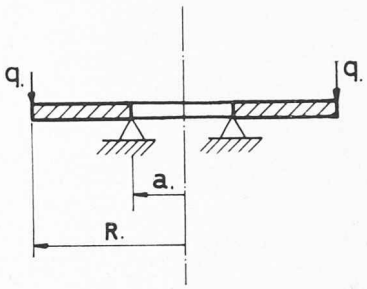



Fig. 5. — Plaque annulaire, appuyée au contour intérieur et soumise à une ligne de charge circulaire.

Les conditions aux contours sont :

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}\ ,\ y_i = 0, \\ x_f = 1\ \ ,\ y_f = 0. \end{array} \right. \tag{21}$$

Des bornes inférieure et supérieure de la charge limite sont obtenues au moyen du critère Tresca [7] :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{p^- R^2}{2M_o} = \dfrac{3}{1 + \dfrac{a}{R} - 2\left(\dfrac{a}{R}\right)^2}\ , \\ p^+ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, p^-\ . \end{array} \right. \tag{22}$$

Les résultats sont donnés aux figures 3 et 11. Pour confirmer la validité des résultats obtenus, il faut vérifier que la valeur maximum de $y$ n'excède pas $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (point $B$ de la fig. 2), ce qui est montré à la figure 11.

*d)* Plaque annulaire, appuyée au contour intérieur et chargée uniformément (fig. 3 (d))

En $r = a$, $M_r = 0$. Sur le critère d'écoulement, le point représentatif se trouve en $D$ (fig. 2) car $K_\theta$ doit être négatif en vertu de la déformée d'un diamètre.

Lorsque $r$ croît, le point représentatif de l'état de sollicitation se déplace à partir de $D$ le long de $DCB$ et revient en $D$ pour $r = R$ (fig. 2). Si le profil des sollicitations se trouve toujours à gauche de $B$, l'équation (15) devient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x} - \frac{1}{2x}(4 - 3y^2)^{1/2} + \frac{pR^2}{2xM_o}(1 - x^2)\ . \tag{23}$$

Cette équation est intégrée avec les conditions aux contours :

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}\ ,\ y_i = 0, \\ x_f = 1,\ \ y_f = 0. \end{array} \right. \tag{24}$$

Des bornes inférieure et supérieure de la charge sont obtenues au moyen du critère de Tresca [7] :

$$\frac{p^- R}{2M_o} = \frac{2 \ln (a/R)\ \ ^*}{1 + 2 \ln (a/R) - (a/R)^2}\ , \tag{25}$$

$$p^+ = \frac{2}{\sqrt{3}}\, p^-\ .$$

* ln est le symbole des logarithmes népériens.

Les résultats sont donnés aux figures 3 et 12 et on peut vérifier que $\dfrac{M_r}{M_o}$ est toujours inférieur à $2/\sqrt{3}$ (moment radial correspondant au point $B$).

*e)* Plaque annulaire soumise à une ligne de charge circulaire (fig. 4)

Illiouchine [8] a obtenu la charge limite :

$$q = \frac{M_o}{a}\ , \tag{26}$$

en utilisant le critère d'écoulement de Tresca avec un profil de sollicitations se réduisant au point $H$. On obtient la même solution avec la condition de plasticité de Von Mises. Pour ce cas simple, il est possible d'obtenir analytiquement un champ de vitesses associé. En utilisant les formules (5), (6), (7), on montre facilement que le champ de vitesses associé est donné, pour le critère de Tresca, par :

$$w = (1 - \alpha)\frac{W_o}{R - a}(R - r) + \alpha \frac{W_o}{\ln \dfrac{a}{R}} \ln \frac{r}{R}\ , \tag{27}$$

et pour le critère de Von Mises par :

$$w = \frac{W_o}{R^{1/2} - a^{1/2}}(R^{1/2} - r^{1/2}) \tag{28}$$

$W_o$ est la vitesse en $r = a$, mesurée positivement vers le bas.

La solution donnée par la formule (26) est donc la solution exacte pour les deux conditions de plasticité.

*f)* Plaque annulaire, appuyée au contour intérieur et soumise à une ligne de charge circulaire (fig. 5)

Comme pour le cas $e$, il est facile de montrer que $q = \dfrac{M_o}{R}$ est la charge limite exacte à la fois pour la condition de plasticité de Tresca et pour celle de Von Mises. Le profil des sollicitations est réduit au point $H$ (fig. 2). Les champs de vitesses associés sont donnés par :

$$w = (1 - \alpha)\frac{W_o}{R - a}(r - a) + \frac{\alpha W_o}{\ln \dfrac{R}{a}} \ln \frac{r}{a}\ , \tag{29}$$

pour la condition de plasticité de Tresca, et par :

$$w = \frac{W_o}{R^{1/2} - a^{1/2}}(r^{1/2} - a^{1/2}) \tag{30}$$

pour le critère de Von Mises.

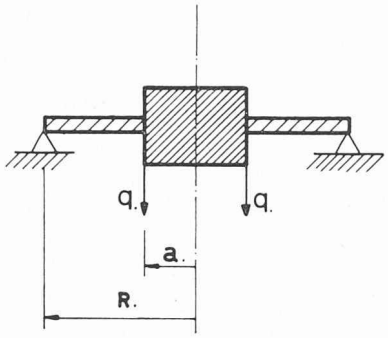



Fig. 6. — Plaque avec un renforcement central soumise à une ligne de charge sur le contour extérieur du renforcement.

*g)* Plaque avec un renforcement central soumise à une ligne de charge sur le contour extérieur du renforcement (fig. 6)

En $r = a$, le point représentatif se trouve en $B$ car le moment radial doit avoir une valeur absolue maximale. En $r = R$, le point représentatif se trouve en $H$ et, par conséquent, le profil des sollicitations est $BAIH$.

L'équation (19) s'applique avec les conditions aux contours :

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}\ ,\ y_i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ , \\ x_f = 1\ ,\ y_f = 0\ . \end{array} \right. \tag{31}$$

On obtient une borne inférieure pour $q$ en considérant le critère de Tresca et le profil des sollicitations $AH$. On a :

$$\frac{q^- a}{M_o} = \frac{1}{1 - \dfrac{a}{R}}\ . \tag{32}$$

Cette solution est complète ; le champ de vitesses associé étant donné par :

$$w = \frac{W_o}{R - a}(R - r)\ . \tag{33}$$

Le rapport $q/q^-$ est porté en fonction de a/R à la figure 3 et le moment radial en fonction de $x$ à la figure 13.

4.3 *Plaques encastrées*

*a)* Plaque circulaire soumise à une charge distribuée uniformément sur un anneau (fig. 8(a))

On utilise l'équation (16) avec les conditions :

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}\ ,\ y_i = 1\ , \\ x_f = 1\ ,\ y_f = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ . \end{array} \right. \tag{34}$$

La solution obtenue par Hopkins et Prager [3] pour le critère de Tresca est donnée à la figure 8.

La solution obtenue au moyen du critère de Von Mises tend, lorsque $a$ tend vers 0, vers la solution obtenue par Hopkins et Wang [4] pour la plaque complètement chargée. La loi de variation du moment radial est donnée à la figure 9.

*b)* Plaque circulaire soumise à une ligne de charge circulaire (fig. 7(b))

Le profil des sollicitations et les conditions initiale et finale d'intégration sont identiques à ceux du cas 4.2 *a)*. L'équation (19) s'applique.

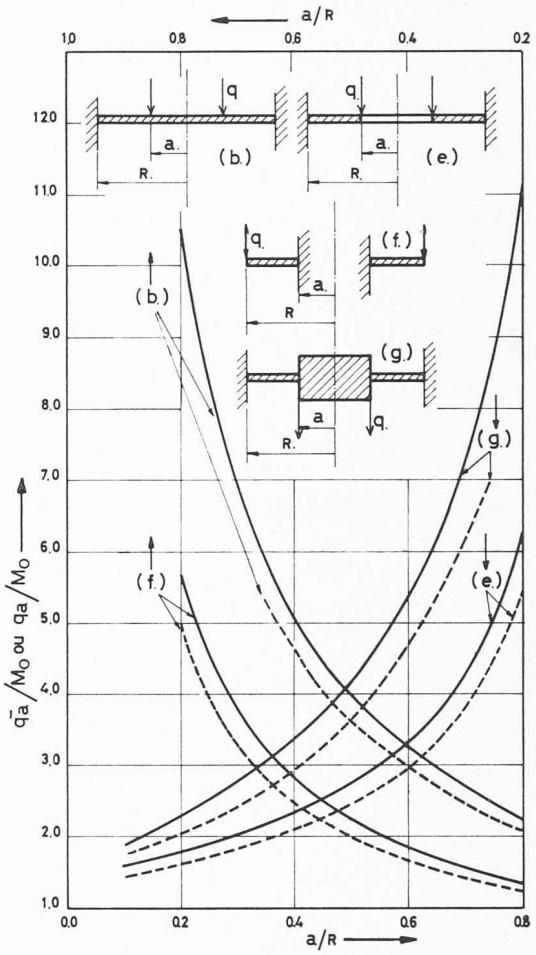



Fig. 7 — Charges limites non dimensionnelles pour les plaques encastrées.

Les lignes en pointillés correspondent au critère de Tresca.

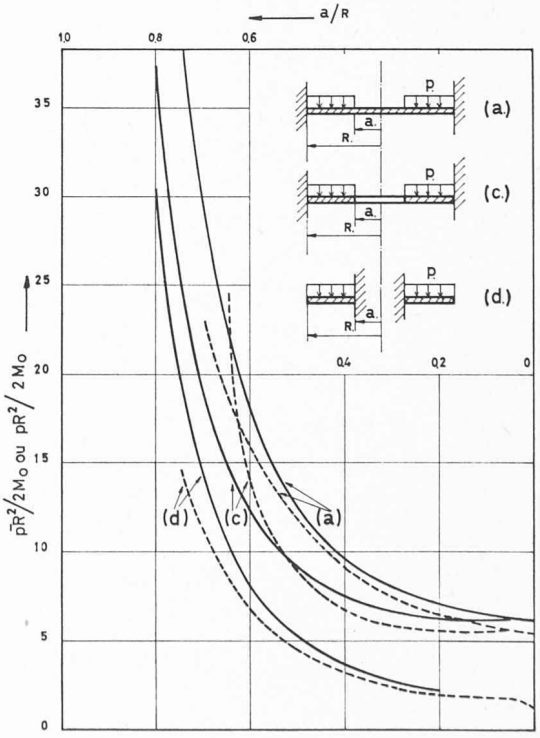



Fig. 8. — Charges limites non dimensionnelles pour les plaques encastrées.

Les lignes en pointillés correspondent au critère de Tresca.

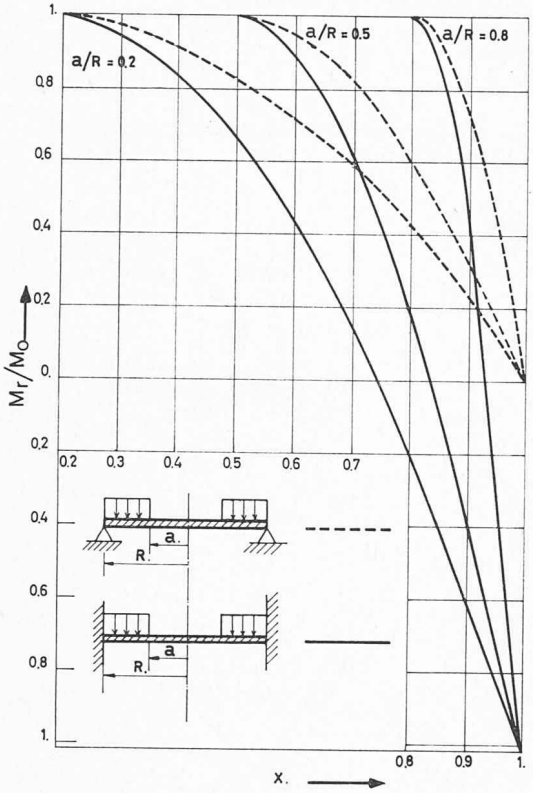



Fig. 9. — Loi de variation du moment radial pour différentes valeurs de a/R.

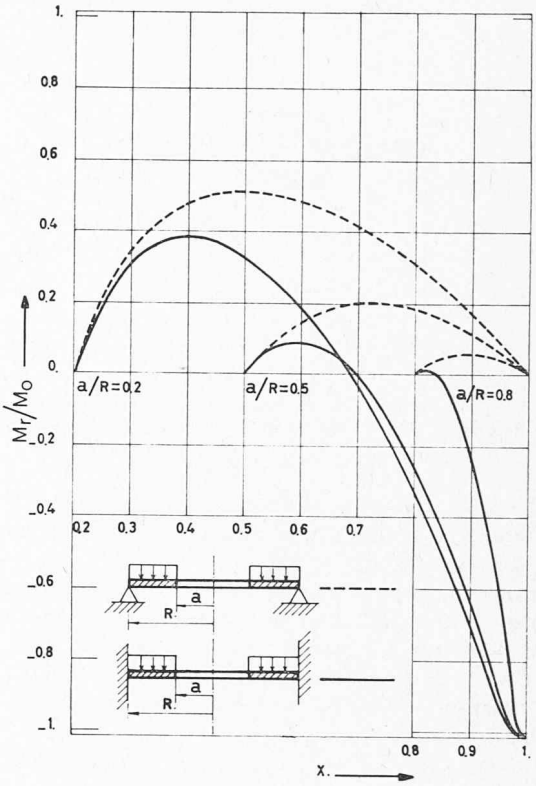



Fig. 11. — Loi de variation du moment radial pour différentes valeurs de a/R.

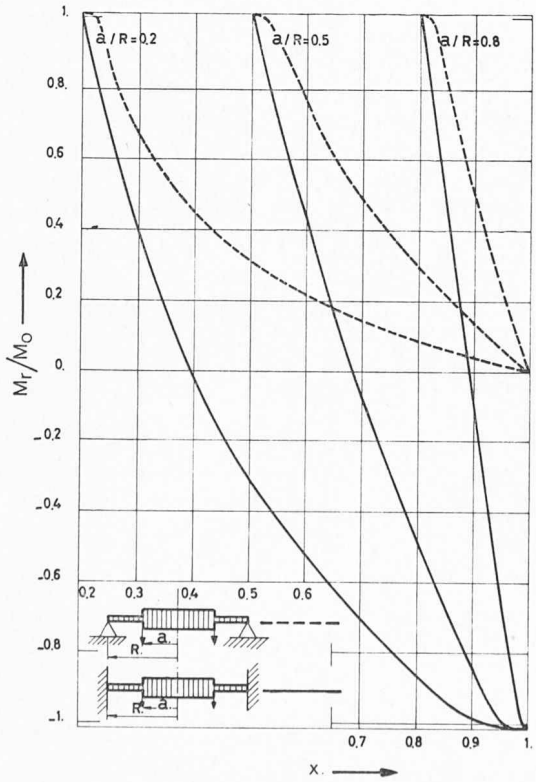



Fig. 10. — Loi de variation du moment radial pour différentes valeurs de a/R

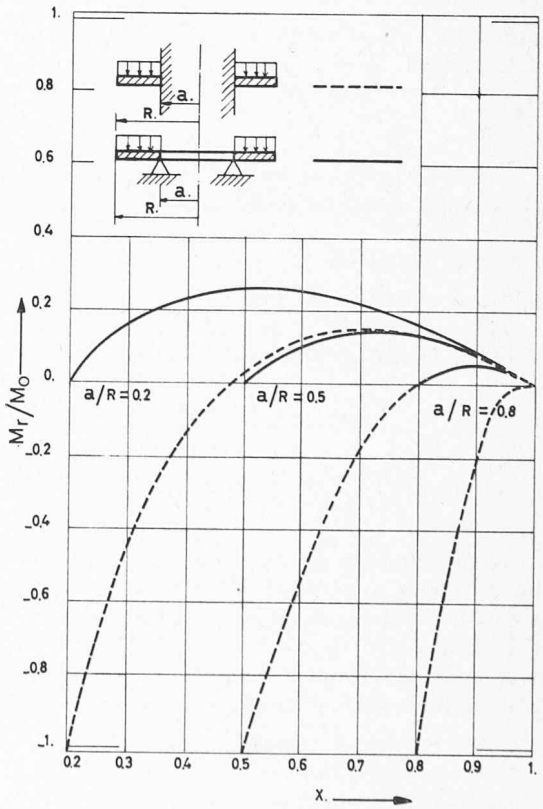



Fig. 12. — Loi de variation du moment radial pour différentes valeurs de a/R.

La borne inférieure obtenue au moyen du critère de Tresca [7] et la charge limite sont données en fonction de $a/R$ à la figure 7. La loi de variation du moment radial est donnée à la figure 10.

*c)* Plaque annulaire soumise à une charge uniformément répartie (fig. 8 (c))

Le profil des sollicitations part du point $H$ et s'arrête en $F$ (fig. 2) car $k_\theta$ doit être partout positif d'après la forme du mécanisme de ruine.

L'équation (16) s'applique avec les conditions aux contours :

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}, \quad y_i = 0, \\ x_f = 1, \quad y_f = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{array} \right. \tag{35}$$

Sawczuk [7] a étudié ce cas de charge avec la condition de plasticité de Tresca et donne une solution qui ne satisfait pas partout aux conditions d'admissibilité statique.

Dès lors, la charge obtenue est une borne supérieure de la charge limite. Comme on peut le voir à la figure 8, cette borne supérieure est bonne pour les petites valeurs de $a/R$ ; pour les plus grandes valeurs de $a/R$, cette borne supérieure de la charge se situe fort haut par rapport à la charge limite exacte.

La loi de variation du moment radial est donnée à la figure 11.

*d)* Plaque annulaire, encastrée au contour intérieur et soumise à une charge uniformément répartie (fig. 8 (d))

En $r = a$, $M_r = -(2/\sqrt{3})\, M_o$ (encastrement) et le point représentatif se trouve en $F$ (fig. 2). Lorsque $r$ croît, le point représentatif décrit l'arc $FED$ ; on atteint le point $D$ en $r = R$.

L'équation (23) doit être intégrée avec les conditions aux contours :

$$\left| \begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}, \quad y_i = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ x_f = 1, \quad y_f = 0. \end{array} \right. \tag{36}$$

La borne inférieure obtenue au moyen du critère de Tresca [7] et la charge limite pour la condition de plasticité de Von Mises sont données à la figure 8. La loi de variation du moment radial est donnée à la figure 12.

*e)* Plaque annulaire soumise à une ligne de charge (fig. 7 (e)).

En utilisant le critère de Tresca, Illiouchine [8] a donné la solution

$$q = \frac{M_o}{a}\left(1 + \frac{1}{\ln \dfrac{R}{a}}\right)$$

On peut compléter cette solution par le champ de vitesses :

$$w = \frac{W_o}{\ln \dfrac{a}{R}} \ln \frac{r}{R}, \tag{38}$$

où $W_o$ est la vitesse en $r = a$.

Avec la condition de plasticité de Von Mises, le profil des sollicitation est $HGF$ (fig. 2). Les équations (19) et (35) sont valables. On donne les résultats aux figures 4 et 7.

*f)* Plaque annulaire, encastrée au contour intérieur et soumise à une ligne de charge (fig. 7 (f))

Le profil des sollicitations est $FED$.

L'équation (15) devient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x} - \frac{1}{2x}(4 - 3y^2)^{1/2} + \frac{Rq}{M_o x} \tag{39}$$

avec les conditions aux contours (36).

Pour le critère de Tresca, Hodge [14] a donné la solution complète :

$$\frac{Rq}{M_o} = \frac{1}{1 - \dfrac{a}{R}}.$$

Les résultats sont donnés aux figures 7 et 14.

*g)* Plaque avec un renforcement central, soumise à une ligne de charge au contour extérieur du renforcement (fig. 7 (g))

Le profil des sollicitations est $BAIHGF$.

L'équation (19) s'intègre avec les conditions :

$$\begin{array}{l} x_i = \dfrac{a}{R}, \quad y_i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ x_f = 1, \quad y_f = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{array} \tag{40}$$

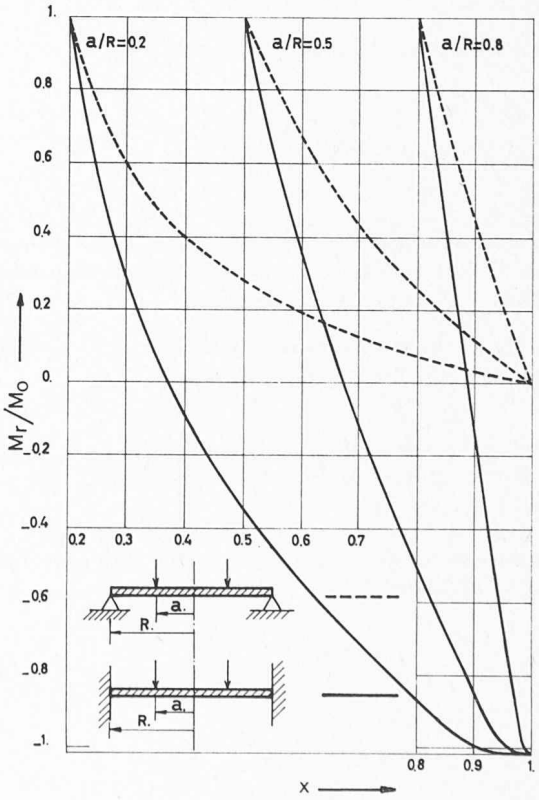



Fig. 13. — Loi de variation du moment radial pour différentes valeurs de a/R.

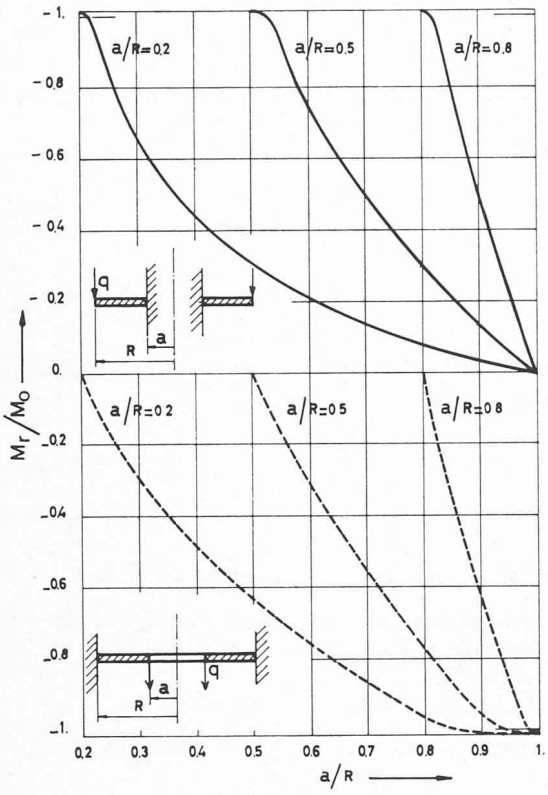



Fig. 14. — Loi de variation du moment radial pour différentes valeurs de a/R.

Une borne inférieure de $q$ a été donnée par Illiouchine [8] (fig. 7).

Les résultats sont donnés aux figures 7 et 13.

## 5. Détermination du champ de vitesses

Pour s'assurer que les charges limites obtenues sont exactes, il faut établir l'existence de champs de vitesses associés aux champs de moments.

Dans le cas de la condition de plasticité de Von Mises, les équations (5), (6) et (14) donnent :

$$\frac{d^2w}{dr^2}\bigg/\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r}\left(\frac{2M_r - M_\theta}{2M_\theta - M_r}\right) = \frac{1}{2R}\left\{\frac{3M_r}{\pm(4M_o^2 - 3M_r^2)^{1/2}} - 1\right\} \quad (40)$$

Considérons d'abord le signe + dans cette équation. Avec les conditions

$$\left| \begin{array}{ll} x = x_i, & w = w_o, \\ x = x_f, & w = 0, \end{array} \right. \quad (41)$$

l'intégration de (40) donne [4]

$$w(x) = w_o \int_x^{x_f} f(x)\,dx \Big/ \int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx$$

où :

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}\, exp\left\{-\frac{3}{2}\int_x^{x_f}\frac{1}{x}\frac{y}{\sqrt{4-3y^2}}\,dx\right\}^*$$

avec le signe − dans (40) et les conditions

$$\left| \begin{array}{ll} x = x_i, & w = 0\ , \\ x = x_f, & w = w_o\ . \end{array} \right. \quad (42)$$

On obtient :

$$w(x) = w_o \int_x^{x_i} f(x)\,dx \Big/ \int_{x_f}^{x_i} f(x)\,dx,$$

où :

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}\, exp\left\{\frac{3}{2}\int_x^{x_i}\frac{1}{x}\frac{y}{\sqrt{4-3y^2}}\,dx\right\}$$

La détermination de $w$ comporte simplement des doubles quadratures.

L'existence du champ de vitesses associé est établie (voir aussi [11]) et les charges limites obtenues sont donc exactes.


## Remerciements

Nous tenons à remercier M. le professeur M. A. Save des conseils et des critiques qu'il nous a formulés au cours de ce travail.


* exp représente la base des logarithmes népériens.

BIBLIOGRAPHIE


[1] W. Prager and P. G. Hodge : *Theory of Perfectly Plastic Solids*. John Wiley and Sons, Inc. New-York (1951).

[2] V. V. Sokolovsky : *Prikl. Mat. Mekh.* 8, 141 (1944).

[3] H. G. Hopkins and W. Prager : *J. Mech. Phys. Solids* 2, 1 (1953).

[3] H. G. Hopkins and W. Prager : *J. Mech. Phys. Solids* 2, 1 (1953)

[4] H. G. Hopkins and A. J. Wang : *J. Mech. Phys. Solids* 3, 117 (1955).

[5] D. C. Drucker and H. G. Hopkins : *Proc. 2nd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, (1954).

[6] W. H. Pell and W. Prager : *Proc. Ist U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.* (Amer. Soc. Mech. Engrs, New-York), 547 (1951)

[7] A. Sawczuk and T. Jaeger : *Grenztragfähigkeits. Theorie der Platten*, p. 77-127. Springer-Verlag, Berlin (1963).

[8] A. A. Illiouchine : *Plasticité*, p. 232. Eyrolles, Paris (1956).

[9] C. Massonnet and M. Save, *Plastic Analysis and design*, Vol. II : Plates and shells. In press.

[10] W. Prager, *An introduction to Plasticity*. Addison-Wesley, New-York, (1959).

[11] G. Eason : *J. Mech. Phys. Solids* 6, 231 (1958).

[12] W. E. Milne : *Numerical Solution of Differential equations*. Wiley (1953).

[13] W. E. Milne : *Numerical calculus*. Princeton U.P. (1949).

[14] P. G. Hodge Jr. : *Plastic Analysis of Structures*. Mac Graw-Hill, (1959).